

Сергей Павлович РОДИОНОВ —  
 гл. научный сотрудник Тюменского филиала  
 Института теоретической и прикладной механики  
 им. С.А. Христиановича СО РАН,  
 гл. научный сотрудник ЗАО «КОНКОРД» (г. Москва),  
 доктор физико-математических наук, профессор  
 rodionovsp@bk.ru

Любовь Николаевна СОКОЛЮК —  
 научный сотрудник Тюменского филиала  
 Института теоретической и прикладной механики  
 им. С.А. Христиановича СО РАН

УДК 532.546

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ  
 ДЛЯ ГЕОЛОГО-ГИДРОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ UPSCALING'E  
 CALCULATION OF FUNCTIONAL OF THE ERROR  
 FOR GEOLOGICAL-HYDROLOGICAL MODEL UNDER UPSCALING**

*АННОТАЦИЯ.* В статье предложена методика определения погрешности численных расчетов при преобразовании геологической модели в гидродинамическую (upscaling). Методика основана на решении задачи двухфазной фильтрации внутри крупной ячейки.

*SUMMARY.* The article offers the technique of determination of numerical calculating errors at transformation of geological model into hydrodynamic (upscaling) model. The technique is based on a solution of a two-phase filtration problem in a large cell.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.* Геолого-гидродинамическая модель, upscaling, погрешность.

*KEY WORDS.* Geological-hydrodynamic model, upscaling, an error.

**1. Введение.** Геолого-гидродинамическое моделирование играет важную роль в проектировании разработки нефтяных месторождений. Однако расчеты на сетках геологических моделей, зачастую содержащих несколько миллионов ячеек, занимают большое время. Одним из способов ускорения расчетов является уменьшение числа ячеек геологической модели путем применения т.н. процедуры upscaling. В соответствии с этой процедурой группы мелких ячеек геологической модели (мелкая сетка) объединяются в крупные ячейки гидродинамической модели (крупная сетка). Для каждой крупной ячейки с помощью специальных методов рассчитываются т.н. эквивалентные фильтрационные и емкостные параметры [1]; [2]. Тем не менее, применение даже лучшего из этих методов не гарантирует от существенных ошибок при upscaling'e. Это связано с тем, что погрешность зависит не только от точности расчета эквивалентных параметров, но и от варианта выделения групп мелких ячеек, образующих крупные ячейки. Настоящая работа и посвящена определению погрешности при upscaling'e.

Введем следующую меру отличия расчетов на мелкой и крупной сетках, т.е. погрешность при upscaling'e:

$$J_1 = \sum_{nw} \int_0^T |Q_{w,nw}^{fine}(t) - Q_{w,nw}^{coarse}(t)| dt. \quad (1)$$

Здесь и далее индексами «fine» и «coarse» обозначены параметры соответственно мелкой и крупной сеток; индексами «w» и «t» — параметры соответственно воды и смеси в целом;  $Q$  — дебит;  $t$  — время;  $T$  — период закачки воды;  $lw$  — номера скважин.

Для выбора лучшего варианта объединения ячеек можно, конечно, вычислить  $J_1$  для нескольких вариантов непосредственно с помощью гидродинамического симулятора и выбрать тот, при котором  $J_1$  принимает наименьшее значение. В этой связи, поскольку прямые расчеты могут занять очень большое время, становится актуальной разработка метода определения наилучшего варианта объединения ячеек, который с одной стороны учитывал бы основные закономерности движения фаз в пласте, а с другой — позволял бы достаточно быстро решить поставленную задачу.

**2. Основные уравнения, предположения и допущения.** Пусть течение флюидов в пласте подчиняется следующим уравнениям фильтрации в рамках модели «разноцветных жидкостей» [3]:

$$\bar{\phi} \frac{\partial S}{\partial t} + u_t \nabla S = 0, \quad -\frac{1}{\mu} \operatorname{div}(k \nabla p) = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\phi} = \phi / f' = \phi (1 - S_{wc} - S_{or}), \quad f = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} = S, \quad f' = \frac{df}{dS_w} = \frac{1}{1 - S_{wc} - S_{or}}.$$

Здесь и далее  $\phi$  — пористость;  $S$  — водонасыщенность;  $u_t$  — скорость жидкости;  $p$  — давление смеси;  $f$  — доля воды в потоке жидкости;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $k$  — абсолютная проницаемость;  $S_{wc}$  и  $S_{or}$  — критические насыщенности соответственно воды и нефти;  $\bar{\phi}$  — доля подвижного порового пространства.

Пласт считаем замкнутым, поэтому жидкость не проникает за его границы; в пласте отсутствуют недренируемые зоны (коэффициент охвата вытеснением равен 1); период закачки воды  $T = \infty$ .

**3. Решение вспомогательной задачи.** Вычислим функционал  $J_1$  в ортогональных криволинейных координатах  $(\zeta, \tau)$ , где  $\zeta$  — индекс линии тока, а  $\tau$  — координата «время движения частицы жидкости» вдоль линии тока длиной  $s$  [4]:

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{\bar{\phi}(s)}{|u_t(s)|} ds.$$

Рассмотрим нагнетательную и добывающую скважины, соединенные линиями тока (рис. 1). В рамках модели «разноцветных жидкостей» (2) давление не зависит от водонасыщенности и линии тока при постоянстве граничных условий не изменяют своего положения. Для каждой линии тока с индексом  $\zeta$  координата  $\tau$  равна  $\tau(\zeta) = 0$  на нагнетательной скважине и  $\tau = \tau_c(\zeta)$  — на добывающей. С целью имитации разностной сетки для уравнения сохранения массы воды в рассматриваемых криволинейных координатах разобьем область дренирования  $(\zeta, \tau)$  (т.е. весь пласт) на ячейки, ограниченные линия-

ми тока с индексами  $\zeta_i$  и  $\zeta_{i+1} = \zeta_i + \Delta\zeta_i$ ,  $i=1 \dots Ni$ , а также линиями  $\tau_j$  и  $\tau_{j+1} = \tau_j + \Delta\tau_j$ ,  $j=1 \dots Nj$  (рис. 1).



Рис. 1

Рассмотрим случай, когда размеры ячеек мелкой сетки равны нулю, а ячейки на рис. 1 относятся к крупной сетке. Кроме того, шаг по  $\tau$  для крупной сетки также равен нулю. Тогда дебиты добывающей скважины для мелкой и крупной и сеток равны точному ( $Q_w^{fine}(t) = Q_w(t)$ ) и осредненному по  $\zeta$  ( $Q_w^{coarse}(t) = \bar{Q}_w(t)$ ) решениям, и могут быть записаны в виде суммы соответственно по линиям и трубкам тока:

$$Q_w(t) = \int_{\zeta} q(\zeta) f(\zeta, \tau_e(\zeta), t) d\zeta = \sum_i \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) f(\zeta, \tau_e(\zeta), t) d\zeta, \quad \bar{Q}_w(t) = \sum_i q_i \bar{f}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t), \quad (3)$$

где  $q(\zeta)$  — поток жидкости вдоль линии тока  $\zeta$ ,  $f(\zeta, \tau_e(\zeta), t)$  — зависимость от времени доли воды в потоке на конце линии тока,  $q_i$  — поток жидкости в  $i$ -й трубке тока,  $\bar{\tau}_{e,i}$  — среднее по  $i$ -й трубке тока (интервалу  $\Delta\zeta_i$ ) значение координаты  $\tau_e(\zeta)$  на добывающей скважине,  $\bar{f}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t)$  — осредненная доля воды в потоке в трубке тока. Величины  $q_i$  и  $\bar{\tau}_{e,i}$  определяются следующим образом:

$$q_i = \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) d\zeta, \quad \bar{\tau}_{e,i} = \frac{1}{q_i} \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) \tau_e(\zeta) d\zeta.$$

Поскольку предполагается, что все точки пласта дренируемы, то «накопленные» за бесконечное время дебиты нефти для точного и численного решения равны. В силу допущения о замкнутости пласта линии тока начинаются и заканчиваются только на скважинах. Поэтому, учитывая вышеизложенное, функционал  $J_1$  можно записать в виде:

$$J_1 = \int_0^T |Q_w(t) - \bar{Q}_w(t)| dt = \int_0^T \left| \sum_i \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) (f(\zeta, \tau_e(\zeta), t) - \bar{f}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t)) d\zeta \right| dt.$$

Справедлива следующая оценка:

$$J_1 \leq \tilde{V} = \sum_i \tilde{V}_i, \quad (4)$$

где

$$\tilde{V}_i = \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) \sigma(\zeta) d\zeta, \quad \sigma(\zeta) = \int_0^{\tau} |f(\zeta, \tau_e(\zeta), t) - \bar{f}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t)| dt \quad (5)$$

— погрешность в  $i$ -й трубке тока.

Вычисление  $\tilde{V}$  в случае многих скважин осуществляется суммированием погрешностей  $\tilde{V}_i$  по всем трубкам тока, подходящим к добывающим скважинам. Таким образом, задача вычисления  $\tilde{V}$  сводится к расчету  $\tilde{V}_i$  (5). Рассмотренный выше способ вычисления  $\tilde{V}$  для двумерного случая применим и в трехмерном случае. Ясно, что  $\tilde{V}$  не убывает при укрупнении сетки.

Вычислим функционал  $\tilde{V}_i$  (5). Поскольку  $f(\zeta, \tau, t) = S(\zeta, \tau, t)$  и  $\bar{f}_{w,i}(\bar{\tau}_{e,i}, t) = \bar{S}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t)$ , то необходимо найти распределение водонасыщенности для  $i$ -ой трубки тока и находящихся в ней линий тока.

Применяя метод линий тока [4] к уравнению сохранения массы воды (2), преобразуем его к следующему виду в координатах  $(\zeta, \tau)$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 \quad (S = S(\zeta, \tau, t)). \quad (6)$$

Это уравнение дополняется начальными условиями и условиями на границах нагнетательных скважин:

$$S(\zeta, \tau, 0) = S_0(\zeta, \tau) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_e(\zeta)), \quad S(\zeta, 0, t) = S_b(\zeta, t), \quad (7)$$

Начальные значения водонасыщенности на линиях тока определяются приравниванием соответствующих значений в точках пласта, через которые они проходят [4].

Для  $i$ -ой трубки тока осредненное уравнение сохранения массы воды с начальными и граничными условиями имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{S}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{S}_i}{\partial \bar{\tau}} = 0 \quad \bar{S}_i = \bar{S}_i(\bar{\tau}, t) \quad (0 \leq \bar{\tau} \leq \bar{\tau}_{e,i}), \quad i=1, \dots, Ni \quad (8)$$

$$\bar{S}_{0,i}(\bar{\tau}) = \frac{1}{\Delta\zeta_i} \int_{\Delta\zeta_i} S_0\left(\zeta, \frac{\tau_e(\zeta)}{\bar{\tau}_{e,i}} \bar{\tau}\right) d\zeta, \quad \bar{S}_{b,i}(t) = \frac{1}{\Delta\zeta_i} \int_{\Delta\zeta_i} S_b(\zeta, t) d\zeta.$$

Далее рассмотрим важный частный случай закачки воды в полностью нефтенасыщенный пласт, когда  $S_0(\zeta, \tau) = S_{0,i}(\bar{\tau}) = 0$  и  $S_b(\zeta, t) = \bar{S}_{b,i}(t) = \eta(t)$  ( $\eta(z)$  — единичная функция Хевисайда). Решения уравнений (6) и (8) при  $\tau = \tau_e(\zeta)$  и  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_{e,i}$  имеют простой вид:

$$S(\zeta, \tau_e(\zeta), t) = \eta(t - \tau_e(\zeta)) \quad (\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}), \quad \bar{S}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t) = \eta(\bar{\tau}_{e,i} - t). \quad (11)$$

На рис. 2 приведен качественный вид этих аналитических решений, отмеченных соответственно пунктирной и штриховой линиями.

Численное решение уравнения (8) можно приближенно представить в следующем виде:

$$\bar{S}_i(\bar{\tau}_{e,i}, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \bar{\tau}_{e,i} - 0.5\Delta\bar{\tau}_i \\ 0.5 + (t - \bar{\tau}_{e,i}) / \Delta\bar{\tau}_i, & \bar{\tau}_{e,i} - 0.5\Delta\bar{\tau}_i < t < \bar{\tau}_{e,i} + 0.5\Delta\bar{\tau}_i, \\ 1, & t \geq \bar{\tau}_{e,i} + 0.5\Delta\bar{\tau}_i \end{cases} \quad (12)$$

где  $\Delta\bar{\tau}_i$  — эффективный шаг «разностной сетки» для  $i$ -й трубки тока:

$$\Delta\bar{\tau}_i = \frac{1}{\bar{\tau}_{e,i}} \sum_j \Delta\bar{\tau}_{ij} \Delta\bar{\tau}_{ij}, \quad \Delta\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{q_i} \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) \Delta\tau_{ij}(\zeta) d\zeta, \quad \bar{\tau}_{e,i} = \sum_j \Delta\bar{\tau}_{ij} \quad (0 \leq \Delta\bar{\tau}_i \leq \bar{\tau}_{e,i}).$$

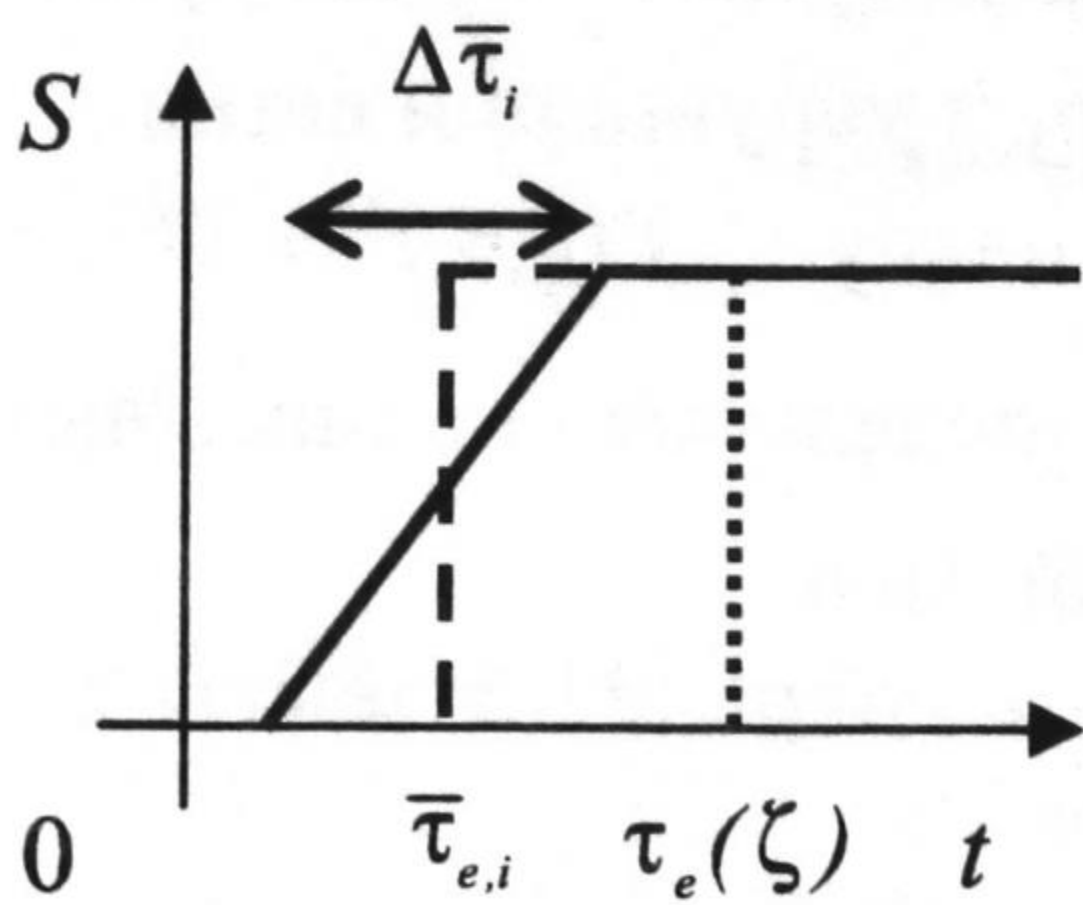


Рис. 2

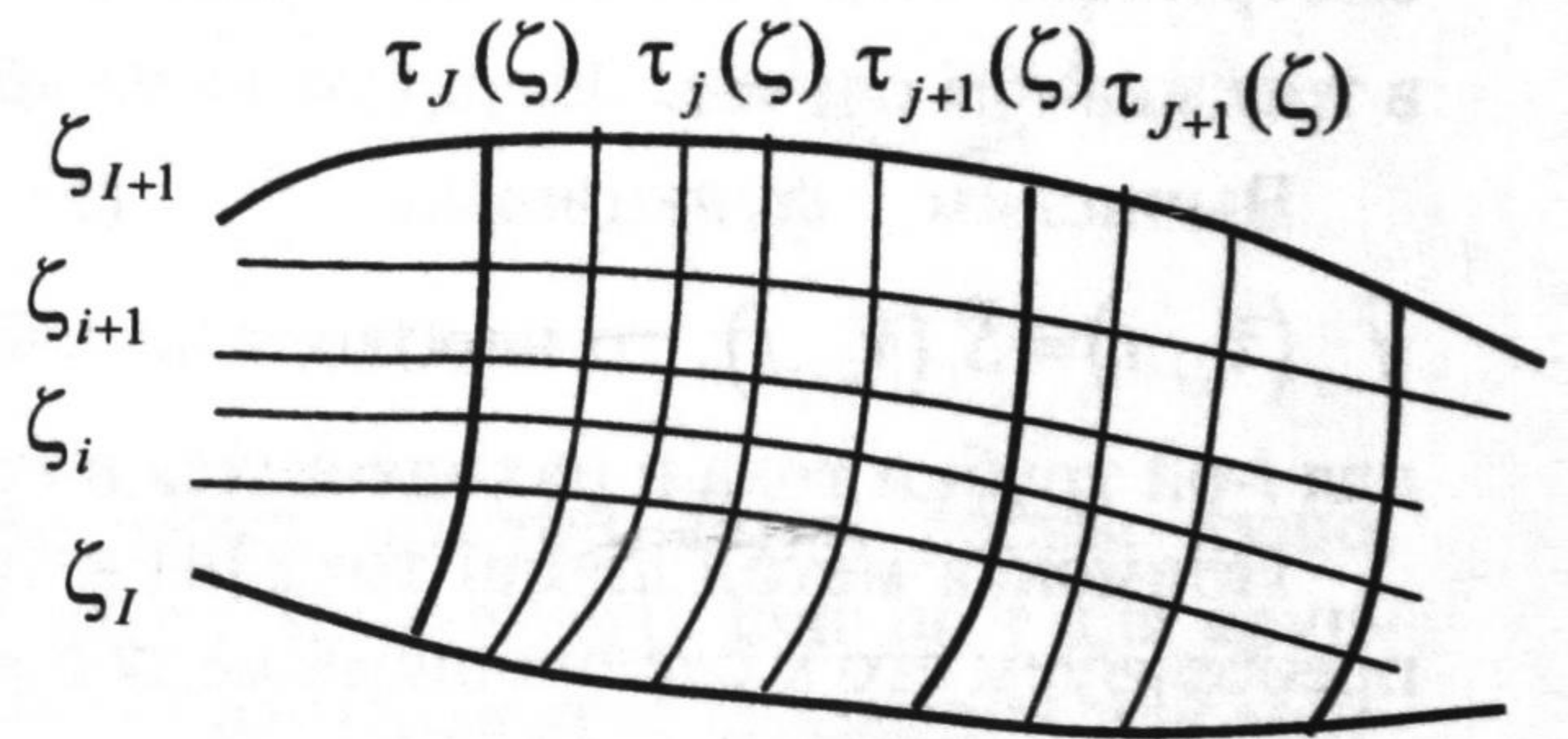


Рис. 3

Зависимость (12) получена интерполяцией решений для  $\Delta\bar{\tau}_i = 0$  и  $\Delta\bar{\tau}_i = \bar{\tau}_{e,i}$ . Ее качественный вид на рис. 2 отмечен сплошной линией.

Подставляя в (5) решения (11), (12) и полагая  $T = \infty$ , получим следующее выражение для погрешности:

$$\tilde{V}_i = \int_{\Delta\zeta_i} q(\zeta) \sigma_i(\zeta) d\zeta, \quad \frac{\sigma_i(\zeta)}{\Delta\bar{\tau}_i} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+z^2), & 0 \leq z \leq 1 \\ z, & z > 1 \end{cases}, \quad z = \frac{|\tau_e(\zeta) - \bar{\tau}_{e,i}|}{\Delta\bar{\tau}_i}. \quad (13)$$

Пусть теперь имеется две сетки, состоящих из крупных и мелких трубок тока (рис. 3). Крупные трубки тока отмечены индексами  $I$  и ограничены кривыми  $\zeta_I$  и  $\zeta_{I+1} = \zeta_I + \Delta\zeta_I$  ( $I = 1, \dots, NI$ ). Каждая из этих трубок разделяется на ячейки, ограниченные линиями  $\tau_J$  и  $\tau_{J+1} = \tau_J + \Delta\tau_J$  ( $J = 1, \dots, NJ$ ). Для  $I$ -й трубки тока шаг по  $\tau$  и поток жидкости равны:

$$\Delta\bar{\tau}_I = \frac{1}{\bar{\tau}_{e,I}} \sum_J \Delta\bar{\tau}_{IJ} \Delta\bar{\tau}_{IJ}, \quad \Delta\bar{\tau}_{IJ} = \frac{1}{q_I} \int_{\Delta\zeta_I} q(\zeta) \Delta\tau_{IJ}(\zeta) d\zeta, \quad q_I = \int_{\Delta\zeta_I} q(\zeta) d\zeta, \quad \bar{\tau}_{e,I} = \sum_J \Delta\bar{\tau}_{IJ} \quad (14)$$

$$(0 \leq \Delta\bar{\tau}_I \leq \bar{\tau}_{e,I}).$$

Погрешность при upscaling'e  $\tilde{V}$  определим как разность погрешностей (13) для крупных и мелких трубок тока

$$\tilde{V} = \sum_I \tilde{V}_I - \sum_i \tilde{V}_i,$$

где  $\tilde{V}_I$  — погрешность для  $I$ -й крупной трубки тока. Учитывая, что  $\Delta\zeta_I = \sum_{ii} \Delta\zeta_{ii}$  функционал  $\tilde{V}$  можно записать в виде следующей суммы по крупным трубкам тока:

$$\tilde{V} = \sum_I \tilde{V}'_I, \quad \tilde{V}'_I = \tilde{V}_I - \sum_{ii} \tilde{V}_{ii}, \quad \tilde{V}_I = \int_{\Delta\zeta_I} q(\zeta) \sigma_I(\zeta) d\zeta = \sum_{ii} \int_{\Delta\zeta_{ii}} q(\zeta) \sigma_I(\zeta) d\zeta, \quad (15)$$

где суммирование по  $ii$  относится к тем мелким трубкам тока, которые находятся внутри крупной трубки тока с номером  $I$ .

Из (12) и (13) следует, что функционал  $\tilde{V}$  (15) зависит от структуры потока в пласте и от количества ячеек между источниками и стоками. При уменьшении числа ячеек между источником и стоком в каждой трубке тока функционал  $\tilde{V}$  увеличивается. Поэтому он принимает наибольшее значение, когда между источником и стоком имеется одна ячейка.

**4. Вычисление погрешности в декартовых координатах.** При вычислении погрешности в декартовых координатах  $(x_1, x_2)$  ограничимся рассмотрением случая двумерной фильтрации, т.к. результаты легко обобщить на трехмерный случай. Пусть каждой крупной ячейке в декартовых координатах соответствует одна «крупная» трубка тока, границы которой совпадают с границами ячейки. Таким образом,  $NJ=J=1$ , а источники и стоки находятся на границах крупных ячеек. Тогда задача определения погрешности во всем пласте разбивается на отдельные задачи в его подобластях — крупных ячейках. Функционал  $\bar{V}$  для крупной сетки запишется аналогично (15) в виде суммы функционалов  $V'_I$  по отдельным крупным ячейкам-трубкам тока минус сумма функционалов по отдельным мелким трубкам тока, входящих в крупные трубки тока:

$$\bar{V} = \sum_I \bar{V}_I, \quad \bar{V}_I = V'_I - \sum_i v'_i, \quad (16)$$

где суммирование по  $i$  относится к тем линиям тока, которые расположены внутри крупной ячейки с номером  $I$ . Функционал  $\bar{V}_I$  для  $I$ -й крупной ячейки зависит от фильтрационно-емкостных параметров только этой ячейки.

Увеличение  $\bar{V}$  при уменьшении числа ячеек между источниками и стоками демонстрируется на рис. 4а-в, где мелкие ячейки с высокой и низкой проницаемостью отмечены соответственно светлым и темным цветом. Так, если четыре мелкие ячейки объединены в одну крупную (рис. 4а), и между источником и стоком находятся две ячейки, то погрешность будет равна нулю, т.к. фронты вытеснения от правой границы-источника придут к левой границе-стоку крупной ячейки одновременно (поток направлен горизонтально по отношению к рисунку). Однако если те же четыре мелкие ячейки объединить в две крупные ячейки, т.е. в две крупные трубки тока (рис. 4б и рис. 4в), то времена прихода фронтов будут разными и погрешность будет уже больше нуля.

Погрешность будет зависеть и от основного направления фильтрации, определяемого граничными условиями. Из рис. 4а-в можно видеть, что когда основное направление фильтрации вертикально относительно рисунка, во всех трех случаях погрешность будет одинаковой. Поскольку в общем случае фильтрация происходит по всем осям рассматриваемой системы координат, то в качестве  $\bar{V}_I$  можно взять норму из значений погрешности  $\bar{V}_{m,I}$ , полученных в результате решения задач по отдельным направлениям  $x_m$ , т.е.  $\bar{V}_I = \|\bar{V}_{m,I}\|$  ( $m=1,2$ ). Например,  $\|\bar{V}_{m,I}\| = 0.5(\bar{V}_{1,I} + \bar{V}_{2,I})$  или  $\|\bar{V}_{m,I}\| = \max(\bar{V}_{1,I}, \bar{V}_{2,I})$ .

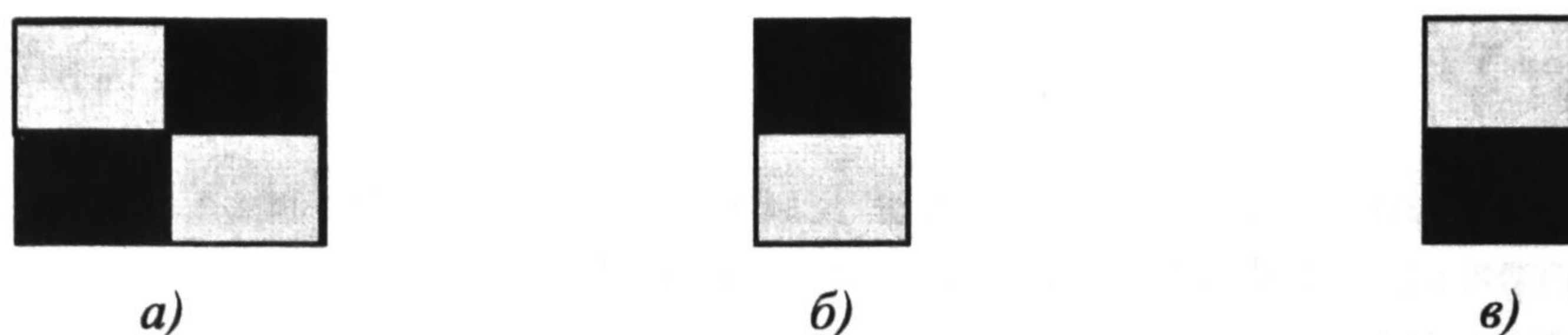


Рис. 4а-в

В качестве примера вычислим погрешность  $\bar{V}_{1,l}$  для  $l$ -й крупной ячейки, когда вытеснение нефти водой происходит в направлении координаты  $x_1$  ( $m=1$ ). Погрешность можно определить как численно, так и аналитически. Для численного расчета погрешности, как и для определения эквивалентной абсолютной или относительной проницаемостей [1,2], на границах крупной ячейки задаются граничные условия. Например, на границах, параллельных основному направлению вытеснения, задаются условия непротекания, а на границах, перпендикулярных этому направлению, задается давление.

Получим аналитическое решение методом линий тока. Для этого дополнительно примем, что мелкие линии тока не искривляются и каждая из них проходит через ряд последовательно соединенных мелких ячеек от границы-источника к границе-стоку и при этом границы мелких трубок тока совпадают с границами рядов мелких ячеек. Поскольку распределение фильтрационно-емкостных параметров внутри мелких ячеек однородно (при  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}]$   $\tau_e(\zeta) = \tau_{e,i} = \text{const}$  и  $q(\zeta) = \text{const}$ ), то имеем:

$$\bar{\tau}_{e,i} = \frac{1}{q_i \Delta\zeta_i} \int q(\zeta) \tau_e(\zeta) d\zeta = \tau_{e,i}, \quad (17)$$

где индексом  $i$  обозначен номер мелкой трубки тока. Кроме того, интегрирование по  $\Delta\zeta_i$  сводится к суммированию по  $i$ .

$$q_l = \int_{\Delta\zeta_l} q(\zeta) d\zeta = \sum_i q_i, \quad \Delta\bar{\tau}_l = \frac{1}{q_l \Delta\zeta_l} \int q(\zeta) \Delta\tau(\zeta) d\zeta = \frac{1}{q_l} \sum_i q_i \Delta\tau_i.$$

Поскольку  $J=NJ=1$ , то функционал (16) для крупной ячейки можно представить в виде:

$$V'_{1,l} = \sum_i v_i, \quad v_i = \begin{cases} 0.5(q_i \Delta\bar{\tau}_l + q_i |\bar{\tau}_{e,l} - \tau_{e,i}| z) & 0 \leq z \leq 1 \\ q_i |\bar{\tau}_{e,l} - \tau_{e,i}| & z > 1 \end{cases}, \quad z = \frac{|\bar{\tau}_{e,l} - \tau_{e,i}|}{\Delta\bar{\tau}_l}.$$

Учитывая, что

$$\Delta\bar{\tau}_l = \Delta\bar{\tau}_l = \bar{\tau}_{e,l} \quad (18)$$

получим окончательно:

$$V'_{1,l} = \sum_i v_i, \quad v_i = \begin{cases} 0.5(q_i \bar{\tau}_{e,l} + q_i |\bar{\tau}_{e,l} - \tau_{e,i}| z) & 0 \leq z \leq 1 \\ q_i |\bar{\tau}_{e,l} - \tau_{e,i}| & z > 1 \end{cases}, \quad z = \left| 1 - \frac{\tau_{e,i}}{\bar{\tau}_{e,l}} \right|. \quad (19)$$

Поскольку  $\bar{\tau}_{e,i} = \tau_{e,i}$  и  $\Delta\bar{\tau}_i = \Delta\tau_i$ , то функционал для  $i$ -й мелкой трубки тока в крупной ячейке принимает вид:

$$v'_i = 0.5q_i\Delta\bar{\tau}_i, \Delta\bar{\tau}_i = \frac{1}{\tau_{e,i}} \sum_j \Delta\bar{\tau}_{ij} \Delta\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{\tau_{e,i}} \sum_j \Delta\tau_{ij} \Delta\tau_{ij}, \bar{\tau}_{e,i} = \sum_j \Delta\bar{\tau}_{ij} = \tau_{e,i} = \sum_j \Delta\tau_{ij}.$$

где индексом  $j$  обозначен номер ячейки в трубке. Суммируя  $v'_i$  по всем  $i$ , получим вклад мелкой сетки в погрешность крупной ячейки:

$$\sum_i v'_i = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Delta\bar{\tau}_i = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{\tau_{e,i}} \sum_j \Delta\tau_{ij} \Delta\tau_{ij}.$$

Выразим погрешность для крупной ячейки через фильтрационно-емкостные параметры входящих в ее состав мелких ячеек. Объемы подвижного порового пространства  $ij$ -й мелкой ячейки и  $I$ -й крупной ячейки выражаются через расход жидкости  $q$  и время движения через них фронта вытеснения  $\Delta\tau$  в следующем виде:

$$V_{p,ij} = q_i \Delta\tau_{ij}, V_{p,I} = \Delta\bar{\tau}_i q_i. \tag{20}$$

В соответствии с допущением о прямолинейности линий тока, расход жидкости в каждой  $i$ -й мелкой трубке тока, входящей в состав крупной ячейки, можно записать в виде:

$$q_i = T_i \Delta p, T_i = 1 / \sum_j 1 / T_{ij}. T = \sum_i T_i, T_{ij} = k_{1,ij} \Delta s_{1,ij} / \Delta x_{1,ij}, \tag{21}$$

где  $T_{ij}$  — проводимость  $ij$ -й мелкой ячейки в направлении  $m=1$ ;  $T_i$  — проводимость  $i$ -й трубки;  $\Delta p$  — разность давлений на нормальных к потоку границах крупной ячейки;  $k_{1,ij}$ ,  $\Delta s_{1,ij}$ ,  $\Delta x_{1,ij}$  — для  $ij$ -й ячейки соответственно проницаемость, площадь поперечного сечения и размер вдоль координаты  $x_1$ .

Результирующий функционал, как разность функционалов для крупной ячейки и составляющих ее мелких ячеек, с учетом (16)-(21) принимает вид:

$$\bar{V}_{1,I} = \sum_i (v_i - v'_i), \tag{22}$$

$$v_i = \begin{cases} \frac{V_{p,I}}{2} \left( \frac{T_i}{T} + \frac{T}{T_i} \left| \frac{T_i}{T} - \frac{V_{p,i}}{V_{p,I}} \right|^2 \right) & 0 \leq z < 1 \\ V_{p,I} \left| \frac{T_i}{T} - \frac{V_{p,i}}{V_{p,I}} \right| & z > 1 \end{cases}, z = \left| 1 - \frac{T}{V_{p,I}} \frac{V_{p,i}}{T_i} \right|, V_{p,i} = \sum_j V_{p,ij},$$

$$v'_i = \frac{1}{2} \frac{1}{V_{p,i}} \sum_j V_{p,ij}^2.$$

Здесь подвижные объемы мелких ячеек  $V_{p,ij}$  и крупной ячейки  $V_{p,I}$  выражаются через геометрический объем  $V_{ij}$ , пористость  $\phi_{ij}$  и критические насыщенности  $S_{wc,ij}$ ,  $S_{or,ij}$  в следующем виде:

$$V_{p,ij} = q_i \Delta\tau_{ij} = \bar{\phi}_{ij} V_{ij} = \phi_{ij} V_{ij} (1 - S_{wc} - S_{or})_{ij}, V_{p,I} = \sum_i V_{p,i} = \sum_{i,j} V_{p,ij}.$$



Компонента  $\bar{V}_{1,I}$  функционала  $\bar{V}_I$  определяется по формуле (22). Аналогично вычисляется и компонента  $\bar{V}_{2,I}$ . Полученный таким образом целевой функционал может быть использован для решения задачи минимизации погрешности гидродинамической модели на множестве вариантов объединения мелких ячеек в крупные (или для выбора из определенного множества гидродинамических сеток сетки с минимальной погрешностью).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Durlofsky, L. J. Upscaling and Gridding of Fine Scale Geological Models for Flow Simulation. Department of Petroleum Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305-22220 USA, 2005.
2. Родионов С.П., Орехова Л.Н. Определение модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую // Известия вузов. Нефть и газ. 2008. Ч. 1. № 6. С. 12-16.
3. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учеб. М.: Недра, 1993.
4. Batycky, R.P. A Three-Dimensional Two-Phase Field Scale Streamline Simulator, PhD dissertation, January 1997.

**Виталий Петрович КОСЯКОВ** —  
аспирант кафедры механики многофазных систем  
Тюменского государственного университета

**Сергей Павлович РОДИОНОВ** —  
гл. научный сотрудник Тюменского филиала  
Института теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН,  
гл. научный сотрудник ЗАО «КОНКОРД»  
(г. Москва),  
доктор физико-математических наук, профессор  
rodionovsp@bk.ru

УДК 532.546, 622.276

## ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ БАКЛИ-ЛЕВЕРЕТТА В ЗОНАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

## OBTAINING OF EXACT SOLUTIONS OF A BUCKLEY-LEVERETT PROBLEM IN A ZONAL-NON-HETEROGENOUS LAYER

**АННОТАЦИЯ.** В статье получены точные решения задачи о вытеснении нефти водой из зонально-неоднородного пласта, эксплуатируемого галереей скважин.

**SUMMARY.** The article discusses exact solutions of the problem of oil displacement by water from the zonal-heterogenous reservoir operated by gallery of wells.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Заводнение, нефтяной пласт, зональная неоднородность.  
**KEY WORDS.** Flooding, oil layer, zonal heterogeneity.

**1. Введение.** Нефтенасыщенные пласты, как правило, неоднородны. В качестве примера можно привести зонально-неоднородные пласты, включаю-