

**Дмитрий Евгеньевич ИГОШИН** —  
мл. научный сотрудник  
Тюменского филиала Института теоретической  
и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН,  
кандидат физико-математических наук  
timms@tmn.ru

УДК 536.37

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СУШКИ ВЛАЖНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА\*

### SIMULATION OF DRYING WET POROUS MEDIUM WITH ACCOUNT OF CONVECTIVE TRANSPORT

*АННОТАЦИЯ.* Представлена система уравнений, описывающих тепло- и массоперенос при сушке пористой среды в конвективном и диффузионном приближении. Приведены оценки влияния конвективного переноса на динамику процесса.

*SUMMARY.* The article presents the system of equations describing heat and mass transfer in drying of the porous medium convection and diffusion approximation. The estimations of the influence of convection on the process dynamics are given.

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.* Пористая среда, конвективный перенос, автомодельная задача

*KEY WORDS.* Porous environment, convective transfer, automodelling problem.

#### 1. Основные уравнения

Сушка широко распространена во многих технологических процессах, поэтому развитие теоретических моделей, описывающих тепломассоперенос при этом, является актуальным. Примем следующие допущения. Будем полагать, что температура пористой среды и насыщающей парогазоводяной смеси в каждой точке совпадают, скелет пористой среды несжимаем и неподвижен, т.е. усадкой материала пренебрегаем. Испарение происходит полностью внутри пор, транспорт влаги происходит в газофазном режиме, а жидкая фаза неподвижна. В этом случае можно пренебречь гидравлическим сопротивлением пористой среды и фильтрационным переносом [1].

На проницаемой границе пористой среды, содержащей в исходном состоянии жидкость, действует тепловой источник и поддерживается заданная концентрация водяного пара (рис. 1). Вследствие испарения жидкости в пористой среде могут возникать характерные зоны: сухая, не содержащая воду в жидком виде, и влажная, с объемным влагосодержанием  $S_1$ , разделенные подвижной границей  $x_{(s)}$ .

В рамках принятых допущений уравнение неразрывности для воды и пара примет вид

$$\frac{\partial (m(1 - S_1)\rho_v + mS_1\rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial (m(1 - S_1)\rho_v v_v)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

\* Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (Грант НШ-4381.2010.1).



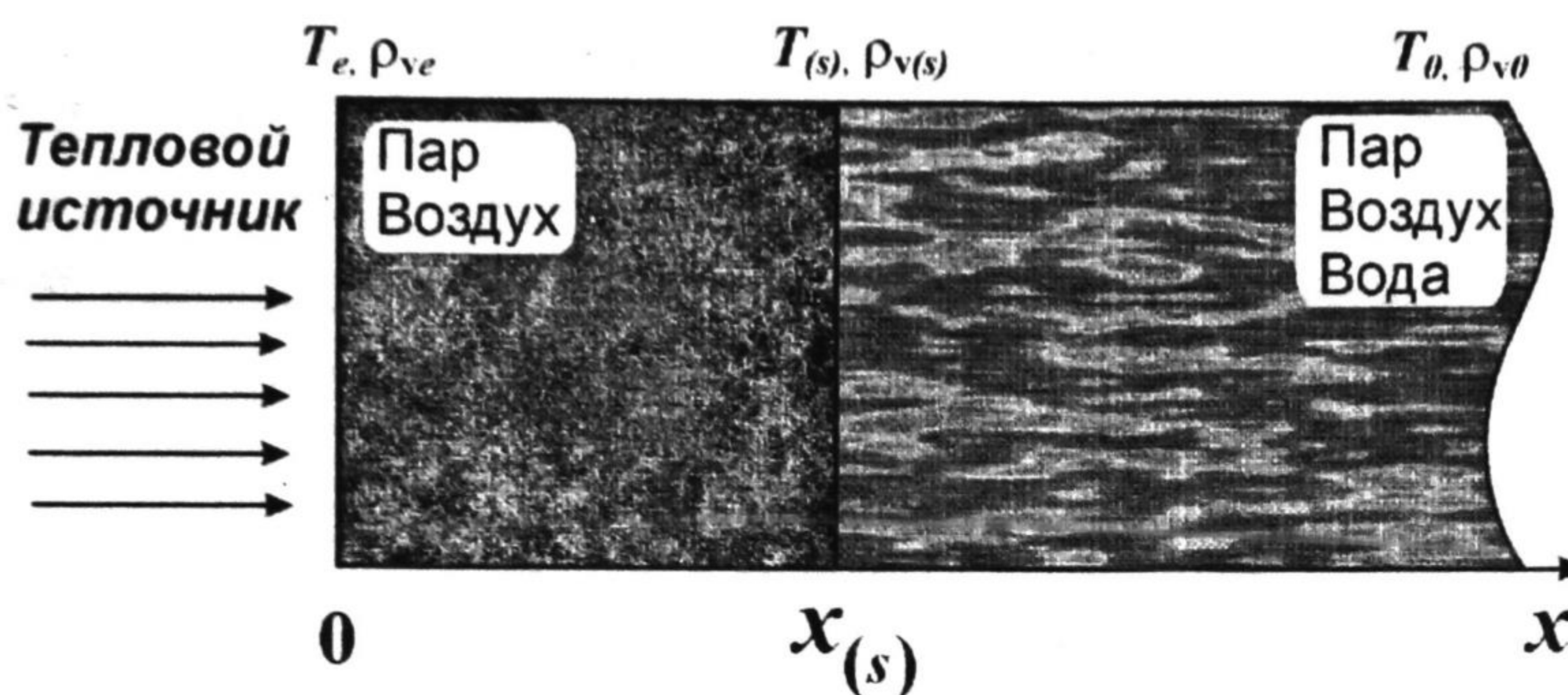


Рис. 1. Геометрия задачи

уравнение неразрывности для воздуха

$$\frac{\partial(m(1-S_1)\rho_a)}{\partial t} + \frac{\partial(m(1-S_1)\rho_a v_a)}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

где  $m$  — пористость,  $m(1-S_1)$  — «живая» пористость,  $S_1$  — объемное влаго-содержание в порах, нижние индексы  $l, v, a, m$  здесь и далее соответствуют воде (*liquid* — жидкость), пару (*varor*), воздуху (*air*) и пористому материалу (*material*),  $\rho_i$  ( $i = l, v, a$ ),  $v_i$  — плотности и скорости фаз.

Для описания процесса переноса газовой фазы запишем следующие кинематические соотношения: газ представляет собой паровоздушную смесь

$$\rho_g = \rho_v + \rho_a, \tag{1.3}$$

поток массы складывается из потоков пара и воздуха [2]

$$\rho_g v_g = \rho_v v_v + \rho_a v_a, \tag{1.4}$$

свяжем относительные скорости фаз и среднемассовую скорость газа:

$$v_v = v_g + w_v, \quad v_a = v_g + w_a. \tag{1.5}$$

Закон Фика для пара примем в виде

$$\rho_v w_v = -D \frac{\partial \rho_v}{\partial x}, \tag{1.6}$$

из (1.3) — (1.6) следует

$$\rho_v v_v = \rho_v v_g - D \frac{\partial \rho_v}{\partial x}, \quad \rho_a v_a = \rho_a v_g + D \frac{\partial \rho_v}{\partial x}. \tag{1.7}$$

Уравнение теплового баланса запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + m(1-S_1)\rho_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + mL\rho_l \frac{\partial S_1}{\partial t}, \tag{1.8}$$

$$\rho c = (1-m)\rho_m c_m + m\rho_l c_l S_1, \quad \lambda = (1-m)\lambda_m + m\lambda_l S_1.$$

Здесь  $T$  — температура,  $\square c$  — удельно-объемная теплоемкость,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности системы "пористая среда — вода",  $L$  — удельная теплота парообразования воды,  $\rho_i c_i, \lambda_i$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности фаз ( $i = g, m, l$ ). Последнее слагаемое в (1.8) соответствует тепловому эффекту фазовых переходов.



Будем решать задачу в гомобаричном приближении: суммарное давление парогазовой смеси  $p$ , состоящее из парциальных давлений пара  $p_v$  и воздуха  $p_a$  однородно. Причем каждая из компонент (пар и воздух) является калорически совершенной, для них примем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$p_v = \rho_v \frac{R}{\mu_v} T, \quad p_a = \rho_a \frac{R}{\mu_a} T, \quad p = p_v + p_a = \text{const}, \quad (1.9)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\rho_i$ ,  $\mu_i$  ( $i = v, a$ ) — парциальные плотности и молярные массы компонент. Нижние индексы  $v$  и  $a$  соответствуют пару и воздуху.

Во влажной зоне фазовые переходы происходят в равновесном режиме, т.е. парогазовая смесь находится при точке росы, поэтому парциальное давление пара  $p_v$  равно давлению насыщенного пара  $p_s(T)$ , соответствующего текущей температуре  $T$  ( $p_v = p_s(T)$ ). Эту зависимость будем искать из уравнения Клапейрона—Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(\rho_v^{-1} + \rho_a^{-1})},$$

откуда, при условии  $\rho_v \ll \rho_a$ , температура  $T$  и давление  $p$  во влажной зоне и на подвижной границе связаны соотношением

$$p(T) = p_* \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right) \quad (x_{(s)} \leq x < \infty), \quad (1.10)$$

где  $T_*$  и  $p_*$  — эмпирические параметры, определяемые на основе табличных данных для температуры насыщения от давления. Здесь и далее нижний индекс  $(s)$  выражает значения параметров на границе сухой и влажной зон. Тогда во влажной зоне парциальные плотности пара и воздуха однозначно определяются через текущую температуру  $T$

$$\rho_v = \frac{\mu_v p_*}{RT} \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right), \quad \rho_a = \frac{\mu_a}{RT} \left( p - p_* \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right) \right). \quad (x_{(s)} \leq x < \infty) \quad (1.11)$$

В связи с тем, что в рассматриваемых зонах вода может находиться в различных агрегатных состояниях, то приведенные выше уравнения необходимо дополнить соотношениями на границе зон ( $x = x_{(s)}$ ), следующими из условий баланса массы для воды и пара, воздуха, а также условия теплового баланса. Учтем, что на этой границе, наряду с потоком массы терпит скачок тепловой поток, определяемый градиентом температур:

$$\begin{aligned} \rho_g (1 - S_{l(s)}) (v_g^+ - \dot{x}_{(s)}) - \rho_g (v_g^- - \dot{x}_{(s)}) &= \rho_l S_{l(s)} \dot{x}_{(s)}, \quad \dot{x}_{(s)} = \frac{dx_{(s)}}{dt}, \\ \rho_v (1 - S_{l(s)}) (v_v^+ - \dot{x}_{(s)}) - \rho_v (v_v^- - \dot{x}_{(s)}) &= \rho_l S_{l(s)} \dot{x}_{(s)}, \\ \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(s)}^+ + \rho_g c_g v_g^+ T - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(s)}^- - \rho_g c_g v_g^- T &= mL \rho_l S_{l(s)} \dot{x}_{(s)}. \end{aligned} \quad (1.12)$$



Пусть в исходном состоянии пористая среда содержит жидкость с объемным влагосодержанием  $S_{i0}$  и находится при температуре  $T_0$ . Внутрипоровое давление будем полагать равным атмосферному. На границе ( $x = 0$ ) пористая среда начинает обдуваться паровоздушной смесью с температурой  $T_c$  и парциальной плотностью пара  $\rho_{ve}$ .

С учетом вышеотмеченного начальные и граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} S_1 = S_{i0}, T = T_0, v_g = 0, & \quad (x \geq 0, t = 0) \\ \rho_v = \rho_{ve}, T = T_c & \quad (x = 0, t > 0) \end{aligned} \tag{1.13}$$

## 2. Постановка автомодельной задачи

Будем искать автомодельное решение данной задачи. Введем автомодельную переменную и безразмерную скорость

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}, V(\xi) = v_g \sqrt{\frac{t}{\kappa}}, \kappa = \frac{\lambda}{\rho c},$$

где  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности системы.

Тогда уравнения (1.1), (1.2) (1.8) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{2\kappa} \frac{d^2 \rho_v}{d\xi^2} &= (V - \xi) \frac{d\rho_v}{d\xi} + \rho_v \frac{dV}{d\xi} - \frac{\xi \rho_1}{1 - S_1} \frac{dS_1}{d\xi}, \quad \rho_v = \frac{\mu_v p_*}{RT} \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right), \\ \frac{D}{2\kappa} \frac{d^2 \rho_v}{d\xi^2} &= (V - \xi) \left( \frac{\mu_a p}{RT^2} \frac{dT}{d\xi} + \frac{\mu_a}{\mu_v} \frac{d\rho_v}{d\xi} \right) - \rho_a \frac{dV}{d\xi}, \quad (0 < \xi < \xi_{(s)}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} = 2 \left( \left( \frac{m(1 - S_1) \rho_g c_g}{\rho c} V - \xi \right) \frac{dT}{d\xi} + \frac{m \xi \rho_1 L}{\rho c} \frac{dS_1}{d\xi} \right).$$

$$\frac{D}{2\kappa} \frac{d^2 \rho_v}{d\xi^2} = (V - \xi) \frac{d\rho_v}{d\xi} + \rho_v \frac{dV}{d\xi} - \frac{\xi \rho_1}{1 - S_1} \frac{dS_1}{d\xi}$$

$$\frac{D}{2\kappa} \frac{d^2 \rho_v}{d\xi^2} = (V - \xi) \left( \frac{\mu_a p}{RT^2} \frac{dT}{d\xi} + \frac{\mu_a}{\mu_v} \frac{d\rho_v}{d\xi} \right) - \rho_a \frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} = 2 \left( \left( \frac{m(1 - S_1) \rho_g c_g}{\rho c} V - \xi \right) \frac{dT}{d\xi} + \frac{m \xi \rho_1 L}{\rho c} \frac{dS_1}{d\xi} \right), \quad (\xi_{(s)} < \xi < \infty) \tag{2.2}$$

$$\rho_v = \frac{\mu_v p_*}{RT} \exp\left(-\frac{T_*}{T}\right).$$

На границе сухой и влажной зон ( $\xi = \xi_{(s)}$ ) имеем

$$2m\kappa\rho_g c_g T \left( (1 - S_{1(s)}) V_{(s)}^+ - V_{(s)}^- \right) + \left( \lambda \frac{dT}{d\xi} \right)_{(s)}^+ - \left( \lambda \frac{dT}{d\xi} \right)_{(s)}^- = 2m\kappa\rho_1 l S_{1(s)} \xi_{(s)},$$

$$\rho_g \left( (1 - S_{1(s)}) V_{(s)}^+ - V_{(s)}^- \right) = \rho_1 S_{1(s)} \xi_{(s)}, \tag{2.3}$$

$$2\kappa\rho_v \left( (1 - S_{1(s)}) V_{(s)}^+ - V_{(s)}^- \right) - (1 - S_{1(s)}) \frac{D\rho_v T_*}{T^2} \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(s)}^+ + D \left( \frac{d\rho_v}{d\xi} \right)_{(s)}^- = 2\kappa\rho_1 S_{1(s)} \xi_{(s)}.$$



Граничные условия в автомодельной постановке примут вид

$$\begin{aligned} \rho_v &= \rho_{ve}, \quad T = T_e \quad (\xi = 0) \\ S_1 &= S_{10}, \quad T = T_0, \quad V = 0 \quad (\xi \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, задача об определении полей температуры, скорости и влагосодержания сводится к решению систем уравнений (2.1) и (2.2), удовлетворяющих второй части граничных условий (2.4), а также условиям (2.3) на заранее неизвестной границе  $\xi = \xi_{(s)}$ . Численное решение этой системы осуществляется последовательным применением метода пристрелки, заключающемся в следующем. Начиная с произвольной границы  $\xi_{(s)}$ , температуры  $T_{(s)}$  и скорости  $V_{(s)}$  будем решать задачу Коши для системы уравнений (2.4) при начальных условиях, определяемых из (2.3). Подбор значений  $\xi_{(s)}$ ,  $T_{(s)}$  и  $V_{(s)}$  — будем продолжать до выполнения второго условия (2.4) с заданной точностью. На каждой итерации этого процесса в свою очередь по величинам  $\rho_v(T_{(s)})$ ,  $T_{(s)}$  и  $V_{(s)}$  на границе ( $\xi = \xi_{(s)}$ ) также производится пристрелка путем подбора значений  $(d\rho_v/d\xi)_e$ ,  $(dT/d\xi)_e$  и  $V_e$  на внешней границе ( $\xi = 0$ ) с учетом начально-граничных условий, определяемых из первой части (2.4) для задачи Коши (2.1).

### 3. Анализ решений

На рис. 2 представлены распределения основных величин в пористой среде при сушке холодного материала ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ). Для остальных параметров,

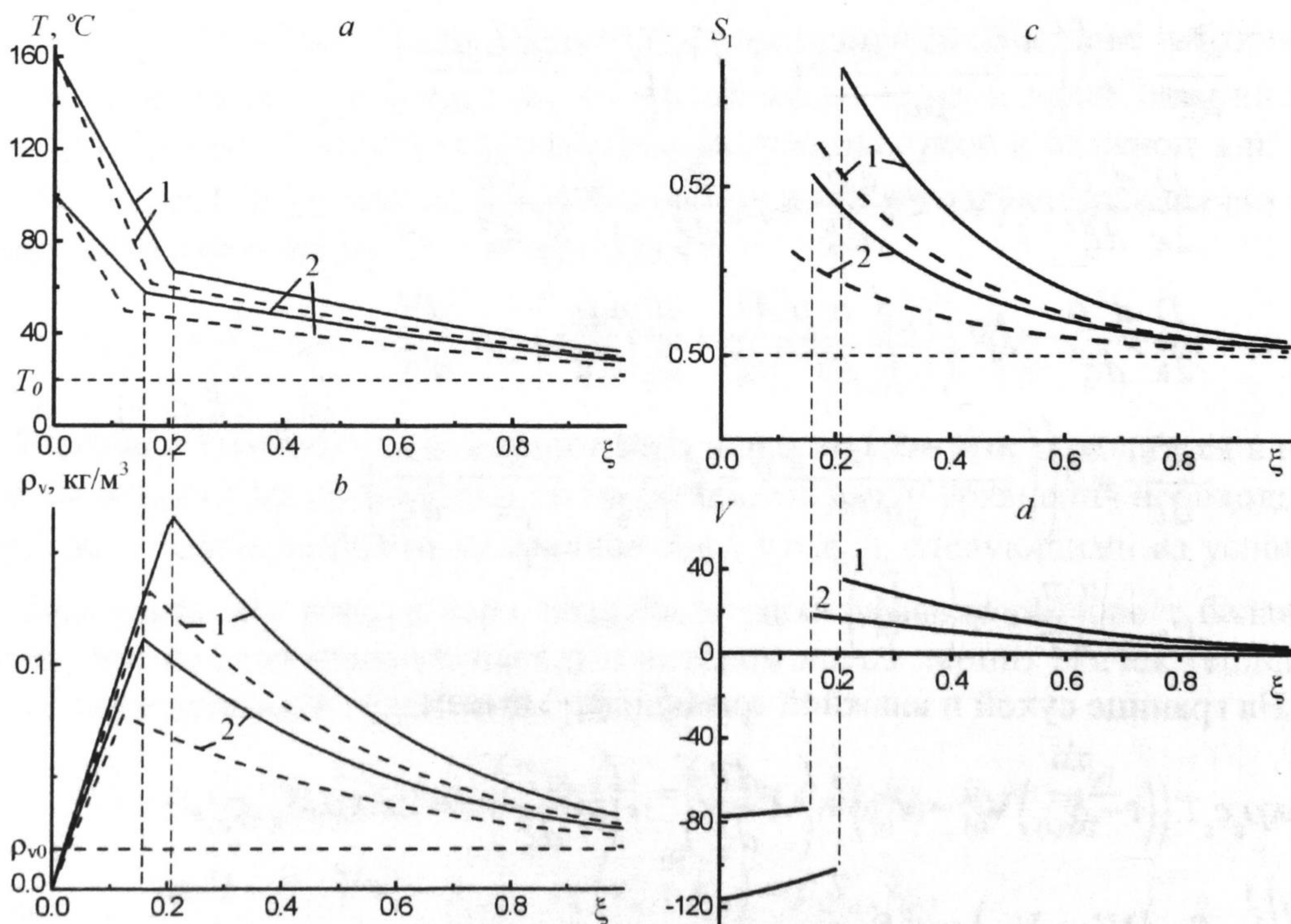


Рис. 2. Сушка холодного материала ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ) сухим воздухом ( $\rho_{ve} = 0$ ) при  $S_{10}=0,5$ . Линии 1, 2 и 3 соответствуют температурам  $T_e=160, 100$  и  $20^\circ\text{C}$ . Здесь и далее решения с учетом конвективного переноса показаны сплошными линиями, в диффузионном приближении — штриховыми



характеризующих исходное состояние пористой среды, здесь и далее приняты следующие значения:  $m=0.5$ ,  $p=0.1$  МПа,  $p^*=1.1 \cdot 10^5$  МПа,  $T^*=5186$  К,  $\rho_l=1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_l=4200$  Дж/(кг К),  $\rho_r=925$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_r=1000$  Дж/(кг К),  $\lambda_r=0.15$  Вт/(м К),  $\lambda_l=0.65$  Вт/(м К),  $L=2.26 \cdot 10^6$  Дж/кг,  $D=3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с [3].

Как видно из рис. 2, конвективный перенос оказывает хоть и заметное, но не решающее влияние на усиление интенсивности процесса сушки влажного пористого материала. Подвижная граница  $\xi_{(s)} = 0.21$  расположена правее, чем в диффузионном приближении  $\xi_{(s)} = 0.17$ , что составляет различие порядка 25%. Максимум влагосодержания также более ярко выражен  $S_{l(s)} = 0.534$  по сравнению с  $S_{l(s)} = 0.525$  в диффузионном приближении. Из рисунка видно, что массовый поток пара с подвижной границы, определяемый его скоростью, направлен в обе стороны.

На рис. 3 представлен режим сушки перегретым паром. Распределение температур, полученное с учетом конвективного переноса, незначительно отличается от распределения в диффузионном приближении. Плотность пара монотонно убывает в сухой зоне, однако поток массы в ней все равно направлен наружу. Вызвано это тем, что плотность воды на 3 порядка выше плотности воздуха, который может поступать в пористую среду на место испарившейся воды. В результате среднемассовый поток газа в сухой зоне практически полностью определяется конвективным переносом пара наружу. Следует отметить, что интенсивность этого переноса существенно ниже, чем с подвижной границы в глубь пористой среды.

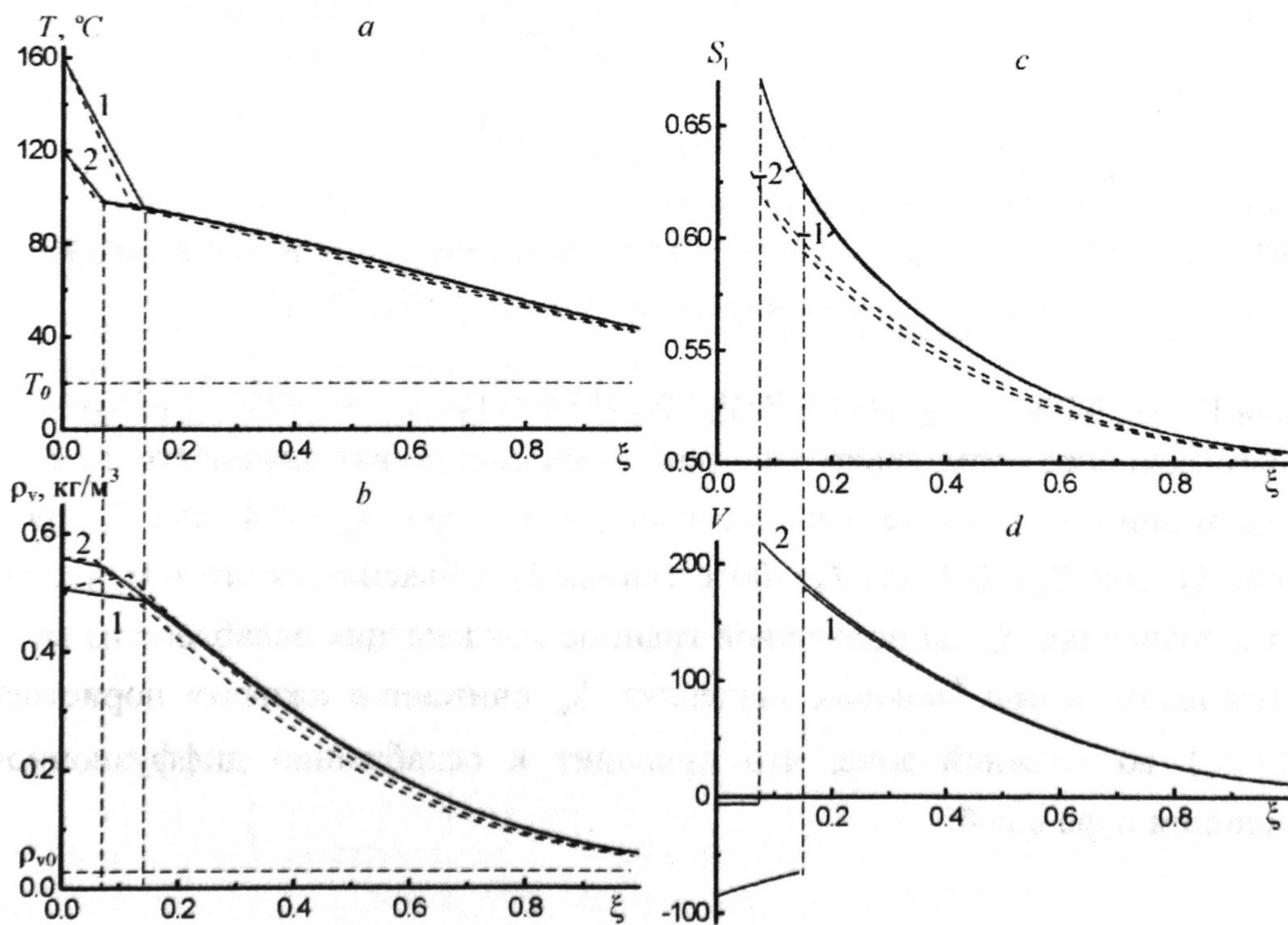


Рис. 3. Сушка холодного материала ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ) чистым паром ( $\rho_w = \rho_s(T_s)$ ) при  $S_{l0}=0.5$ . Линии 1, и 2 соответствуют температурам  $T_s=160$  и  $110^\circ\text{C}$



На рис. 4 с учетом конвективного переноса наблюдается увеличение протяженности сухой зоны и уменьшение влагосодержания среды (линии 1, 2), т.е. происходит интенсификация процесса сушки. При этом вследствие интенсивных фазовых переходов в пористой среде реализуется температурный минимум. При сушке холодным воздухом (линия 3) вблизи подвижной границы происходит переохлаждение пара, поступающего из более глубоких горячих слоев, и частичная его конденсация, что приводит к росту влагосодержания на подвижной границе.

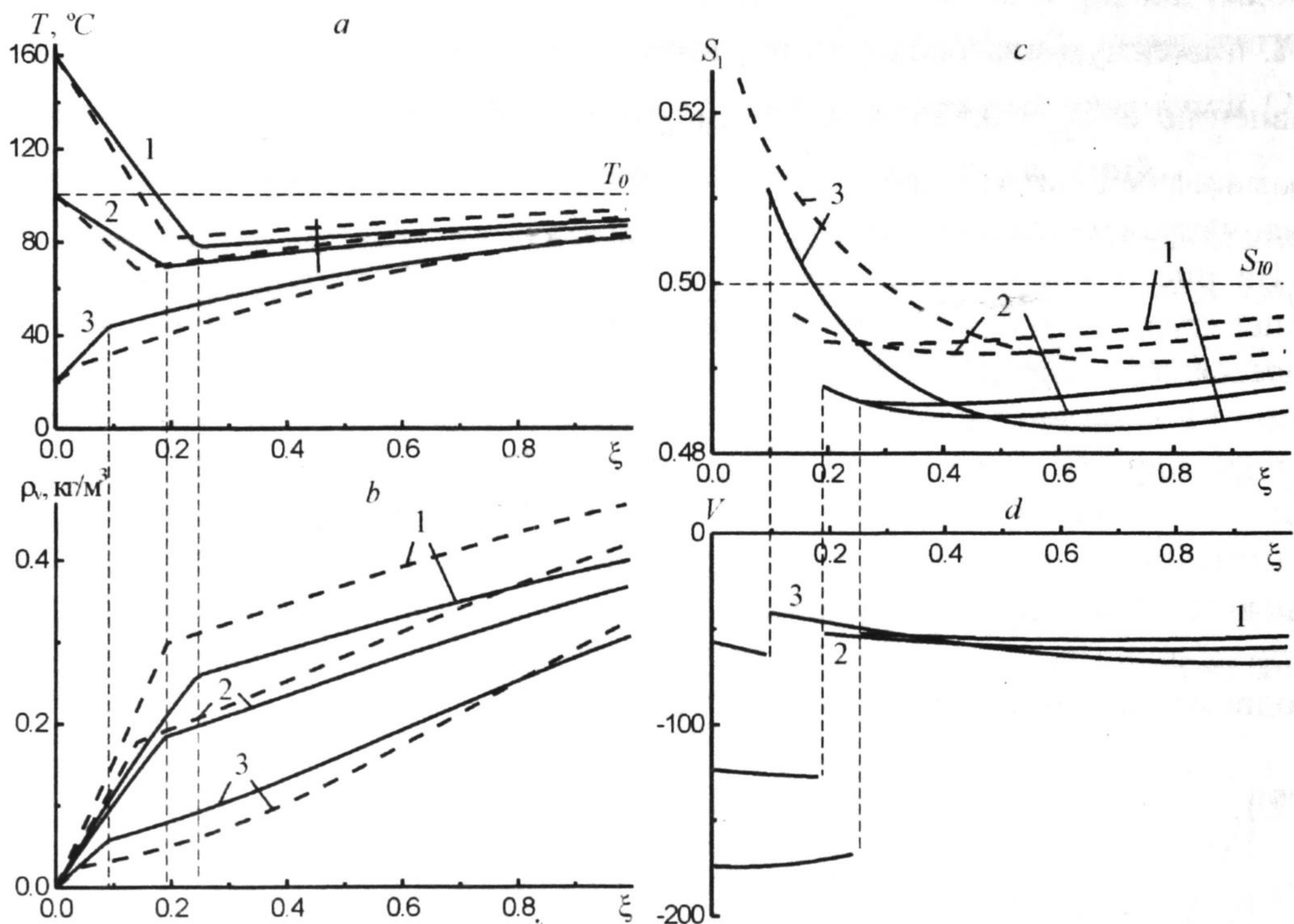


Рис. 4. Сушка горячего материала ( $T_0=100^\circ\text{C}$ ) сухим воздухом ( $\rho_{\text{вс}} = 0$ ) при  $S_{10}=0.5$ .  
Линии 1, 2 и 3 соответствуют  $T_e=160, 100$  и  $20^\circ\text{C}$

Из рис. 5 видно, что координата подвижной границы падает с ростом  $S_{10}$ , причем наиболее интенсивно это происходит при малых значениях  $S_{10}$ . Влагосодержание на границе зон имеет максимум при  $S_{10} \approx 0,4$  для  $T_e=160^\circ\text{C}$  (линия 1), при  $S_{10} \approx 0,3$  для  $T_e=100^\circ\text{C}$  (линия 2). Объясняется это тем, что при малых значениях  $S_{10}$  на подвижной границе конденсация ослаблена из-за нехватки влаги, а при больших значениях  $S_{10}$  снижается «живая» пористость  $m(1-S_1)$  во влажной зоне, что приводит к ослаблению диффузионного транспорта пара в ней.



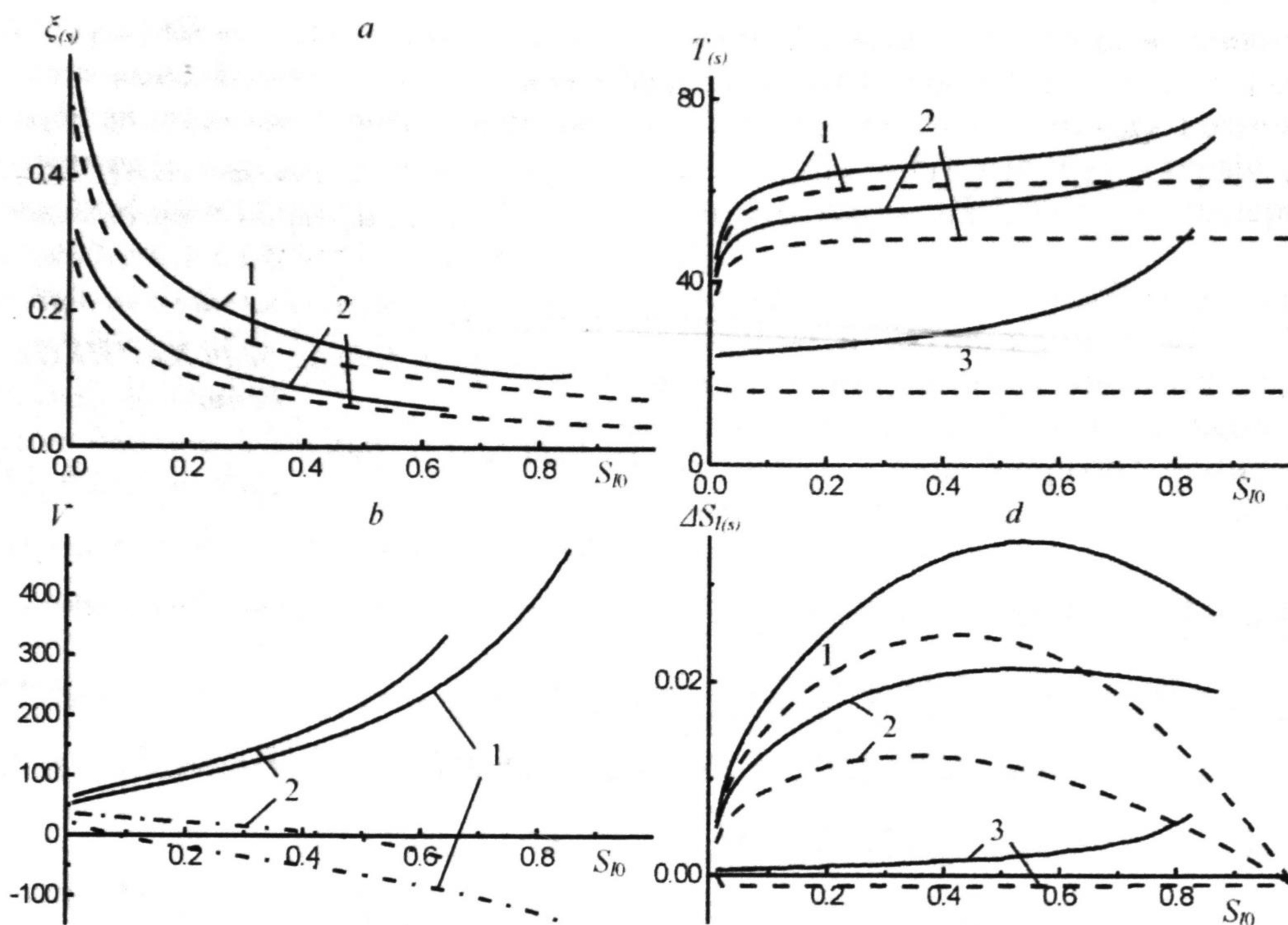


Рис. 5. Зависимость автомодельной координаты (а), скоростей газа справа (сплошная линия) и слева (штрихпунктирная) от подвижной границы (b), температуры на границе влажной зоны (с) и разности объемных влагосодержаний на ней (d) от исходного влагосодержания  $S_{10}$  при различных внешних температурах.  $T_e=160^\circ\text{C}$  (1),  $T_e=100^\circ\text{C}$  (2),  $T_e=20^\circ\text{C}$  (3), всюду плотность пара  $\rho_{ve}=0$  (сухой воздух),  $T_0=20^\circ\text{C}$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильясов У.Р., Игошин Д.Е. Математическое моделирование сушки влажного пористого материала в диффузионном приближении // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15. № 4. С. 689-697.
2. Эккерт Э.Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. Пер. с англ. Под ред. А.В. Лыкова. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961.
3. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.