

Владислав Олегович БЫТЕВ —

зав. кафедрой математического моделирования,
доктор физико-математических наук, профессор

Ирина Викторовна СЛЕЗКО —

доцент кафедры
математического моделирования,
кандидат физико-математических наук
slezkoirina@rambler.ru

Николай Федорович БЕЛЬМЕЦЕВ —

аспирант кафедры
математического моделирования
weqsmachine@gmail.com

Институт математики и компьютерных наук
Тюменского государственного университета

УДК 539.382.2

ДЕФОРМАЦИЯ АСИММЕТРИЧНО-УПРУГИХ ПЛАСТИН

DEFORMATION IN ASYMMETRICAL ELASTIC PLATES

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрена двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела. Приведено точное решение задачи плоской асимметричной теории упругости о чистом сдвиге в пластине, ослабленной отверстием. Проведен сравнительный анализ полученного решения с классическим.

SUMMARY. The two-dimension model of the deformation of asymmetrical elastic solid is considered in the article. The authors present the exact solution of flat asymmetrical elasticity problem about simple shear in the plate which is weakened by hole. Comparative analysis of the received solution with classical one is given.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Упругость, деформация пластин, чистый сдвиг.

KEY WORDS. Elasticity, deformation of plate, simple shear.

Методы теории упругости и ее приложений применяются в различных областях науки и техники. Задачи, которые удается решать в рамках линейной теории, разнообразны, однако в связи с внедрением гибких элементов, способных работать в закритической области при упругих деформациях, около полувека назад возник практический интерес к нелинейной теории упругости. Так, например, необходимость расчета резинотехнических изделий явилась мощным стимулом для развития прикладного направления нелинейной теории. В силу того, что отвечающие задачам нелинейной теории упругости уравнения сложны, точные решения их, как правило, получать не удастся, а если и удастся, то при большом числе допущений и ограничений на перемещения, деформации, углы поворота. Несомненно, инженеру хотелось бы иметь такой математический аппарат, который может быть реализован сравнительно просто.

В связи с этим актуальной задачей является разработка такой модели упругой деформации, которая позволила бы применять наиболее простые математические методы и приемы при решении задач об исследовании напряженно-деформированного состояния тела.

Как известно [1], уравнения статики имеют вид

$$\operatorname{div} T + \mathbf{F} = 0,$$

где T — тензор напряжений, \mathbf{F} — вектор объемных сил. Общий вид тензора напряжений установлен в результате решения задачи групповой классификации законов сохранения в работах [2], [3]. В случае плоской задачи он имеет вид:

$$T = I \lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + M D_0, \quad (1)$$

где I — единичный тензор, $\mathbf{u} = \{u, v\}$ — вектор смещений, D_0 — девиатор деформаций,

$$M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

λ_0, μ, μ_0 — кинетические коэффициенты, причем $\lambda_0 > 0, \mu > 0, \mu_0 \in (-\infty; \infty)$.

Данная модель служит обобщением классической линейной модели деформации упругого тела. Так, если положить в (1) $\mu_0 = 0, \lambda_0 = \lambda + \mu$, считая λ и μ параметрами Ламе, то получим известную зависимость между тензорами напряжений и деформаций [1].

Поясним суть появления дополнительного третьего параметра в модели.

Обозначим $\vec{\tau}^0 = (M D_0 \cdot \vec{n})$ — вектор девиатора тензора T , а $\vec{d}_0 = (D_0 \cdot \vec{n})$ — вектор девиатора тензора D_0 . Согласно [3]:

$$\cos \gamma = \frac{(\vec{\tau}_0 \cdot \vec{d}_0)}{|\vec{\tau}_0| \cdot |\vec{d}_0|} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \mu_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu_0/\mu)^2}}.$$

Последнее соотношение определяет меру несоосности тензоров $M D_0$ и D_0 .

Из формул (1), (2) выпишем выражения компонент симметричного тензора напряжений σ_{ij} через компоненты симметричного тензора деформаций ε_{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda_0 + \mu) \varepsilon_{11} + 2\mu_0 \varepsilon_{12} + (\lambda_0 - \mu) \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= -\mu_0 \varepsilon_{11} + 2\mu \varepsilon_{12} + \mu_0 \varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda_0 - \mu) \varepsilon_{11} - 2\mu_0 \varepsilon_{12} + (\lambda_0 + \mu) \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов системы (3):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \mu & 2\mu_0 & \lambda_0 - \mu \\ -\mu_0 & 2\mu & \mu_0 \\ \lambda_0 - \mu & -2\mu_0 & \lambda_0 + \mu \end{pmatrix}.$$

Матрица A — преобразующий тензор — является несимметричной. Этот факт отражен в названии данной модели деформации упругого тела — асимметричная упругость.

Итак, в линейной модели асимметричной упругости (имеется в виду геометрическая и физическая линейность) симметричные тензоры напряжений и деформаций связаны несимметричным преобразующим тензором — это принципиальное отличие данной модели линейной теории упругости.

Следует отметить, что модель асимметричной упругости не связана с несимметричной моментной упругостью. Для последней характерно введение моментных напряжений и деформаций, наличие шести (в случае линейной модели) кинетических коэффициентов и др.

Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = 2\lambda_0 \kappa_0^2 \neq 0, \quad \kappa_0^2 = \mu^2 + \mu_0^2.$$

Матрица A — невырожденная, следовательно, найдутся обратные зависимости компонент тензора деформаций от компонент тензора напряжений.

Нетрудно показать, что условие совместности будет иметь такой же вид, как и в классическом случае:

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0.$$

Полная система уравнений плоской асимметричной теории упругости имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0,$$

$$\sigma_{11} = 2\mu u_{,x} + \mu_0(u_{,y} + v_{,x}) + (\lambda_0 - \mu)\theta,$$

$$\sigma_{12} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) - \mu_0(u_{,x} - v_{,y}),$$

$$\sigma_{22} = 2\mu v_{,y} - \mu_0(u_{,y} + v_{,x}) + (\lambda_0 - \mu)\theta,$$

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u},$$

здесь индекс после запятой указывает производную по соответствующей координате.

Как и в классическом случае [1], можно выразить вектор смещений и компоненты тензора напряжений через комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$, вводя функцию Эри $U(x, y)$ по формулам:

$$\sigma_{11} = U_{,yy}, \quad \sigma_{12} = -U_{,xy}, \quad \sigma_{22} = U_{,xx}.$$

Комплексное представление вектора смещений имеет вид:

$$2\kappa_0^2(u + iv) = (2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa})\varphi(z) - \kappa z \overline{\varphi'(z)} - \kappa \overline{\psi(z)},$$

где $\kappa = \mu + i\mu_0$.

Рассмотрим две комплексные плоскости Z , Ω и зададим конформное отображение $z = \omega(\zeta)$, которое переводит область $S \subset Z$ в область $\Sigma \subset \Omega$. Введем на плоскости Ω полярные координаты (ρ, ϑ) так, что $\omega = \rho e^{i\vartheta}$. При-

ведем выражения компонент вектора смещений с помощью комплексных потенциалов $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ в полярных координатах:

$$2\kappa_0^2(u_\rho + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa})\varphi(\zeta) - \kappa\zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \kappa\overline{\psi(\zeta)} \right]. \quad (4)$$

Как уже было отмечено, асимметричная модель является обобщением классических формул Лява. При $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \lambda + \mu$ имеем:

$$2\mu(u_\rho + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[\kappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right], \quad (5)$$

где $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma$, λ , μ — модули упругости ($\lambda > 0$, $\mu > 0$), σ — коэффициент Пуассона.

Поле напряжений обеих моделей одинаково. Уравнения на компоненты тензора напряжений в комплексной формулировке имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(\zeta)], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)]. \end{aligned}$$

Сделаем еще одно замечание, касающееся обозначений. Для кинетических параметров асимметричной модели вводятся обозначения λ_0 , μ , μ_0 , κ . Изначально они никак не связаны с параметрами Ламе и известна только область изменения этих параметров. Коэффициенты принимают привычный смысл модулей упругости лишь когда мы переходим к рассмотрению классической модели, получая ее из обобщенных уравнений асимметричной модели. Кроме того, такой подход дает возможность сравнения двух моделей.

Как известно, классическая теория не дает возможности вести расчет изделий, изготовленных из полимерных материалов. В таких случаях инженер вынужден использовать более сложный аппарат нелинейной упругости. Использование же асимметричной модели дает нам возможность вести расчет изделий, в том числе и из полимеров, получая при этом адекватные результаты.

В качестве примера плоской деформации упругих пластин в рамках классической и асимметричной моделей рассмотрим задачу о чистом сдвиге в пластине, ослабленной отверстием в форме криволинейного правильного четырехугольника.

Будем пользоваться конформным отображением внешности отверстия на внутренность круга единичного радиуса. Возьмем отображающую функцию, удерживая в ней два члена [4]:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} \right).$$

Здесь $R = 3a/5$, где a — сторона рассматриваемого четырехугольника.

Согласно [4], выражения для комплексных потенциалов даются уравнениями:

$$\varphi(\zeta) = i\frac{6}{5}R\tau, \quad \psi(\zeta) = -iR\tau \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{13\zeta^3}{5(2 + \zeta^4)} \right],$$

где τ — сдвиговое усилие.

Для данной задачи получено поле напряжений и выражения для компонент вектора смещений модели (4).

Компоненты вектора смещений имеют вид:

$$u_\rho = \frac{R\tau}{5A_1} \left\{ 3\rho(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)(\rho^8 + 4)\sin\vartheta - 6\rho^5(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)\sin 3\vartheta + \right. \\ \left. + 13\rho^4\lambda_0\mu\sin 4\vartheta + 6\rho^5(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)\sin 5\vartheta + \lambda_0\mu_0 \left[3\rho(\rho^8 + 4)\cos\vartheta + 6\rho^5\cos 3\vartheta - \right. \right. \\ \left. \left. - 23\rho^4\cos 4\vartheta + 6\rho^5\cos 5\vartheta - 10 - 9\rho^8 \right] \right\},$$

где $A_1 = \lambda_0\kappa_0^2(4\rho^4\cos 4\vartheta + \rho^8 + 4)$,

$$u_\vartheta = \frac{R\tau}{5A_1} \left\{ 3\rho(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)(\rho^8 + 4)\cos\vartheta + 6\rho^5(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)\cos 3\vartheta + \right. \\ \left. + 23\rho^4\lambda_0\mu\cos 4\vartheta + 6\rho^5(2\kappa_0^2 + \lambda_0\mu)\cos 5\vartheta + \lambda_0\mu(10 + 9\rho^8) + \lambda_0\mu_0 \left[-3\rho(\rho^8 + 4) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin\vartheta + 6\rho^5\sin 3\vartheta + 13\rho^4\sin 4\vartheta - 6\rho^5\sin 5\vartheta \right] \right\}.$$

Полагая $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \lambda + \mu$ в u_ρ , u_ϑ , получаем классическое решение:

$$u_\rho^{cl} = \frac{3R\tau}{5A_2} \left[3(\lambda + 3\mu)(\rho^8 + 4)\sin\vartheta - 6\rho^4(\lambda + 3\mu)\sin 3\vartheta + 13\rho^3(\lambda + \mu)\sin 4\vartheta + \right. \\ \left. + 6\rho^4(\lambda + 3\mu)\sin 5\vartheta \right],$$

где $A_2 = \mu(\lambda + \mu)(4\rho^4\cos 4\vartheta + \rho^8 + 4)$,

$$u_\vartheta^{cl} = \frac{R\tau}{5\rho A_2} \left[3\rho(\lambda + 3\mu)(\rho^8 + 4)\cos\vartheta + 6\rho^5(\lambda + 3\mu)\cos 3\vartheta + \right. \\ \left. + 23\rho^4(\lambda + \mu)\cos 4\vartheta + 6\rho^5(\lambda + 3\mu)\cos 5\vartheta + (\lambda + \mu)(10 + 9\rho^8) \right].$$

Проиллюстрируем полученное решение на примере задачи о чистом сдвиге в пластине из резины. Физические характеристики материала: коэффициент Пуассона $\sigma = 0,46$, модуль упругости $E = 1,5 \cdot 10^6$ Н/м². Сторона криволинейного правильного четырехугольника $a = 0,6$ см, ширина пластин — 2,5 см, сдвиговое усилие $\tau = 0,02$ кН.

Форма деформированного отверстия, полученная с использованием классической модели, имеет вид, представленный на рис. 1. Видим подтверждение того, что классическая линейная теория упругости не позволяет работать с полимерными материалами.

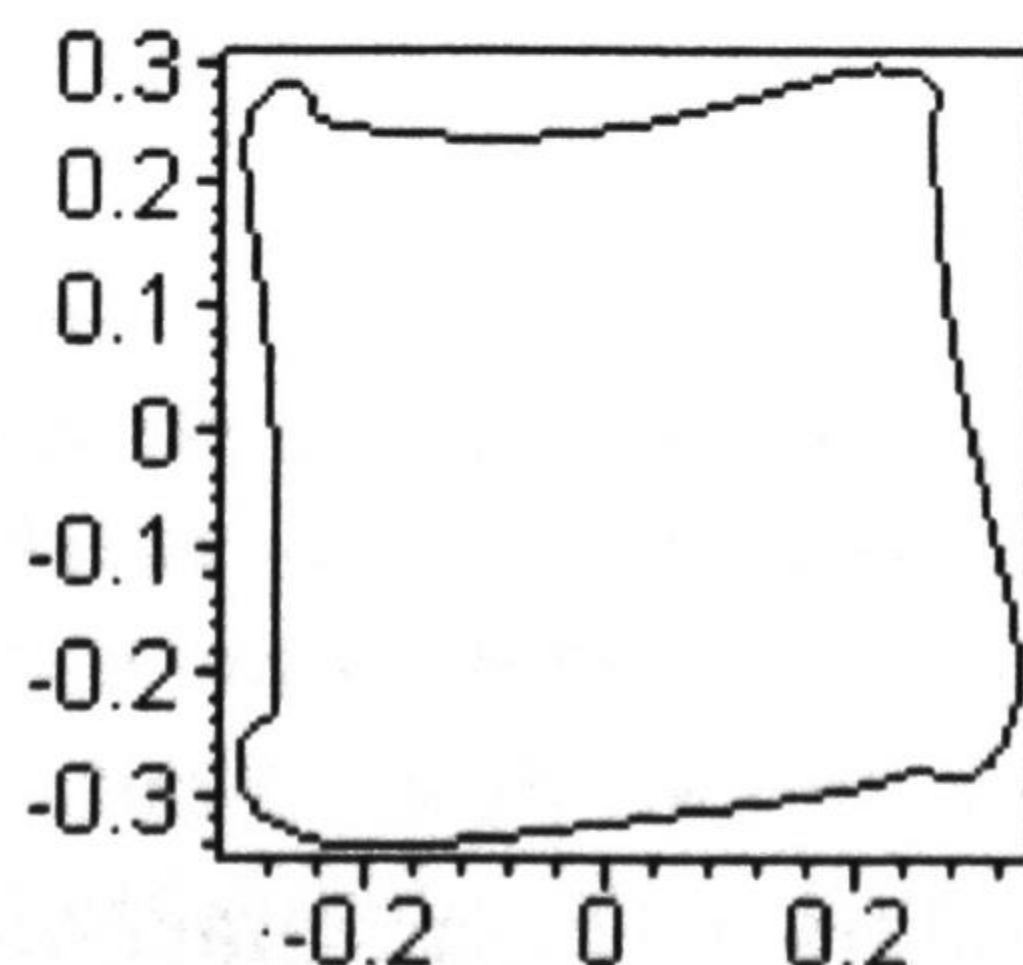


Рис. 1. Деформация отверстия ($\mu_0 = 0$ Н/м²)

Теперь проанализируем, как изменяется решение при введении нового параметра. Будем изменять параметр с некоторым шагом и следить за изменением формы отверстия. На рис. 2 представлена иллюстрация решения асимметричной модели (4) при $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$ Н/м². При данном значении параметра различия в поведении решений незначительные.

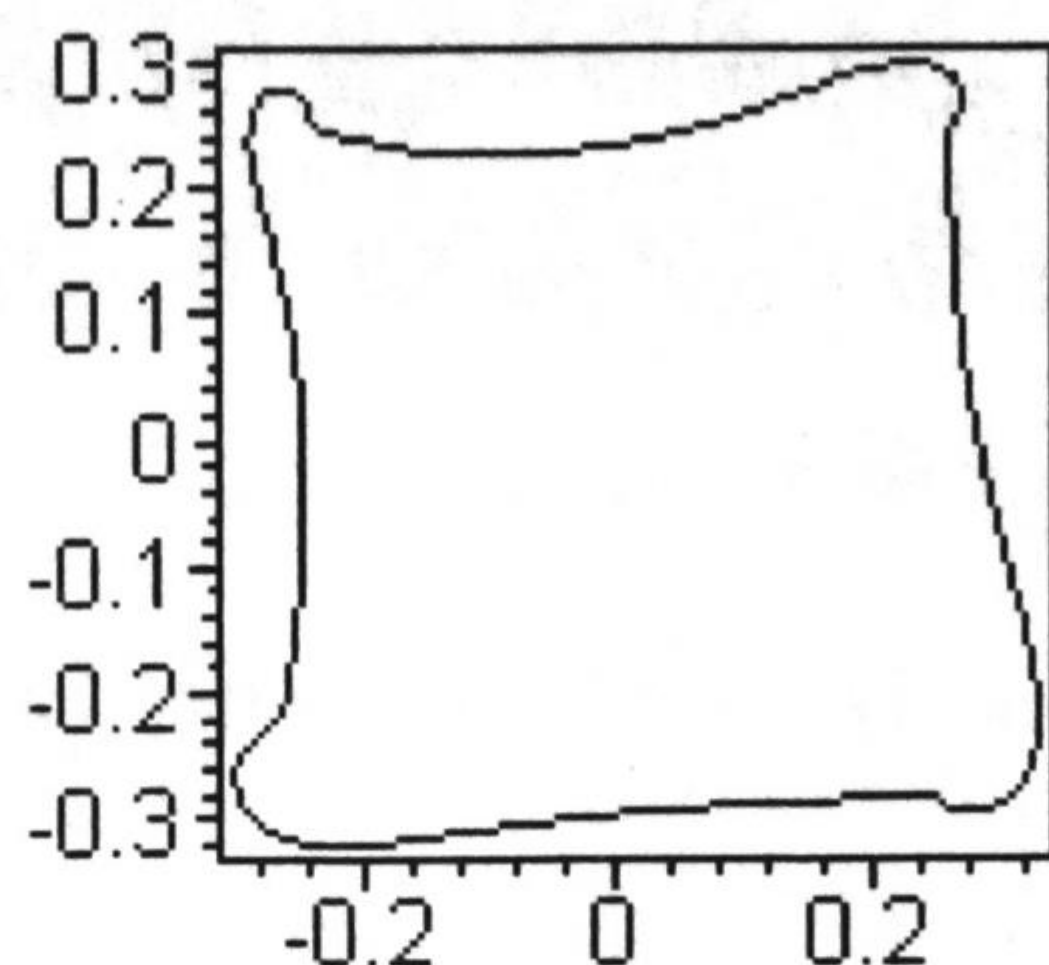


Рис. 2. Деформация отверстия ($\mu_0 = 2 \cdot 10^5$ Н/м²)

Теперь рассмотрим решение при $\mu_0 = 5 \cdot 10^5$ Н/м² (рис. 3) и $\mu_0 = 10^6$ Н/м² (рис. 4). Видим, что форма деформированного отверстия имеет реальный вид.

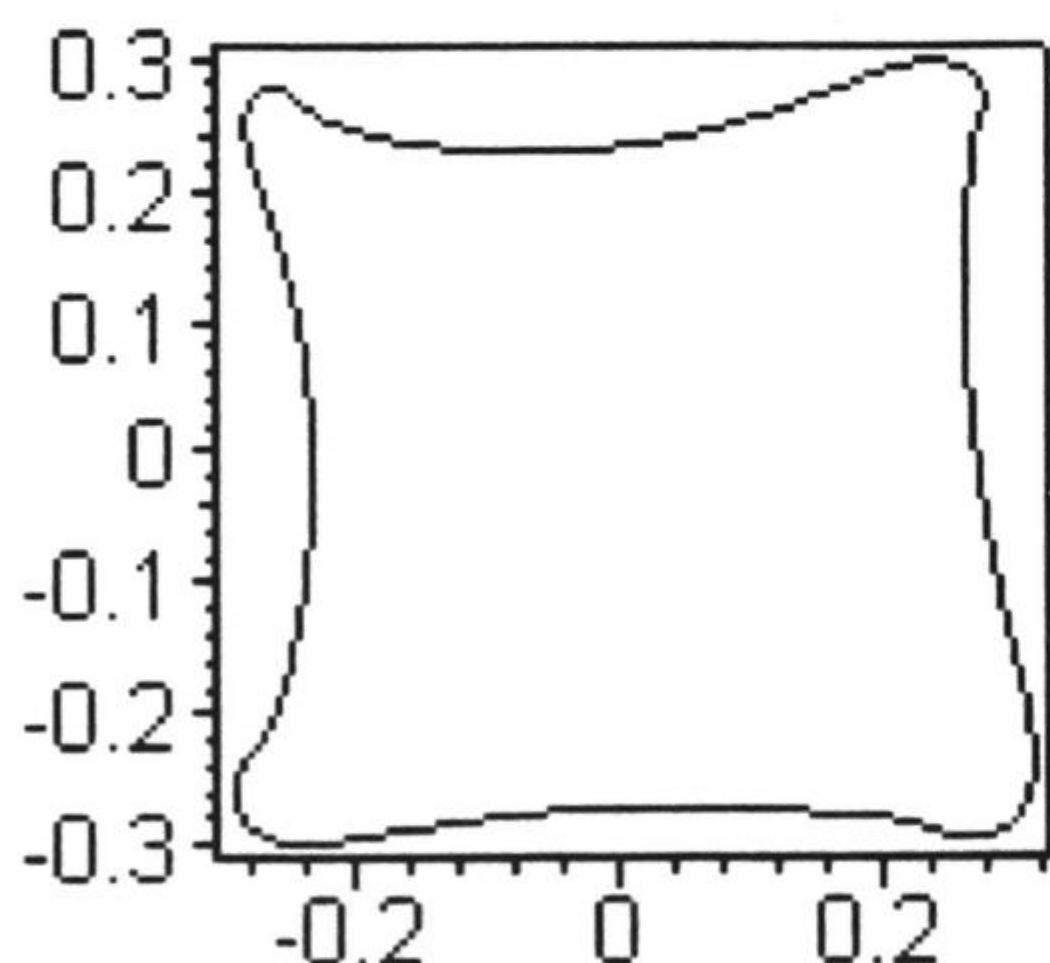


Рис. 3. Деформированное отверстие ($\mu_0 = 5 \cdot 10^5$ Н/м²)

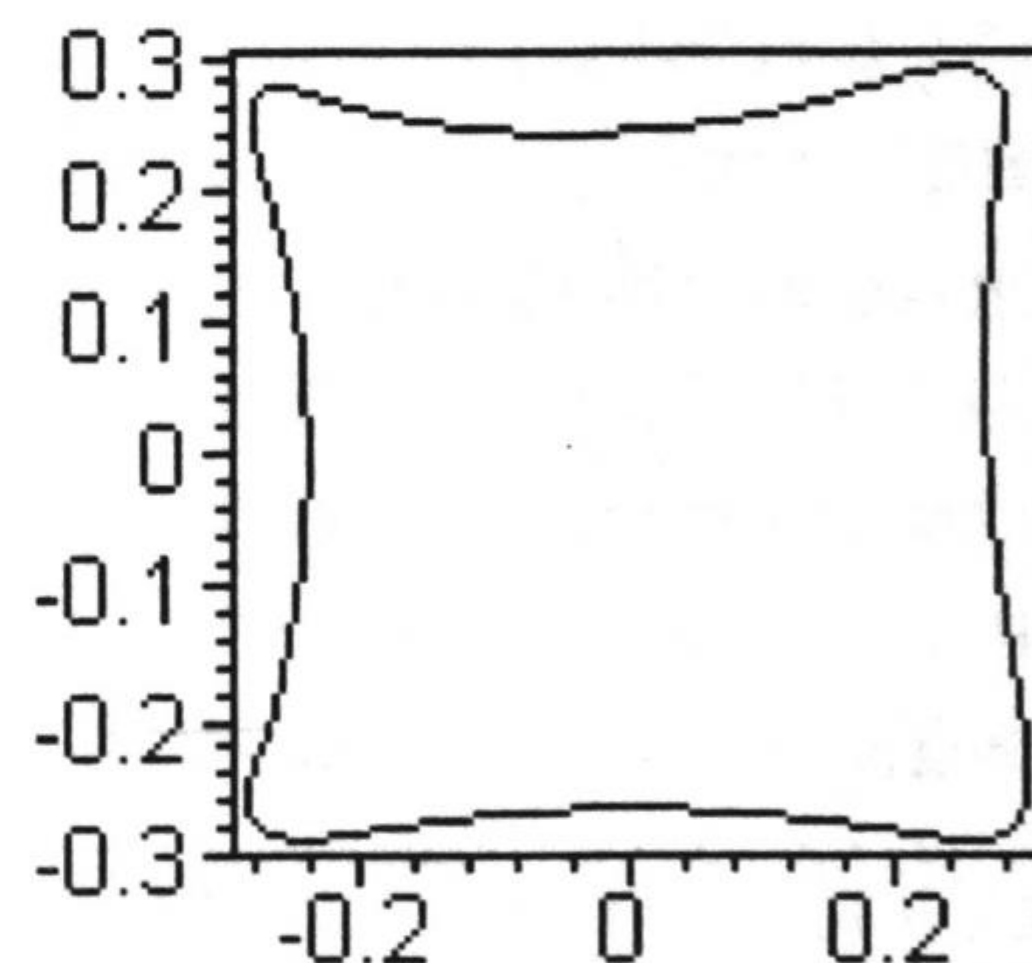


Рис. 4. Деформированное отверстие ($\mu_0 = 10^6$ Н/м²)

Эксперимент показывает, что дальнейшее увеличение значения параметра μ_0 приводит к тому, что форма деформированного отверстия стремится принять форму отверстия до деформации. Очевидно, реальные значения дополнительного модуля упругости могут быть получены экспериментально. Кроме того, в ходе расчетов установлено, что величина μ_0 сравнима со значением модуля Юнга.

Итак, геометрическая интерпретация полученного решения позволяет говорить о том, что введение дополнительного параметра в линейной модели позволяет «регуляризовать» решение и получать физически реальные результаты. Таким образом, мы получаем в распоряжение новый кинетический параметр — μ_0 , с помощью которого удастся расширить класс задач теории упругости, которые можно решать в рамках линейной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Л.: Изд-во Академии наук, 1933. 381 с.
2. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
3. Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 350 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.

*Сергей Алексеевич ПЕСОЦКИЙ —
аспирант кафедры
математического моделирования
pesotskiy.sergey@yandex.ru*

*Алексей Викторович ТАТОСОВ —
профессор кафедры
математического моделирования,
доктор физико-математических наук
atatosov@utmn.ru*

*Институт математики и компьютерных наук
Тюменского государственного университета*

УДК 534.327

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ СМЕШИВАЮЩИМСЯ С НЕЙ ГАЗОМ

MODELLING OF OIL DISPLACEMENT BY MISCIBLE GAS

АННОТАЦИЯ. В статье представлен параметрический подход к моделированию газового воздействия с учетом смешиваемости углеводородных фаз, исследованы особенности нагнетания газа высокого давления, отличающие данный физический процесс от работы в несмешивающемся режиме, проведено сравнение результатов численного эксперимента в масштабах керна с данными лабораторных исследований.

SUMMARY. Parametric modelling of miscible hydrocarbon gas injection is considered in this paper, main features of high-pressure gas injection are investigated, numerical core-scale results comparison with experimental studies data is given.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Многофазная фильтрация, смешивающееся вытеснение, численные методы.

KEY WORDS. Multiphase flow in porous media, miscible displacement, numerical methods.

Высокая эффективность процесса вытеснения нефти углеводородным газом в смешивающемся режиме обусловлена интенсивным массообменом между вытесняющей и вытесняемой фазами [1]. В результате значительно уменьшается негативное влияние капиллярных сил, снижается вязкостная неоднородность на фронте вытеснения, что в совокупности дает существенный прирост коэффициента вытеснения относительно заводнения и работы в режиме газовой репрессии.