

**Амир Анварович ГУБАЙДУЛЛИН** —  
директор Тюменского филиала  
Института теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН,  
профессор кафедры механики многофазных систем  
Тюменского государственного университета,  
доктор физико-математических наук

**Наиль Габсалямович МУСАКАЕВ** —  
зав. лабораторией гидродинамики многофазных сред  
Тюменского филиала Института теоретической  
и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
доцент, кандидат физико-математических наук

**Станислав Леонидович БОРОДИН** —  
мл. научный сотрудник  
Тюменского филиала Института теоретической  
и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН  
timms@tmn.ru

УДК 536.421; 622.276

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОСХОДЯЩЕГО ГАЗОЖИДКОСТНОГО ПОТОКА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ\***

### **MATHEMATICAL MODEL OF UPWARD GAS-LIQUID FLOW IN THE VERTICAL WELL**

**АННОТАЦИЯ.** Разработанная авторами математическая модель, приведенная в работе, позволяет исследовать процессы, происходящие в добывающей скважине, оснащенной установкой электроцентробежных насосов. Полученные в ходе исследования результаты могут служить основой для оптимизации работы подобных объектов.

**SUMMARY.** Mathematical model, discussed in the article, allows to research processes occurring in the producing well, equipped with an installation of electric centrifugal pumps. The results obtained in the course of the research may serve as a basis for optimizing the operation of such facilities.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Математическая модель, двухфазное течение, установка электроцентробежных насосов.

**KEY WORDS.** Mathematical model, two-phase flow, installation of electric centrifugal pumps.

Характерный размер частиц, содержащихся в нефтегазовой смеси, которая движется в скважине, на несколько порядков больше молекулярно-кинетических размеров (расстояний между молекулами, средних длин свободного пробега молекул). Это позволяет использовать классические представления и уравнения механики сплошных однофазных сред для описания процессов в масштабах составляющих, т.е. процессов внутри или около от-

\* Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (№ НШ-4381.2010.1).

дельных частиц (для смеси в целом это микропроцессы). При этом для описания физических свойств фаз (вязкости, теплопроводности и т.д.) можно использовать уравнения и параметры, полученные из опытов с соответствующими веществами в однофазном состоянии [1].

Так как характерные размеры частиц на два-три порядка меньше макроскопических масштабов рассматриваемых течений [2], [3], [4], возможно описание макроскопических процессов в гетерогенной смеси методами механики сплошной среды с помощью осредненных или макроскопических параметров [1].

Получим дифференциальные уравнения, выражающие балансы массы, импульса и энергии, при одномерном восходящем течении двухфазной смеси в вертикальной трубе круглого сечения. При этом следует учесть, что «живое» сечение  $S$  в трубе уменьшается из-за отложения на внутренних стенках твердой фазы:

$$S = \pi R^2, \quad R = R_0 - \delta_s,$$

где  $R_0$  — радиус трубы;  $\delta_s$  — толщина слоя твердой фазы на стенке трубы.

Рассмотрим элемент трубы длиной  $\delta z$ , ограниченный горизонтальными сечениями  $S_1$ ,  $S_2$  и боковой поверхностью  $S_{бок}$  (рис. 1).

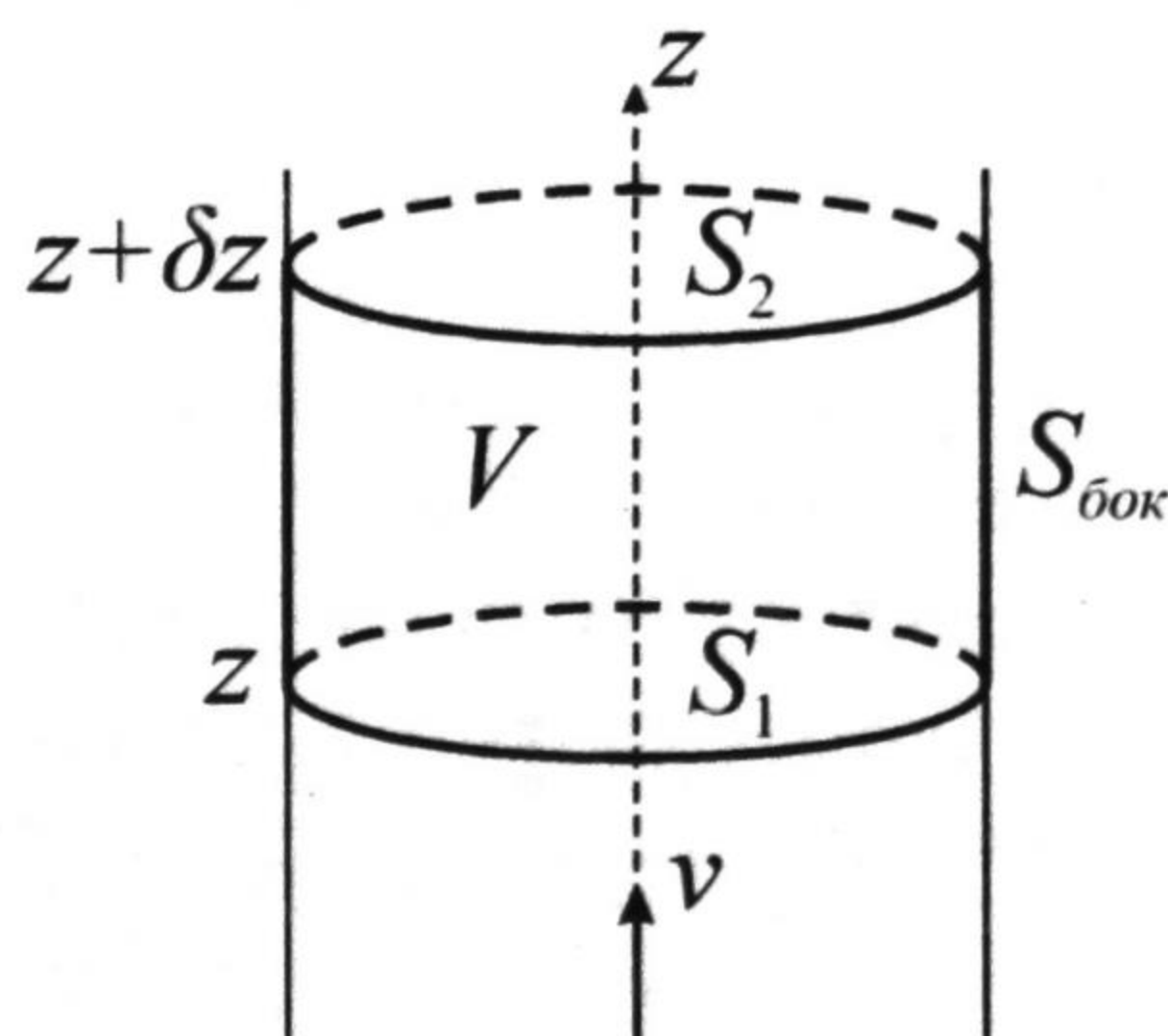


Рис. 1. Выделенный элемент трубы объемом  $V$

Запишем интегральное уравнение баланса массы для жидкой фазы рассматриваемого неподвижного объема (рис. 1):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_l dV = \int_{S_1} \rho_l(z, t) v_l(z, t) dS - \int_{S_2} \rho_l(z + \delta z, t) v_l(z + \delta z, t) dS - \int_V (J^{lg} + J^{ls}) dV, \quad (1)$$

$$\rho_l = \rho_l^0 (1 - \alpha), \quad \rho_g = \rho_g^0 \alpha.$$

Здесь  $\rho_i$ ,  $v_i$  ( $i = l, g$ ) — соответственно приведенная плотность и скорость  $i$ -й фазы;  $J^{lg}$  и  $J^{ls}$  — соответственно интенсивности газовыделения и твердых отложений в единице объема смеси и в единицу времени;  $\rho_i^0$  ( $i = l, g$ ) — истинная плотность  $i$ -й фазы;  $\alpha$  — объемное газосодержание. Здесь и далее нижние индексы  $l$  или  $g$  приписаны к параметрам, относящимся соответственно к жидкой или газовой фазам.

Применяя теорему о среднем к каждому из интегралов уравнения (1), разделив полученное выражение на  $\delta z$ , и, устремив  $\delta z$  к нулю, имеем:

$$\frac{\partial \rho_l S}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l v_l S}{\partial z} = -(J^{lg} + J^{ls}) S. \quad (2)$$

Учитывая, что при неизменных внешних условиях, определяющих режим эксплуатации системы «скважина-пласт», нестационарные процессы тепло- и массопереноса относительно кратковременны [5], [6], можно считать, что термо- и гидродинамический режимы работы скважины являются квазистационарными. При этом уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial \rho_i v_i S}{\partial z} = -(J^{lg} + J^{ls}) S \text{ или с учетом, что } m_i = \rho_i v_i S (i = l, g):$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial z} = -(J^{lg} + J^{ls}) S, \quad (3)$$

где  $m_i (i = l, g)$  — массовый расход  $i$ -ой фазы.

Аналогично выведем уравнение баланса массы для газовой фазы:

$$\frac{\partial m_g}{\partial z} = J^{lg} S. \quad (4)$$

Суммируем полученные уравнения для жидкой (3) и газовой (4) фаз, пренебрегая изменением массы за счет твердых отложений ( $J^{ls} \approx 0$ ), получим уравнение сохранения массы для двухфазной смеси:

$$\frac{\partial m_l}{\partial z} + \frac{\partial m_g}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial z} = 0 \Rightarrow m_l + m_g = m = const. \quad (5)$$

Для наиболее полного учета межфазных массообменных процессов и связанных с ними теплофизических явлений примем, что газожидкостная смесь состоит из трех компонент: тяжелой, средней и легкой. Тяжелая компонента содержится только в жидкой фазе и является предшественницей твердой фазы. Средняя компонента может содержаться как в жидкой фазе, так и в газовой фазе, в виде паров жидкости. Парциальное давление средней компоненты в газовой фазе, ее концентрация в жидкой фазе и текущая температура удовлетворяют условию фазового равновесия. Легкая компонента может присутствовать и в жидкой, и в газовой фазах. В дальнейшем индексами в скобках ( $H$ ), ( $M$ ) и ( $L$ ) будут снабжены параметры, относящиеся к тяжелой, средней и легкой компонентам, соответственно.

Запишем уравнения масс для компонент, полученные аналогично уравнению (2):

$$\frac{\partial \rho_{l(H)} v_{l(H)} S}{\partial z} = -J_{(H)}^{ls} S, \quad \frac{\partial \rho_{l(M)} v_{l(M)} S}{\partial z} = -J_{(M)}^{lg} S, \quad \frac{\partial \rho_{l(L)} v_{l(L)} S}{\partial z} = -J_{(L)}^{lg} S, \quad (7)$$

$$\left( J_{(H)}^{ls} = J^{ls}, \quad J_{(M)}^{lg} + J_{(L)}^{lg} = J^{lg} \right),$$

$$\frac{\partial \rho_{g(M)} v_{g(M)} S}{\partial z} = J_{(M)}^{lg} S, \quad \frac{\partial \rho_{g(L)} v_{g(L)} S}{\partial z} = J_{(L)}^{lg} S, \quad (8)$$

$$\left( \begin{array}{l} \rho_{i(j)} v_{i(j)} S = m_{i(j)} = k_{i(j)} m_i, \\ \sum_j k_{i(j)} = 1 \quad (i = l, g; j = H, M, L), \quad k_{g(M)} + k_{g(L)} = 1. \end{array} \right)$$

Здесь  $\rho_{i(j)}$ ,  $v_{i(j)}$  ( $i = l, g; j = H, M, L$ ) — соответственно приведенная плотность и скорость  $j$ -ой компоненты в  $i$ -ой фазе;  $J_{(M)}^{lg}$  и  $J_{(L)}^{ls}$  — соответственно интен-

сивности испарения жидкой фазы и выделения растворенного в жидкости газа;  $m_{i(j)}$ ,  $k_{i(j)}$  ( $i = l, g; j = H, M, L$ ) — соответственно массовые расход и концентрация в  $i$ -ой фазе  $j$ -ой компоненты. Просуммировав уравнения (7) и (8), при этом пренебрегая изменением массы за счет твердых отложений ( $J^{ls} \approx 0$ ), можно получить уравнение сохранения массы смеси (5).

Получим уравнение сохранения массы легкой компоненты путем сложения уравнений из (7) и (8), содержащих параметры, относящиеся к легкой компоненте:

$$\frac{\partial \rho_{l(L)} v_{l(L)} S}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{g(L)} v_{g(L)} S}{\partial z} = \frac{\partial m_{l(L)}}{\partial z} + \frac{\partial m_{g(L)}}{\partial z} = \frac{\partial m_{(L)}}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$m_{l(L)} + m_{g(L)} = m_{(L)} = \text{const} \text{ или } k_{l(L)} m_l + k_{g(L)} m_g = m_{(L)} = \text{const}. \quad (9)$$

Используя соотношения (5) и (9), выразим массовые расходы фаз в виде:

$$m_l = \frac{m k_{g(L)} - m_{(L)}}{k_{g(L)} - k_{l(L)}}, \quad m_g = \frac{m_{(L)} - m k_{l(L)}}{k_{g(L)} - k_{l(L)}}.$$

Общая приведенная скорость смеси  $W$  и объемное расходное газосодержание  $\varphi$  могут быть выражены следующим образом:

$$W = \frac{1}{S} \left( \frac{m_l}{\rho_l^0} + \frac{m_g}{\rho_g^0} \right), \quad \varphi = \left( 1 + \frac{\rho_g^0 m_l}{\rho_l^0 m_g} \right)^{-1},$$

$$\varphi = W_g / W, \quad W = W_l + W_g, \quad W_l = v_l (1 - \alpha), \quad W_g = v_g \alpha,$$

где  $W_l$ ,  $W_g$  — приведенные скорости жидкой и газовой фаз, соответственно.

Структура потока определяется по формуле для пограничной области между пузырьковым и снарядным течениями [7]:

$$W_l \geq 3W_g - 1,15 \left( \frac{g(1/\rho_g^0 - 1/\rho_l^0)\sigma/\rho_l^0}{1/\rho_g^0} \right)^{1/4},$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение на границе «жидкость-газ». Если выполняется данное соотношение, то считаем, что поток имеет пузырьковую структуру, иначе — снарядную.

Объемное газосодержание зададим эмпирическими формулами в зависимости от структуры потока:

$$\alpha = \frac{\varphi}{1,2 + 1,53 Fr^{-0,5} \left( \sigma / 4g(\rho_l^0 - \rho_g^0) R^2 \right)^{0,25}} \text{ — пузырьковая,}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{1,2 + 0,35 Fr^{-0,5}} \text{ — снарядная,}$$

где  $Fr = \rho_l^0 W^2 / [2g(\rho_l^0 - \rho_g^0)R]$  — число Фруда;  $g$  — ускорение свободного падения.

Сжимаемостью жидкой фазы будем пренебрегать:  $\rho_l^0 = \text{const}$ .

Истинная плотность газовой фазы определяется из выражения:

$$\rho_g^0 = \frac{p}{T \left( R_{(M)} (1 - k_{g(L)}) + R_{(L)} k_{g(L)} \right)},$$

где  $T$  — температура;  $R_{(M)}$ ,  $R_{(L)}$  — газовые постоянные для паров жидкости и для легкой компоненты соответственно.

Общее давление газовой фазы складывается из парциальных давлений паров жидкости  $p_{(M)}$  и легкой компоненты  $p_{(L)}$ :

$$p = p_{(M)} + p_{(L)}.$$

Положим, что парциальное давление паров жидкости равно значению давления насыщения при текущей температуре и аппроксимируется следующей функцией:

$$p_{(M)} = p_{(M)}(T) = p_* \exp(-T_* / T),$$

где  $p_*$  и  $T_*$  — эмпирические аппроксимационные параметры.

Для зависимости парциального давления легкой компоненты от ее массовой концентрации в жидкой фазе примем закон Генри:

$$p_{(L)} = G_{(L)} k_{l(L)},$$

где  $G_{(L)}$  — константа Генри.

Уравнение сохранения импульсов для двухфазной смеси имеет вид (вывод данного уравнения не приведен вследствие ограниченного объема статьи):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -F_w - \rho g \quad (\rho = \rho_l + \rho_g). \quad (10)$$

Силу трения между потоком и стенкой трубы зададим выражением:

$$F_w = \frac{\lambda_w \rho W^2}{2R}, \quad \lambda_w = \lambda_0 \psi,$$

где  $\lambda_0$  — коэффициент гидравлического сопротивления;  $\psi$  — поправка на структуру потока. При пузырьковой структуре потока поправка  $\psi=1$ , при снарядной:

$$\psi = \frac{1}{1 - \varphi} \left\{ 1 - 0,78\varphi \left[ 1 - \exp(-2,2\sqrt{Fr}) \right] - 0,22\varphi \left[ 1 - \exp\left(1 - \frac{15\rho_l^0}{\rho_g^0}\right) \right] \right\}.$$

Для определения коэффициента гидравлического сопротивления воспользуемся формулой Черчилля [7]:

$$\lambda_0 = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + (C + D)^{-3/2} \right]^{1/12},$$

$$C = \left\{ 2,457 \ln \left[ \frac{1}{(7/Re)^{0,9} + 0,135\epsilon/R} \right] \right\}^{16}, \quad D = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}, \quad Re = \frac{2R\rho W}{\mu},$$

где  $Re$  — число Рейнольдса;  $\varepsilon$  — средний размер шероховатости стенки трубы;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости смеси.

Уравнение притока тепла принято в виде [8]:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\left( \frac{m_g}{\rho_g^0} + \frac{A_l}{G_{(L)}} - \frac{A_g \cdot B}{B' p} \right) \frac{\partial p}{\partial z} - 2\pi R q_w}{mc + \frac{A_l p'_{(M)}}{G_{(L)}} - \frac{A_g p'_{(M)}}{B' p}}, \quad (11)$$

$$A_l = m_l \left( L_{(L)} - L_{(M)} + L_{(LM)} \right), \quad A_g = m_g L_{(LM)},$$

$$L_{(LM)} = \frac{L_{(L)} k_{l(L)} + L_{(M)} (1 - k_{l(L)})}{k_{g(L)} - k_{l(L)}}, \quad mc = m_l c_l + m_g c_g,$$

$$B = \frac{R_{(M)} (1 - k_{g(L)})}{R_{(M)} (1 - k_{g(L)}) + R_{(L)} k_{g(L)}}, \quad B' = - \frac{R_{(M)} R_{(L)}}{\left( R_{(M)} (1 - k_{g(L)}) + R_{(L)} k_{g(L)} \right)^2},$$

$$mc = m_l c_l + m_g c_g, \quad p'_{(M)} = p_{(M)} T_* / T^2.$$

Здесь  $q_w$  — интенсивность теплообмена между потоком и стенкой трубы;  $L_{(M)}$  и  $L_{(L)}$  — удельные теплоты испарения жидкой фазы и выделения растворенной в жидкости легкой компоненты, соответственно;  $c_i$  ( $i=l, g$ ) — удельная теплоемкость  $i$ -ой фазы при постоянном давлении.

Для массовых концентраций легкой компоненты в жидкой и газовой фазах можно записать следующие соотношения:

$$k_{l(L)} = \frac{p - p_{(M)}(T)}{G_{(L)}}, \quad k_{g(L)} = \left( 1 + \frac{R_{(L)} \cdot p_{(M)}(T)}{R_{(M)} (p - p_{(M)}(T))} \right)^{-1}. \quad (12)$$

При математическом описании работы скважины с установкой электроцентробежных насосов (УЭЦН) примем следующие допущения: характерными размерами насоса можно пренебречь по сравнению с длиной скважины ( $L \ll H$ ), а используемые параметры при прохождении через УЭЦН испытывают скачок.

Зависимость изменения давления  $\Delta p$  от массового расхода газожидкостной смеси  $m$  можно принять в виде:

$$\Delta p = A_0 + A_1 \cdot m + A_2 \cdot m^2, \quad (13)$$

где  $A_0, A_1, A_2$  — коэффициенты полинома, которые находятся из технической характеристики установки.

Скачок температуры газожидкостного потока вследствие прохода через УЭЦН определяется из выражения:

$$\Delta T = T_1 B_3 + B_2 B_3 / B_1, \quad (14)$$

$$B_1 = -2\pi (R_0 \beta_d + R_c \beta), \quad B_2 = 2\pi (R_0 \beta_d T_d + R_c \beta T_0^{(l)}), \quad B_3 = \exp\left(\frac{B_1 L}{mc}\right) - 1,$$

$$T_d = \frac{N - \frac{m}{\rho} \Delta p + 2\pi R_0 \frac{\beta_d}{B_1} \left[ mcT_1 B_3 + 2\pi R_c \beta T_0^{(1)} (mc B_3 / B_1 - L) \right]}{2\pi R_0 \beta_d \left[ L + 2\pi R_0 \beta_d (L - mc B_3 / B_1) / B_1 \right]}$$

Здесь  $T_1$  — температура потока перед УЭЦН,  $T_d$  — температура двигателя центробежного электронасоса;  $\beta$  и  $\beta_d$  — коэффициенты теплопередачи, соответственно через систему труб скважины и между газожидкостным потоком и двигателем;  $T_0^{(1)}$  — геотермальная температура;  $L$  — длина двигателя.

Для эффективной работы УЭЦН необходимо, чтобы на приеме установки существовала пузырьковая структура потока.

Уравнения (10)-(12) представляют собой систему, на основе которой можно определить изменение давления, температуры и массовых концентраций компонент по высоте вертикального канала (нефтегазовой скважины). При этом необходимо задать начальные условия: массовый расход смеси (дебит скважины), массовый расход легкой компоненты (газовый фактор), начальные температуру и давление (температура и давление на забое скважины). Учет влияния УЭЦН на параметры газожидкостного потока в вышеприведенной системе можно осуществить с помощью уравнений (13) и (14).

На основе представленной математической модели был разработан программный продукт, который позволяет проводить численные эксперименты по нахождению основных параметров двухфазного потока по высоте скважины при работе различных типов насосов и их месторасположения.

На рис. 2 приведен пример расчета по данной программе. При этом использованы следующие значения параметров:  $m = 0,58$  кг/с;  $m_{(L)} = 0,036$  кг/с;  $R_0 = 0,0315$  м;  $H = 3000$  м;  $p_b = 35$  МПа;  $p_f = 30$  МПа;  $T_f = 375$  К;  $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-5}$  м;  $\rho_l^0 = 850$  кг/м<sup>3</sup>;  $R_{(M)} = 52$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup>·К);  $R_{(L)} = 520$  м<sup>2</sup>/(с<sup>2</sup>·К);  $\lambda_l = 0,13$  Вт/(м·К);  $c_l = 2100$  м<sup>2</sup>/(с<sup>3</sup>·К);  $c_g = 2500$  м<sup>2</sup>/(с<sup>3</sup>·К);  $L_{(M)} = 2,3 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $L_{(L)} = 10^4$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $M_p = 0,58$  кг/с. Здесь  $p_b$  — пластовое давление;  $p_f$  и  $T_f$  — давление и температура потока на забое скважины;  $M_p$  — массовый расход УЭЦН.

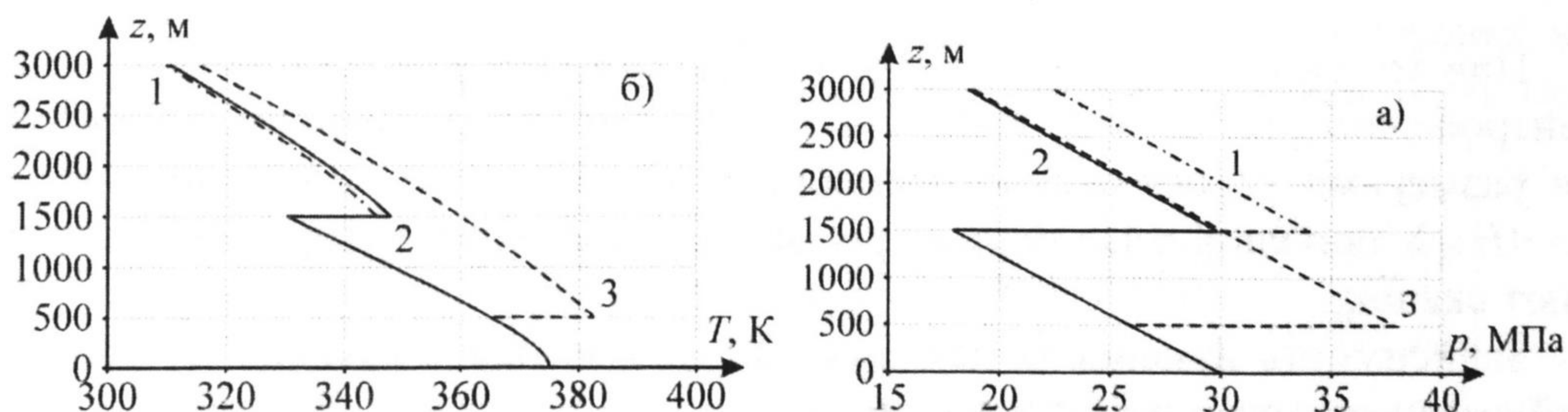


Рис. 2. Распределение по высоте скважины давления (а) и температуры (б).  
Кривая 1 соответствует УЭЦН5А-100-1350 ( $H_p = 1500$  м); кривая 2 — УЭЦН-160-1100 ( $H_p = 1500$  м); кривая 3 — УЭЦН-160-1100 ( $H_p = 2500$  м).

$H_p$  — глубина подвески установки

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.
2. Архангельский В.А., Аузбаев Д.Г., Башкиров А.И. и др. Исследование движения газонефтяных смесей в фонтанирующих скважинах // Инж. журнал. 1962. Т. 2. Вып. I. С. 55-68.

3. Кланчук О.В. Гидравлические характеристики ГЖП в скважинах // Газовая промышленность. 1981. № 2. С. 35-38.
4. Копше Н.М., Корнилов Г.Г. Оценка предельного содержания газа в двухфазном потоке с пузырьковой структурой. // Изв. вузов. Нефть и газ. 1981. №7. С. 50-58.
5. Архангельский В.А.. Движение газированных нефтей в системе «скважина-пласт». М.: Изд-во АН СССР. 1958. 92 с.
6. Пудовкин М.А., Саламатин А.Н., Чугунов В.А. Температурные процессы в действующих скважинах. Казань: Изд-во Казанского университета, 1977. 168 с.
7. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках: Пер. с англ. М.: Недра, 1986. 204 с.
8. Shagapov, V.Sh., Musakaev, N.G., Khabeev, N.S., Bailey, S.S. Mathematical modelling of two-phase flow in a vertical well considering paraffin deposits and external heat exchange // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 47, No.4. Pp. 843-851.

*Александр Анатольевич ВАКУЛИН —  
декан физического факультета,  
доктор технических наук, профессор  
avakulin@utmn.ru*

*Евгений Александрович ХАМОВ —  
аспирант кафедры механики многофазных систем  
Тюменский государственный университет*

УДК 532.575.2

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СТЕНД ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

### **EXPERIMENTAL STAND FOR STUDYING OF THE MULTIPHASE STREAMS CURRENT AT VARIOUS TEMPERATURES**

*АННОТАЦИЯ. В работе описан созданный на кафедре механики многофазных систем ТюмГУ экспериментальный стенд для исследования многофазных потоков. На базе созданного проливного стенда можно разрабатывать, испытывать и поверять и одно и многофазные расходомеры.*

*SUMMARY. The present paper describes the experimental device for investigation of multiphase flows, created by the department of Multiphase Systems Mechanics at Tyumen State University. Development, testing and verification of single and multiphase flow can be conducted on the basis of established stands.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Измерительный стенд, многофазные потоки, расходомеры.*

*KEY WORDS. The measuring stand, multiphase streams, flowmeters.*

В связи с энергосбережением в последние десятилетия обострилась проблема учета теплоэнергоресурсов, в частности, горячей воды, нефти и газа, которые широко используются практически во всех промышленных и коммунально-бытовых отраслях России. Поэтому необходимо широкое внедрение соответствующих средств измерений, а также устройства для их испытаний и проведения допускового контроля, в частности, поверки средств измерений [1].