Василий Александрович БАРИНОВ —
доцент кафедры
математического моделирования,
кандидат физико-математических наук
vbarinov@utmn.ru

Константин Юрьевич БАСИНСКИЙ —
аспирант кафедры
математического моделирования
kbasinsky@mail.ru

Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 532.59:532.13

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СТОКСА ДЛЯ СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

DEVELOPMENT OF STOKES METHOD FOR WEAKLY VISCOUS FLUID

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности вязкой жидкости. В работе развит метод Стокса решения нелинейной задачи о поверхностных волнах в случае слабовязкой жидкости. Предложено для решения нелинейной задачи определять частоту и декремент затухания изменяющимися со временем, что позволило найти решение задачи с точностью третьего приближения. В отсутствие вязкости полученные результаты переходят в известные решения для идеальной жидкости.

SUMMARY. The nonlinear problem of wave propagation on the free surface of viscous fluid is considered. In the given paper the authors developed Stokes method for the solution of the nonlinear problem of surface waves in the case of weakly viscous fluid. In order to solve this nonlinear problem it was proposed to determine the frequency and decrement of attenuation, changing with time, which allowed to find a solution with the accuracy of the third approximation. In the absence of viscosity the results are transformed into well-known solutions for an ideal fluid.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Поверхностные волны, вязкость, частота, декремент затухания.

KEY WORDS. Superficial waves, viscosity, frequency, decrement of attenuation.

Для решения нелинейной задачи о волнах на свободной поверхности идеальной жидкости Стоксом был разработан метод последовательных приближений [1]. В случае вязкой жидкости применение этого метода испытывает существенные трудности, примерами которых являются: 1) диссипация волнового движения, которая оценивается дополнительным параметром — коэффициентом (декрементом) затухания, 2) наличие уже в линейном приближении вихревого движения жидкости и второго динамического условия на свободной поверхности (для касательных напряжений). В работах [2], [3] найдено условие, при котором можно пренебречь вихревой составляющей скорости и вторым динамическим условием (слабовязкая жидкость). Для большинства жидкостей при длинах волн более 10^{-2} см это условие выполняется. Поэтому решение задачи можно находить в виде затухающих потенциальных волн, т.е. учитывая только диссипацию. Однако даже для такой модели решение нелинейной задачи удалось найти в незначительном количестве работ и то с точностью только второго приближения. Например, для вязкой диссипации [4], для межфазного трения в двухфазной смеси [5]. Относительная простота определения второго приближения обусловлена отсутствием нелинейных добавок к частоте и декременту затухания волны в этом приближении. В дальнейших же приближениях даже для идеальной жидкости появляются добавки. В настоящей работе проводится обобщение метода Стокса для слабовязких жидкостей за счет изменения со временем частоты и декремента затухания волны, что позволяет определить решение с точностью третьего приближения.

Рассмотрим бесконечно глубокий слой несжимаемой вязкой жидкости, ограниченный свободной поверхностью. Зададим декартову систему координат так, что плоскость $z^*=0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести $\mathbf{g}$. Движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^*=\left(\mathrm{u}*(t^*,x^*,z^*),0,\mathrm{v}*(t^*,x^*,z^*)\right)$, т.е. не зависит от y^*. Звездой обозначены физические (размерные) величины.

Безразмерные уравнения движения и граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$div\mathbf{u}=0,\quad \frac{\alpha^2}{\alpha-t\alpha'}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\nu_0\Delta\mathbf{u}+\nabla p=-\varepsilon(\mathrm{u}\nabla)\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\mathrm{v}-\frac{\alpha^2}{\alpha-t\alpha'}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\varepsilon\mathrm{u}\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad z=\varepsilon\xi, \tag{2}$$

$$p-\xi-2\nu_0\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial z}=-\varepsilon\nu_0\left(\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad z=\varepsilon\xi, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}\to 0,\quad z\to-\infty. \tag{4}$$

Здесь $\alpha=c/c_0=\omega/\omega_0$, $c=c(t)$, $\omega=\omega(t)$ — истинная фазовая скорость и частота волны соответственно, c_0 — фазовая скорость линейной задачи для идеальной жидкости.

Безразмерные и физические величины связаны равенствами:

$$\mathbf{u}^*=\varepsilon c_0\mathbf{u},\quad p^*=\varepsilon\rho c_0^2 p,\quad p^*=P-P_a+\rho gz,\quad \xi^*=\varepsilon\xi/k,$$

$$\nu_0=\nu^*k/c_0,\quad t=kct^*,\quad x=kx^*,\quad z=kz^*,\quad k=2\pi/\lambda,\quad c_0^2=g/k,$$

где ρ — плотность, P — давление, ξ^* — форма свободной поверхности, ν^* — коэффициент кинематической вязкости, λ — длина волны.

В силу малости волнового параметра ε условия (2), (3) можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z=0$. Для этого вместо скорости волнового движения, динамического давления и их производных в условия (2), (3) нужно подставить их разложения в окрестности $z=0$. Получим:

$$\mathrm{v}-\frac{\alpha^2}{\alpha-t\alpha'}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\xi\mathrm{u})-\varepsilon^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi^2\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}\right)=0,\quad z=0, \tag{5}$$

$$p-\xi-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+\varepsilon\left[\xi\frac{\partial}{\partial z}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\xi\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(p-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)+\right. \tag{6}$$

$$\left.+\nu_0\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(1+\varepsilon\xi\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\right]=0,\quad z=0.$$

Вертикальную составляющую скорости v будем искать в виде $\mathrm{v}=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\beta t}\mathrm{v}_i$, где $\mathrm{v}_i=e^{iz}\left\{A_{1,i}\cos\left[i(x-t)\right]+A_{2,i}\sin\left[i(x-t)\right]\right\}$, β — безразмерный декремент затухания (βkc — размерный).

Решение задачи (1), (4)-(6) будем искать в виде рядов по малому амплитудному параметру ε:

$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\beta t}\mathbf{u}_i\,,\ \mathbf{u}_i=(\mathrm{u}_i,0,\mathrm{v}_i),\ p=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\beta t}p_i\,,\ \xi=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\beta t}\xi_i\,,$$

$$\beta=\tilde{\beta}\left(1+b_1(t)\varepsilon+b_2(t)\varepsilon^2+\ldots\right),\ \alpha=\alpha_0\left(1+a_1(t)\varepsilon+a_2(t)\varepsilon^2+\ldots\right),$$

$$e^{-\beta t}=e^{-\tilde{\beta}t}\left[1-\varepsilon\tilde{\beta}tb_1+\varepsilon^2\tilde{\beta}t\left(\tilde{\beta}tb_1^2/2-b_2\right)+\ldots\right].$$

Подставив эти ряды в уравнения и граничные условия системы (1), (4)-(6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим задачи соответствующих приближений. В первом приближении задача имеет вид (при ε^0):

$$div\mathbf{u}_1=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}-\alpha_0\tilde{\beta}\mathbf{u}_1-\nu_0\Delta\mathbf{u}_1=-\nabla p_1, \tag{7}$$

$$\mathrm{v}_1=\alpha_0\frac{\partial\xi_1}{\partial t}-\alpha_0\tilde{\beta}\xi_1,\quad p_1-\xi_1-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}=0,\quad z=0.$$

Для второго приближения получим (при ε^1):

$$div\mathrm{u}_2=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}-2\alpha_0\tilde{\beta}\mathbf{u}_2-\nu_0\Delta\mathbf{u}_2=-\nabla p_2-(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_1+ \tag{8}$$

$$+\alpha_0e^{\tilde{\beta}t}\left[\tilde{\beta}\mathbf{u}_1(ta_1+tb_1)'-\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$\mathrm{v}_2=\alpha_0\frac{\partial\xi_2}{\partial t}-2\alpha_0\tilde{\beta}\xi_2+\frac{\partial}{\partial x}(u_1\xi_1)+e^{\tilde{\beta}t}\left[\mathrm{v}_1(ta_1)'-\alpha_0\tilde{\beta}\xi_1(tb_1)'\right],\quad z=0,$$

$$p_2-\xi_2-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z}=\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial x},\quad z=0.$$

Для третьего приближения получим (при ε^2):

$$div\mathbf{u}_3=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_3}{\partial t}-3\alpha_0\tilde{\beta}\mathbf{u}_3-\nu_0\Delta\mathbf{u}_3=-\nabla p_3-\left[(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_1+(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_2\right]+ \tag{9}$$

$$+\alpha_0e^{2\tilde{\beta}t}\left\{\left[\tilde{\beta}\mathbf{u}_1-\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}\right]\left[(ta_2)'+\tilde{\beta}tb_1\frac{d}{dt}(ta_1)+t^2\left(a_1^2\right)'\right]+\tilde{\beta}\mathbf{u}_1\left[(tb_2)'+\right.\right.$$

$$+\tilde{\beta}tb_1(tb_1)'+(ta_1)'(tb_1)'\Big]\Big\}+\alpha_0 e^{\tilde{\beta}t}\left[2\tilde{\beta}\mathbf{u}_2(ta_1+tb_1)'-\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$\mathrm{v}_3=\alpha_0\frac{\partial \xi_3}{\partial t}-3\alpha_0\tilde{\beta}\xi_3+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{u}_1\xi_2+\mathbf{u}_2\xi_1+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z}\xi_1^2\right]+$$

$$+e^{2\tilde{\beta}t}\left\{\mathrm{v}_1\left[(ta_2)'-ta_1(a_1)'-a_1(ta_1)'+\tilde{\beta}tb_1(ta_1)'\right]-\right.$$

$$\left.-\alpha_0\tilde{\beta}\xi_1\left[(tb_2)'+\tilde{\beta}tb_1(tb_1)'\right]\right\}+e^{\tilde{\beta}t}\left\{(ta_1)'\left[\mathrm{v}_2-\frac{\partial}{\partial x}(u_1\xi_1)\right]-2\alpha_0\tilde{\beta}\xi_2(tb_1)'\right\},$$

$$z=0,$$

$$p_3-\xi_3-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z}=\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z}-p_2\right)-\nu_0\left(\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_2+\frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x}+\xi_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}\right),$$

$$z=0.$$

Первое приближение (7) совпадает с линейной задачей рассмотренной в [2, 6]. Ее решение имеет вид:

$$\mathrm{u}_1=Ae^z\cos\chi,\quad \mathrm{v}_1=Ae^z\sin\chi,$$

$$p_1=Ae^z(\alpha_0\cos\chi+\nu_0\sin\chi),\quad \xi_1=A(\alpha_0\cos\chi-\nu_0\sin\chi),$$

$$\alpha_0^2+\nu_0^2=1,\quad \tilde{\beta}=\nu_0/\alpha_0,\quad \chi=x-t+d,\quad d=arctg(A_{1,1}/A_{2,1}).$$

Подставив найденные выражения первого приближения в уравнения и граничные условия второго (8), получим задачу:

$$div\mathbf{u}_2=0,$$

$$\alpha_0\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial t}-2\nu_0\mathrm{u}_2-\nu_0\Delta\mathrm{u}_2+\frac{\partial p_2}{\partial x}=Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0(ta_1+tb_1)'\cos\chi-\alpha_0(ta_1)'\sin\chi\right],$$

$$\alpha_0\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial t}-2\nu_0\mathrm{v}_2-\nu_0\Delta\mathrm{v}_2+\frac{\partial p_2}{\partial z}=Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0(ta_1+tb_1)'\sin\chi+\alpha_0(ta_1)'\cos\chi\right]-A^2e^{2z},$$

$$\alpha_0\frac{\partial \xi_2}{\partial t}-2\nu_0\xi_2-\mathrm{v}_2=\mathrm{A}^2(\nu_0\cos2\chi+\alpha_0\sin2\chi)+Ae^{\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0\nu_0(tb_1)'\cos\chi-\right.$$

$$\left.-(\nu_0^2tb_1+ta_1)'\sin\chi\right],\quad z=0,$$

$$p_2-\xi_2-2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial z}=A^2\left[(2\nu_0^2-1/2)\cos2\chi+2\alpha_0\nu_0\sin2\chi+\nu_0^2-1/2\right],\quad z=0.$$

Ее решение имеет вид:

$$a_1=0,\quad b_1=0,\quad \mathrm{u}_2=\frac{2\nu_0A^2e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[(1+4\nu_0^2)\sin2\chi-4\alpha_0\nu_0\cos2\chi\right],$$

$$\mathrm{v}_2 = -\frac{2\nu_0 A^2 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0 \sin 2\chi + \left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right],$$

$$p_2 = A^2\left[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left(\alpha_0 \sin 2\chi - 5\nu_0\cos 2\chi\right) + \left(\nu_0^2 - e^{2z}/2\right)\right],$$

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[\left(1+16\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos 2\chi - 32\alpha_0\nu_0^3 \sin 2\chi\right].$$

Подставив решения первого и второго приближений в уравнения и граничные условия задачи (9) получим:

$$div\mathbf{u}_3 = 0,$$

$$\alpha_0\frac{\partial \mathrm{u}_3}{\partial t} - 3\nu_0\mathrm{u}_3 - \nu_0\Delta\mathrm{u}_3 + \frac{\partial p_3}{\partial \overline{x}} = Ae^z\left\{\left[B_{1,2}e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2+tb_2\right)'\right]\cos\chi + \right.$$

$$\left. + \left[B_{2,2}e^{2z} - \alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2\right)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial t} - 3\nu_0\mathrm{v}_3 - \nu_0\Delta\mathrm{v}_3 + \frac{\partial p_3}{\partial z} = Ae^z\left\{\left[\alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2\right)' - 3B_{2,2}e^{2z}\right]\cos\chi + \right.$$

$$\left. + \left[3B_{1,2}e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2+tb_2\right)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial \xi_3}{\partial t} - 3\nu_0\xi_3 - \mathrm{v}_3 = \frac{9A^3}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[2\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi + \left(1+10\nu_0^2-16\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right] +$$

$$+ A\alpha_0\nu_0\left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(tb_2\right)' + \frac{A^2\left(56\nu_0^2-3\right)}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\right]\cos\chi + A\left[\frac{A^2\left(5-8\nu_0^2\right)\left(1+14\nu_0^2\right)}{8\left(1+24\nu_0^2\right)} - \right.$$

$$\left. - e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\nu_0^2 tb_2 + ta_2\right)'\right]\sin\chi, \quad z=0,$$

$$p_3 - \xi_3 - 2\nu_0\frac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial z} = \frac{A^3}{8}\left\{\nu_0\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 3\chi - \alpha_0\left(3+4\nu_0^2\right)\cos 3\chi + \right.$$

$$\left. + \left[\alpha_0\left(3+160\nu_0^2+448\nu_0^4\right)\cos\chi + \nu_0\left(64\nu_0^2-11-448\nu_0^4\right)\sin\chi\right]/\left(1+24\nu_0^2\right)\right\}, z=0.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$a_2 = \alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6\right),$$

$$b_2 = \alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1-4\nu_0^2+144\nu_0^4-896\nu_0^6\right),$$

$$u_3 = \frac{3A^3 \nu_0 e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \right.$$

$$\left. +\alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right],$$

$$v_3 = \frac{3A^3 \nu_0 e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(288\nu_0^4-1+84\nu_0^2\right)\cos 3\chi + \right.$$

$$\left. +\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right],$$

$$p_3 = \frac{A^3 e^z}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{\nu_0 e^{2z}}{1+48\nu_0^2}\left[54\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi + 3\left(1-102\nu_0^2-144\nu_0^4\right)\right.\right.$$

$$\sin 3\chi\big] + 2\alpha_0\left[1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6+16\nu_0^2 e^{2z}\right]\cos\chi + \nu_0\big[3+36\nu_0^2 +$$

$$\left.+184\nu_0^4-448\nu_0^6-8e^{2z}\left(1+4\nu_0^2\right)\big]\sin\chi\right\},$$

$$\xi_3 = \frac{A^3}{8}\left\{\frac{1}{1+48\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(3+76\nu_0^2-240\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \nu_0\left(5-196\nu_0^2+240\nu_0^4\right)\right.\right.$$

$$\left.\sin 3\chi\big] + \frac{1-28\nu_0^2}{1+24\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(1+12\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos\chi + \nu_0\left(1-28\nu_0^2+32\nu_0^4\right)\sin\chi\right]\right\}.$$

Собирая вместе решения первых трех приближений, получаем выражения для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности с точностью до третьего приближения:

$$\alpha = \alpha_0\left[1+\varepsilon^2\alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6\right)\right],$$

$$\beta = \frac{\nu_0}{\alpha_0}\left[1+\varepsilon^2\alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1-4\nu_0^2+144\nu_0^4-896\nu_0^6\right)\right],$$

$$u = Ae^{-\beta t}\left(e^z\cos\chi + \varepsilon\frac{2\nu_0 A e^{2z-\beta t}}{1+24\nu_0^2}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 2\chi - 4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi\right] + \right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{3A^2\nu_0 e^{3z-2\beta t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \right.$$

$$\left.\left. +\alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right]\right),$$

$$v = Ae^{-\beta t}\left(e^z\sin\chi - \varepsilon\frac{2\nu_0 A e^{2z-\beta t}}{1+24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi + \left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right] + \right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{3A^2\nu_0 e^{3z-2\beta t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \right.$$

$$+\alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\Big]\Big),$$

$$p=Ae^{-\beta t}\Bigg(e^z\left(\alpha_0\cos\chi+\nu_0\sin\chi\right)+\varepsilon Ae^{-\beta t}\Bigg[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left(\alpha_0\sin 2\chi-5\nu_0\cos 2\chi\right)$$

$$+\left(\nu_0^2-e^{2z}/2\right)\Bigg]+\varepsilon^2\frac{A^2e^{z-2\beta t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\Bigg\{\frac{\nu_0 e^{2z}}{1+48\nu_0^2}\Big[54\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi+3(1-$$

$$-102\nu_0^2-144\nu_0^4)\sin 3\chi\Big]+2\alpha_0\left[1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6+16\nu_0^2e^{2z}\right]\cos\chi+$$

$$+\nu_0\left[3+36\nu_0^2+184\nu_0^4-448\nu_0^6-8e^{2z}\left(1+4\nu_0^2\right)\right]\sin\chi\Bigg\}\Bigg),$$

$$\xi=Ae^{-\beta t}\Bigg(\alpha_0\cos\chi-\nu_0\sin\chi+\varepsilon\frac{Ae^{-\beta t}}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\Big[\left(1+16\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos 2\chi-$$

$$-32\alpha_0\nu_0^3\sin 2\chi\Big]+\varepsilon^2\frac{A^2e^{-2\beta t}}{8}\Bigg\{\frac{1}{1+48\nu_0^2}\Big[\alpha_0\left(3+76\nu_0^2-240\nu_0^4\right)\cos 3\chi+$$

$$+\nu_0\left(5-196\nu_0^2+240\nu_0^4\right)\sin 3\chi\Big]+\frac{1-28\nu_0^2}{1+24\nu_0^2}\Big[\alpha_0\left(1+12\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos\chi+$$

$$+\nu_0\left(1-28\nu_0^2+32\nu_0^4\right)\sin\chi\Big]\Bigg\}\Bigg).$$

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов третьего порядка по малому амплитудному параметру. В предельном случае $\nu_0\to 0$ из найденных выражений следуют известные результаты для идеальной жидкости [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes, G.G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Physic. Papers. 1880. V. 1. P. 197-229.

2. Баринов В.А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестник СПбГУ. 2010. Сер. 10. Вып. 2. С. 18-31.

3. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Влияние вязкости жидкости на распространение поверхностных волн // Тр. X Всерос. конф. «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука. 2010. С. 205-208.

4. Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости // Сб. тр. III Регион. конф. «Современ. проблемы математ. и информ. моделирования». Тюмень: Вектор Бук, 2010. С. 32-36.

5. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1870-1883.

6. Joseph, D.D., Wang, J. The dissipation approximation and viscous potential flow // J. Fluid Mech. 2004. V. 505. P. 365-377.

7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.