МАТЕМАТИКА

Александр Юрьевич АЛЕКСАНДРОВ —
зав. кафедрой управления
медико-биологическими системами,
доктор физико-математических наук, профессор
alex43102006@yandex.ru

Алексей Викторович ПЛАТОНОВ —
доцент кафедры управления
медико-биологическими системами,
кандидат физико-математических наук
al-platon1@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный
университет

УДК 531.36

*О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ**

ON THE PRESERVATION OF EQUILIBRIUM POSITIONS STABILITY OF MECHANICAL SYSTEMS UNDER THE EVOLUTION OF POTENTIAL FORCES

АННОТАЦИЯ. Исследуются некоторые классы механических систем с нестационарным параметром при потенциальных силах. Предполагается, что эволюция потенциальных сил приводит к их исчезновению. С помощью прямого метода Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости положений равновесия рассматриваемых систем.

SUMMARY. Certain classes of mechanical systems with non-stationary parameter under the potential forces are investigated. It is assumed that the evolution of potential forces results in their disappearance. By the use of Lyapunov direct method, the conditions of asymptotic stability of equilibrium positions for the systems considered are obtained.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Механические системы, потенциальные силы, устойчивость, нестационарный параметр.

KEY WORDS. Mechanical systems, potential forces, stability, non-stationary parameter.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-08-92208ГФЕН_а).

Введение. Рассмотрим механическую систему, в которой среди действующих сил присутствуют потенциальные силы и которая имеет асимптотически устойчивое положение равновесия. Предположим, что с течением времени потенциальные силы могут эволюционировать, что выражается в появлении при векторе этих сил скалярного множителя $h(t)>0$, заданного при всех $t\geq 0$. Когда можно быть уверенным в том, что асимптотическая устойчивость механической системы сохранится, несмотря на эволюцию диссипативных сил?

На важность проблемы анализа устойчивости систем такого рода было указано в работе [1], при этом отмечалось, что они часто встречаются в приложениях. Данная проблема исследовалась многими авторами (см., например, [1]-[5] и цитируемую там литературу).

Наиболее радикальными и малоизученными являются типы эволюции, приводящие к доминированию или исчезновению потенциальных сил ($h(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ или $h(t)\to 0$ при $t\to+\infty$). В случае неограниченно растущего параметра $h(t)$ некоторые условия сохранения устойчивости положения равновесия получены в работах [1], [5]. Цель настоящей статьи — исследовать случай исчезающих со временем потенциальных сил.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим голономную механическую систему с не зависящими от времени связями, имеющую n степеней свободы. Векторы обобщенных координат и скоростей обозначим соответственно q и $\dot{q}$. Кинетическая энергия такой системы представляется квадратичной формой $T=T(q,\dot{q})=1/2\,\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ с симметричной положительно определенной матрицей $A(q)$ [3]. Будем считать, что матрица $A(q)$ задана и непрерывно дифференцируема при $\|q\|<\rho$ $(0<\rho\leq+\infty)$, и существуют положительные постоянные a_1, a_2, a_3 такие, что для всех $\|q\|<\rho$, $\dot{q}\in E^n$ справедливы неравенства:

$$a_1\|\dot{q}\|^2\leq T(q,\dot{q})\leq a_2\|\dot{q}\|^2, \qquad \left\|\frac{\partial T}{\partial q}\right\|\leq a_3\|\dot{q}\|^2.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Пусть движение системы описывается уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=D(q,\dot{q})-G(t,q,\dot{q})\dot{q}-\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}, \tag{1}$$

где векторная функция $D(q,\dot{q})$ непрерывна при $\|q\|<\rho$, $\|\dot{q}\|<\eta$ ($\eta=const>0$) и удовлетворяет условию $\dot{q}^T D(q,\dot{q})\leq 0$; $G(t,q,\dot{q})$ — непрерывная и ограниченная в области $t\geq 0$, $\|q\|<\rho$, $\|\dot{q}\|<\eta$ кососимметричная матрица; $\Pi(q)$ — непрерывно дифференцируемая при $\|q\|<\rho$ положительно определенная функция. Следовательно, рассматриваемая система находится под действием диссипативных, гироскопических и потенциальных сил [3].

Уравнения (1) имеют положение равновесия $q=\dot{q}=0$. Известно [3], что если диссипативные силы $D(q,\dot{q})$ обладают полной диссипацией, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что потенциальные силы в системе (1) эволюционируют, сохраняя при этом свою структуру. Пусть указанная эволюция выражается в появлении при векторе потенциальных сил нестационарного параметра $h(t)$. Таким образом, исследуем систему:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=D(q,\dot{q})-G(t,q,\dot{q})\dot{q}-h(t)\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}. \tag{2}$$

В настоящей работе будем считать, что $h(t)$ — непрерывная и положительная при $t\geq 0$ функция, причем $h(t)\to 0$ при $t\to +\infty$. Данная ситуация соответствует радикальному случаю исчезновения потенциальных сил со временем. Основная цель статьи — получить условия на скорость изменения параметра эволюции $h(t)$, при выполнении которых сохраняется асимптотическая устойчивость положения равновесия.

2. Линейные силы. Пусть уравнения (2) имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-B\dot{q}-G\dot{q}-h(t)Cq. \tag{3}$$

B, G и C — постоянные матрицы, причем B и C — симметричные и положительно определенные, G — кососимметричная. Таким образом, все действующие на систему силы являются линейными.

Теорема 1. *Если*

$$\int_0^t h(\tau)d\tau\to +\infty \ \text{\textit{при}}\ t\to +\infty, \tag{4}$$

то положение равновесия $q=\dot{q}=0$ *уравнений (3) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Воспользуемся методом декомпозиции [3]. Произведем замену переменных по формулам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}+(B+G)q=(B+G)y\,,\quad \dot{q}=z. \tag{5}$$

Получим систему:

$$\begin{cases}\dot{y}=-h(t)(B+G)^{-1}Cy+\Psi_1(t,y,z),\\ \dot{z}=-A^{-1}(0)(B+G)z+\Psi_2(t,y,z),\end{cases} \tag{6}$$

в которой векторные функции $\Psi_1(t,y,z)$ и $\Psi_2(t,y,z)$ в области $t\geq 0$, $\|y\|<\tilde{\rho}$, $\|z\|<\tilde{\rho}$ удовлетворяют неравенствам:

$$\|\Psi_1(t,y,z)\|\leq \alpha_1 h(t)\|z\|+\alpha_2\|z\|^2\,,\ \|\Psi_2(t,y,z)\|\leq \alpha_3 h(t)(\|y\|+\|z\|)+\varphi(y,z)\|z\|.$$

Здесь $\tilde{\rho}$, α_1, α_2, α_3 — положительные постоянные, а неотрицательная функция $\varphi(y,z)$ стремится к нулю при $\|y\|+\|z\|\to 0$.

В силу сделанных предположений изолированные подсистемы

$$\dot{y}=-h(t)(B+G)^{-1}Cy\,,\quad \dot{z}=-A^{-1}(0)(B+G)z$$

асимптотически устойчивы, причем функции Ляпунова для них можно выбрать в виде $V_1(y)=y^TCy$, $V_2(z)=z^TA(0)z$.

Пусть $V(y,z)=V_1(y)+V_2(z)$. Продифференцируем эту функцию в силу системы (6). Получим, что существуют положительные числа L, δ, β_1, β_2 такие, что в области $t \geq L$, $\|y\|<\delta$, $\|z\|<\delta$ справедливы оценки

$$\dot{V}\big|_{(6)} \leq -\beta_1\left(h(t)\|y\|^2+\|z\|^2\right) \leq -\beta_2 h(t)V.$$

Значит, если $t_0 \geq L$ и решение $\left(y^T(t),z^T(t)\right)^T$ исследуемой системы при $t\in[t_0,t_1]$ удовлетворяет условиям $\|y(t)\|<\delta$, $\|z(t)\|<\delta$, то для всех таких значений t имеем:

$$\|y(t)\|^2+\|z(t)\|^2 \leq \beta_3 V\left(y(t_0),z(t_0)\right)\exp\left(-\beta_2\int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau\right),$$

где β_3 — положительная постоянная, не зависящая от начальных данных рассматриваемого решения.

Таким образом, нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво. Учитывая соотношения (5), связывающие между собой переменные q, $\dot{q}$ и y, z, получаем, что положение равновесия $q=\dot{q}=0$ системы (3) также является асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

Замечание 1. Если условие (4) не выполнено, то исследуемое положение равновесия может не быть асимптотически устойчивым.

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение:

$$\ddot{q}+2\dot{q}+\frac{1}{e^t+1}q=0. \tag{7}$$

В данном случае нестационарный параметр удовлетворяет всем условиям настоящего раздела, за исключением условия (4). При этом у уравнения (7) существует решение $q(t)=1+e^{-t}$. Следовательно, положение равновесия $q=\dot{q}=0$ не является асимптотически устойчивым.

3. Нелинейные потенциальные силы. Пусть теперь уравнения (2) представимы в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-B\dot{q}-G\dot{q}-h(t)\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}. \tag{8}$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, B и G — постоянные матрицы, причем B — симметричная и положительно определенная, G — кососимметричная. Будем считать, что $\Pi(q)$ — дважды непрерывно дифференцируемая при всех $q\in E^n$ положительно определенная однородная порядка $\mu+1$ функция, $\mu>1$. Таким образом, изучаемая система находится под действием линейных диссипативных и гироскопических сил и существенно нелинейных эволюционирующих потенциальных сил.

Теорема 2. *Если выполнено условие* (4), *то положение равновесия* $q=\dot{q}=0$ *системы* (8) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. С помощью замены (5) переходим от системы (8) к системе:

$$\begin{cases} \dot{y} = -h(t)(B+G)^{-1}\dfrac{\partial\Pi(y)}{\partial y} + \tilde{\Psi}_1(t,y,z), \\ \dot{z} = -A^{-1}(0)(B+G)z + \tilde{\Psi}_2(t,y,z), \end{cases} \qquad (9)$$

в которой векторные функции $\tilde{\Psi}_1(t,y,z)$ и $\tilde{\Psi}_2(t,y,z)$ при $t \geq 0$, $\|y\| < \tilde{\rho}$, $\|z\| < \tilde{\rho}$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left\|\tilde{\Psi}_1(t,y,z)\right\| \leq \alpha_1 h(t)\|z\| \left(\|y\|^{\mu-1} + \|z\|^{\mu-1}\right) + \alpha_2\|z\|^2,$$

$$\left\|\tilde{\Psi}_2(t,y,z)\right\| \leq \alpha_3 h(t)\|y\|^{\mu} + \phi(y,z)\|z\|.$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 1, $\tilde{\rho}$, α_1, α_2, α_3 — положительные постоянные, а неотрицательная функция $\varphi(y,z)$ стремится к нулю при $\|y\| + \|z\| \to 0$.

Функцию Ляпунова строим в виде $V(y,z) = \Pi(y) + 1/2\, z^T A(0) z$. Дифференцируя ее в силу системы (9), нетрудно показать, что положительные числа L, δ, β_1, β_2 можно выбрать так, чтобы в области $t \geq L$, $\|y\| < \delta$, $h_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ имели место оценки:

$$\dot{V}\Big|_{(9)} \leq -\beta_1\left(h(t)\|y\|^{2\mu} + \|z\|^2\right) \leq -\beta_2 h(t) V^{2\mu/(\mu+1)}.$$

Значит, если $t_0 \geq L$, и решение $\left(y^T(t), z^T(t)\right)^T$ исследуемой системы при $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяет условиям $\|y(t)\| < \delta$, $\|z(t)\| < \delta$, то для всех таких значений t имеем:

$$\|y(t)\|^{\mu+1} + \|z(t)\|^2 \leq \beta_3 V\left(y(t_0), z(t_0)\right)\left(1 + \beta_4 V^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\left(y(t_0), z(t_0)\right)\int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau\right)^{-\frac{\mu+1}{\mu-1}},$$

где β_3 и β_4 — положительные постоянные, не зависящие от начальных данных рассматриваемого решения. Таким образом, нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво. Но тогда асимптотически устойчивым будет и положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть в системе (8) *потенциальная энергия представима в виде* $\Pi(q) = \Pi_1(q) + \Pi_2(q)$, *где* $\Pi_1(q)$ *— дважды непрерывно дифференцируемая при всех* $q \in E^n$ *положительно определенная однородная порядка* $\mu+1$ *функция,* $\mu > 1$, *а функция* $\Pi_2(q)$ *задана и непрерывно дифференцируема при* $\|q\| < \rho$, *причем* $\|\partial\Pi_2 / \partial q\| / \|q\|^{\mu} \to 0$ *при* $\|q\| \to 0$. *Если выполнено предельное соотношение* (4), *то положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (8) *асимптотически устойчиво.*

4. Нелинейные диссипативные силы. Рассмотрим теперь случай, когда диссипативные силы существенно нелинейны. Пусть в системе (2) векторная функция $D(q,\dot{q})$ определяется по формуле $D(q,\dot{q}) = -\dfrac{\partial R(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$, где диссипативная функция Рэлея $R(\dot{q})$ задана и непрерывно дифференцируема при всех $\dot{q} \in E^n$, положительно определена и является однородной порядка $\nu+1$, $\nu>1$. Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial R(\dot{q})}{\partial \dot{q}} - G(t,q,\dot{q})\dot{q} - h(t)\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}. \qquad (10)$$

По-прежнему считаем, что $G(t,q,\dot{q})$ — непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$, $\|q\| < \rho$, $\|\dot{q}\| < \eta$ кососимметричная матрица, а относительно потенциальной энергии $\Pi(q)$ предполагаем, что она является непрерывно дифференцируемой при $q \in E^n$ положительно определенной однородной порядка $\mu+1$ функцией, $\mu \geq 1$.

Теорема 3. *Пусть $\rho = +\infty$. Если нестационарный параметр удовлетворяет следующим условиям:*

а) функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$;

б) $\dot{h}(t) \leq 0$ при $t \geq 0$;

в) $\left|\dot{h}(t)\right| \leq M\ h(t)$ при $t \geq 0$ $(M = const > 0)$;

г) $I(t) = \int\limits_0^t h^{(\nu+1)/(\mu+1)}(\tau)d\tau \to +\infty$ при $t \to +\infty$,

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (10) асимптотически устойчиво относительно обобщенных скоростей.

Доказательство. Функцию Ляпунова выбираем в виде:

$$V(t,q,\dot{q}) = h(t)\Pi(q) + T(q,\dot{q}) + \gamma\ h^{\sigma}(t)\ \|q\|^{r-1} q^T \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Здесь $\gamma > 0$, $\sigma \geq 1$, $r \geq 1$. Для функции $V(t,q,\dot{q})$ и ее производной в силу рассматриваемых уравнений в области $t \geq 0$, $\|q\| < \rho$, $\|\dot{q}\| < \eta$ справедливы соотношения:

$$\beta_1\left(h(t)\|q\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right) - \beta_3\gamma\ h^{\sigma}(t)\|q\|^r\|\dot{q}\| \leq V(t,q,\dot{q}) \leq$$
$$\leq \beta_2\left(h(t)\|q\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right) + \beta_3\gamma\ h^{\sigma}(t)\|q\|^r\|\dot{q}\|,$$
$$\dot{V}\Big|_{(10)} \leq -\beta_4\left(\gamma\ h^{\sigma+1}(t)\|q\|^{r+\mu} + \|\dot{q}\|^{\nu+1}\right) + \beta_5\gamma\ h^{\sigma}(t)\left(\|q\|^r\|\dot{q}\| + \|q\|^{r-1}\|\dot{q}\|^2\right),$$

где $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, 5$..

Пусть $z = h^{1/(\mu+1)}(t)q$, $r = \mu\nu$, $\sigma = \nu$. Тогда положительные числа γ, δ и β_6 можно выбрать так, чтобы при $t \geq 0$, $\|z\| < \delta$, $\|\dot{q}\| < \delta$ имели место неравенства:

$$\frac{\beta_1}{2}\left(\|z\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right) \leq V(t,q,\dot{q}) \leq 2\beta_2\left(\|z\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right), \qquad (11)$$

$$\dot{V}\Big|_{(10)} \leq -\frac{\beta_4}{2}\left(\gamma\ h^{\frac{\nu+1}{\mu+1}}(t)\|z\|^{\mu(\nu+1)} + \|\dot{q}\|^{\nu+1}\right) \leq -\beta_6\ h^{\frac{\nu+1}{\mu+1}}(t)V^{\frac{\mu(\nu+1)}{\mu+1}}. \qquad (12)$$

Используя оценки (11), (12) нетрудно показать, что положение равновесия $q=\dot{q}=0$ системы (10) асимптотически устойчиво относительно $\dot{q}$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $0<\rho\le+\infty$. *Если выполнены условия а) -- г) теоремы 3, и справедливо предельное соотношение* $h(t)I^{(\mu+1)/(\mu\nu-1)}(t)\to+\infty$ *при* $t\to+\infty$, *то положение равновесия* $q=\dot{q}=0$ *системы* (10) *асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Следствие 3. Предположим, что функция $h(t)$ *имеет вид:*

$$h(t)=(t+1)^{\alpha}, \quad \alpha=const<0. \tag{13}$$

Тогда при $\alpha\ge-(\mu+1)/(\nu+1)$ *и* $\rho=+\infty$ *положение равновесия* $q=\dot{q}=0$ *системы (10) асимптотически устойчиво относительно* $\dot{q}$, *а при* $\alpha>-1/\nu$ *и* $0<\rho\le+\infty$ *— асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Пример 2. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы

$$\ddot{q}+\begin{pmatrix}0 & g\\ -g & 0\end{pmatrix}\dot{q}+(t+1)^{\alpha}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}q=-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}}. \tag{14}$$

Здесь $q=(q_1,q_2)^T$; g, λ_1, λ_2 и α — постоянные, причем $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\alpha<0$. Будем считать, что функция $R=R(q,\dot{q})$ определяется по формуле:

$$R(q,\dot{q})=d_1\left(\dot{q}_1^4+\dot{q}_2^4\right)+d_2\left(q_1^2\dot{q}_1^2+q_2^2\dot{q}_2^2\right),\ d_1\ge0,\ d_2\ge0. \tag{15}$$

Диссипативная функция Рэлея вида (15) рассматривалась в работе [6].

Предположим, что $d_1>0$, $d_2=0$. Применяя следствие 3, получаем, что при $\alpha\ge-1/2$ положение равновесия $q=\dot{q}=0$ системы (14) асимптотически устойчиво относительно $\dot{q}$, а при $\alpha>-1/3$ — асимптотически устойчиво по всем переменным.

5. Нелинейные диссипативные силы, зависящие от обобщенных координат. Пусть, наконец, $D(q,\dot{q})=-\dfrac{\partial F(q)}{\partial q}\dot{q}$, где компоненты вектора $F(q)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $q\in E^n$ однородными функциями порядка $\nu+1$, $\nu>0$, причем для всех $q\in E^n$ и $\dot{q}\in E^n$ справедливо неравенство:

$$\dot{q}^T\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q}\ge c\|q\|^{\nu}\|\dot{q}\|^2, \quad c=const>0.$$

Тогда уравнения (2) принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial F(q)}{\partial q}\dot{q}-G(t,q,\dot{q})\dot{q}-h(t)\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}. \tag{16}$$

Будем считать, что гироскопические и потенциальные силы обладают свойствами, указанными в предыдущем разделе статьи.

Теорема 4. *Пусть* $\rho=+\infty$. *Если нестационарный параметр удовлетворяет следующим условиям:*

а) функция $h(t)$ *непрерывно дифференцируема при* $t\ge0$;

б) $\dot{h}(t) \le 0$ *при* $t \ge 0$*;*

в) $\left|\dot{h}(t)\right| \le M\ h(t)$ *при* $t \ge 0$ $(M = const > 0)$*;*

г) $I(t) = \int_0^t h^{(\nu+2)/(\mu+1)}(\tau)d\tau \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$,

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ *системы (16) асимптотически устойчиво относительно обобщенных скоростей.*

Доказательство. Построим функцию Ляпунова вида:

$$V(t,q,\dot{q}) = h(t)\Pi(q) + T(q,\dot{q}) - \gamma_1 h^{\sigma_1}(t)\left\|\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\|^{s-1} q^T \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \\ + \gamma_2 h^{\sigma_2}(t)\|q\|^{k-1} q^T \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \tag{17}$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $s \ge 1$, $k \ge 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$.

Дифференцируя функцию (17) в силу системы (16), несложно показать, что если $k = \mu + \nu$, $s = 1 + \max\{\nu,\ (\mu + \nu - 1)/\mu\}$, $\sigma_1 = (\nu + 2)/(\mu + 1)$, $\sigma_2 = 1 + 2\nu/(\mu + 1)$, то положительные числа γ_1, γ_2, δ, β_1, β_2, β_3 и β_4 можно выбрать так, чтобы при $t \ge 0$, $\|z\| < \delta$, $\|\dot{q}\| < \delta$ имели место неравенства:

$$\beta_1\left(\|z\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right) \le V(t,q,\dot{q}) \le \beta_2\left(\|z\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right),$$

$$\dot{V}\Big|_{(16)} \le -\beta_3\ h^{\frac{\nu+2}{\mu+1}}(t)(\|z\|^{k+\mu} + \|\dot{q}\|^{s+1}) \le -\beta_4\ h^{\frac{\nu+2}{\mu+1}}(t)V^{1+\varepsilon}.$$

Здесь $z = h^{1/(\mu+1)}(t)q$,

$$\varepsilon = \max\{\nu/2,\ (\mu + \nu - 1)/(\mu + 1)\}. \tag{18}$$

Значит, положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (16) асимптотически устойчиво относительно $\dot{q}$. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть $0 < \rho \le +\infty$. *Если выполнены условия а) -- г) теоремы 4, и справедливо предельное соотношение* $h^{\varepsilon}(t)I(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *где значение параметра* ε *задается формулой (18), то положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы (16) асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Следствие 5. Предположим, что функция $h(t)$ *имеет вид (13). Тогда при* $\alpha \ge -(\mu + 1)/(\nu + 2)$ *и* $\rho = +\infty$ *положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы (16) асимптотически устойчиво относительно* $\dot{q}$, *а при* $\alpha > -(\mu + 1)/$ $/(\varepsilon(\mu + 1) + \nu + 2)$ *и* $0 < \rho \le +\infty$ *— асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Пример 3. Снова рассмотрим систему (14), в которой функция Рэлея определяется по формуле (15). Будем теперь считать, что $d_1 = 0$, $d_2 > 0$. Применяя следствие 5, получаем, что при $\alpha \ge -1/2$ положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (14) асимптотически устойчиво относительно $\dot{q}$, а при $\alpha > -1/3$ — асимптотически устойчиво по всем переменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. № 1. С. 12-19.

2. Андреев А.С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. № 3. С. 388-396.

3. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

4. Александров А.Ю. Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71. № 3. С. 361-376.

5. Александров А.Ю., Косов А.А. Об асимптотической устойчивости положений равновесия механических систем с нестационарным ведущим параметром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 3. С. 8-22.

6. Агафонов С.А. Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74. № 4. С. 560-566.

Евгений Александрович НОВИКОВ —
гл. научный сотрудник
Института вычислительного
моделирования СО РАН (г. Красноярск),
доктор физико-математических наук, профессор
novikov@icm.krasn.ru

Александр Анатольевич ЗАХАРОВ —
зав. кафедрой информационной безопасности
Института математики и компьютерных наук
Тюменского государственного университета,
доктор технических наук, профессор
azaharov@utmn.ru

УДК 519.622

ЯВНЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ–КУТТА: АЛГОРИТМЫ С КОНТРОЛЕМ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

RUNGE–KUTTA EXPLICIT METHODS: INTEGRATION ALGORITHMS WITH ACCURACY CONTROL

АННОТАЦИЯ. Построены алгоритмы переменного шага на основе явных методов типа Рунге–Кутта второго порядка точности, в которых глобальные ошибки аппроксимации оцениваются фактически без увеличения вычислительных затрат.

SUMMARY. Algorithms of variable step on the basis of Runge–Kutta-type explicit methods of second-order accuracy are constructed where the global error of approximation is estimated practically with no increase in computation cost.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Жесткие задачи, численный метод, глобальная ошибка, контроль точности.

KEY WORDS. Stiff problems, numerical methods, global error, accuracy control.

1. **Введение.** Во многих приложениях возникает проблема численного решения задачи Коши для жестких систем дифференциальных уравнений [1]: