МАТЕМАТИКА

© А.П. ДЕВЯТКОВ
anglin@mail.ru

УДК 517.57

ГРАНИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В n-МЕРНОМ ШАРЕ

АННОТАЦИЯ. Рассматривается пространство обобщенных функций на единичной сфере евклидова пространства. Устанавливается изоморфизм этого пространства с пространством функций, гармонических в единичном шаре.

SUMMARY. The space of generalized functions on the unit sphere in Euclidian space is considered. The isomorphism of this space with the space of functions harmonic in the unit ball is established.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Обобщенные функции, гармонические функции, интеграл Пуассона.

KEY WORDS. Generalized functions, harmonic functions, Poisson integral.

В статьях [1], [2] Г. Кете рассмотрел пространство $A(S)$ функций, аналитических на единичной окружности S, расположенной в комплексной плоскости C. Определив в $A(S)$ структуру топологического векторного пространства, Кете рассмотрел сопряженное пространство $A'(S)$ и показал, что оно содержит в качестве собственного подпространства пространство $D'(S)$ — пространство распределений Л. Шварца на S. Далее Кете показал, что элементы $u \in A'(S)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с функциями, аналитическими в $\bar{C} \setminus S$ и равными нулю на бесконечности. Это соответствие задается формулой:

$$\tilde{u}(z) = \left\langle u, \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-z} \right\rangle, \quad z \in \bar{C} \setminus S$$

которую естественно интерпретировать как интеграл типа Коши с плотностью u. Кроме того, Кете указал условие на функцию $\tilde{u}(z)$, при котором $\tilde{u}(z)$ соответствует функционалу $u \in D'(S) \subset A'(S)$.

В дальнейшем результаты Кете развивались другими авторами (см., например, [3], [4], [5], [6], [7]). Основное направление этих исследований — представление обобщенных функций различных типов посредством аналитических функций одного или нескольких переменных.

Целью данной работы является построение пространства $A'(S^{n-1})$ обобщенных функций на единичной сфере $S^{n-1} \subset R^n$, обобщающее построение Кете на плоскости, и установление изоморфизма этого пространства с пространством гармонических функций внутри сферы.

Граничные распределения гармонических функций. В n-мерном евклидовом пространстве $R^n (n \geq 2)$ рассмотрим единичный шар $D=\{x \in R^n : |x| < 1\}$ и единичную сферу $S^{n-1}=\partial D$. Через $A(S^{n-1})$ обозначим пространство комплексных функций, аналитических на сфере S^{n-1}.

Лемма 1. *Любая функция $f \in A(S^{n-1})$ продолжается до функции, гармонической в некотором шаре $G=\{x: |x| < r\}$ радиуса $r > 1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что если функция $u(x_1, ..., x_n)$ гармонична в верхней полуокрестности (т.е. при $x_n > 0$) точки $a=(a_1, ..., a_{n-1}, 0)$ и принимает аналитические значения $\varphi(x_1, ..., x_{n-1})$ на гиперплоскости $x_n=0$, то u продолжается до функции, гармонической в некоторой окрестности a.

В окрестности точки a рассмотрим задачу Коши $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - ... - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2}$, $v|_{x_n=0}=\varphi$, $v'_{x_n}|_{x_n=0} = 0$. По теореме Коши-Ковалевской (см., например, [9]) эта задача имеет решение $v(x_1, ..., x_n)$, аналитическое в окрестности точки a. Функция $h=u - v$ гармонична при $x_n > 0$ и равна нулю при $x_n=0$, поэтому в силу принципа отражения (см. [9]) ее можно продолжить в симметричную относительно гиперплоскости $x_n=0$ область по правилу $h(x_1, ..., x_{n-1}, - x_n)=-h(x_1, ..., x_{n-1}, - x_n)$. Тогда функция $u=h + v$ тоже продолжается до гармонической функции в окрестности точки a.

Пусть теперь u — решение задачи Дирихле в единичном шаре D с граничными данными f. Для любой точки $t \in S$ рассмотрим преобразование Кельвина (см. [9]) функции u при инверсии пространства относительно сферы радиуса 2 с центром в точке $-t$. При этом преобразовании точка t останется неподвижной, сфера S^{n-1} перейдет в гиперплоскость, проходящую через t, а преобразованная функция u^* будет гармонической по одну сторону от этой гиперплоскости и на самой гиперплоскости будет принимать аналитические значения. По доказанному u^* продолжается до гармонической функции в некоторой окрестности точки t. Следовательно, то же самое верно и для функции u. Итак, для любой точки $t \in S^{n-1}$ найдется окрестность $U(t)$, в которую u продолжается до гармонической функции. Выделяя по лемме Гейне-Бореля-Лебега из покрытия $\{U(t)\}$ сферы S^{n-1} конечное подпокрытие, получаем, что функция u продолжается до гармонической функции в некоторой окрестности замкнутого шара $\bar{D}$. Лемма доказана.

Рассмотрим последовательность радиусов $\rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_m > ... >$ с $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_m=1$, и соответствующую последовательность шаров $G_m=\{x \in R^n: |x| < \rho_m\}$, $m=1, 2 ...$. Через $hc(\bar{G}_m)$ обозначим банахово пространство функций, непрерывных в $\bar{G}_m$ и гармонических внутри G_m, с нормой $\|f(x)\|_{hc(\bar{G}_m)} = \sup\limits_{x \in \bar{G}_m} |f(x)|$.

Согласно лемме 1 пространство $A'(S^{n-1})$ является объединением всех $hc(\bar{G}_m)$, если отождествлять функции, принадлежащие различным пространствам, но совпадающие на S^{n-1} (а значит, совпадающие и в некотором шаре G_k).

В $A(S^{n-1})$ введем топологию $\mathcal{T}_A$ индуктивного предела последовательности банаховых пространств $hc(\bar{G}_m)$, т.е. сильнейшую локально выпуклую топологию, при которой непрерывны все вложения $hc(\bar{G}_m) \to A(S^{n-1})$, $m=1, 2, ...$ (см., например, [8]).

Окрестностями нуля в топологии $\mathfrak{T}_A$ являются множества $V=V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...)=\overset{\infty}{\underset{m=1}{\Gamma}} V_m(\varepsilon_m)$, где $V_m(\varepsilon_m)$ — окрестность нуля $\|f(x)\|_{hc(\bar{G}_m)}<\varepsilon_m$ в $hc(\bar{G}_m)$, а символ $\overset{\infty}{\underset{m=1}{\Gamma}} V_m(\varepsilon_m)$, обозначает уравновешенную выпуклую оболочку множества $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_m(\varepsilon_m)$, т.е. множество всех функций $f \in A(S^{n-1})$ вида:

$$f=\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_k f_k, \quad f_i \in V_i(\varepsilon_i), \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \le 1,$$

k — произвольное натуральное число.

Последовательность функций $\{f_m\} \subset A(S^{n-1})$ сходится в топологии $\mathfrak{T}_A$ к функции $f_0 \in A(S^{n-1})$ тогда и только тогда, когда все эти функции продолжаются до гармонических функций в некотором шаре G_k и последовательность $\{f_m\}$ равномерно сходится к f_0 в G_k.

Сопряженное пространство $A'(S^{n-1})$, следуя Кете, будем называть пространством граничных распределений на сфере S^{n-1}. Согласно свойствам индуктивного предела, функционал $u \in A'(S^{n-1})$ тогда и только тогда, когда ограничение u на любое банахово пространство $hc(\bar{G}_m)$ непрерывно, т.е. из сходимости последовательности $f_m \to f_0$ в топологии $\mathfrak{T}_A$ следует сходимость $\langle u, f_m\rangle \to \langle u, f_0\rangle$.

Обозначим через $h(D)$ пространство функций, гармонических в единичном шаре $D=\{x \in R^n : |x| < 1\}$. В пространстве $h(D)$ ведем топологию $\mathfrak{T}_h$ при помощи последовательности полунорм $\| g(x) \|_m = \sup\limits_{x \in Q_m} | g(x) |$, где $Q_1 \subset Q_2 \subset ... \subset Q_m \subset ...$ — возрастающая последовательность компактных множеств $Q_m \subset D$ такая, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m = D$.

Далее по мере необходимости точки $x \in R^n$ будем записывать в сферических координатах, т.е. в виде $x=rs$, где $r=|x|$, $s=\arg x \in S^{n-1}$.

Ядро Пуассона для n-мерного единичного шара D имеет вид

$$P(x,t)=P(rs,t)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-|x|^2}{|x-t|^{n/2}}=\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-r^2}{\left(1-2r\cos(\widehat{st})+r^2\right)^{n/2}},$$ где ω_{n-1} — площадь поверхности сферы S^{n-1}, а $\widehat{st}$ угол между векторами s, $t \in S^{n-1}$.

Теорема 1. *Имеет место топологический изоморфизм $A'(S^{n-1}) \cong h(D)$, где $A'(S^{n-1})$ берется в сильной топологии, т.е. в топологии равномерной сходимости на ограниченных в $A(S^{n-1})$ множествах.*

Изоморфизм $A'(S^{n-1}) \to h(D)$ задается формулой

$$\tilde{u}(x)=\langle u, P(x, t)\rangle, \quad x \in D \tag{1}$$

Обратное отображение $h(D) \to A'(S^{n-1})$ задается формулой:

$$\langle u, f\rangle = \lim_{r\to 1-0} \int_{S^{n-1}} \tilde{u}(rs) f(s)\, d\sigma_s, \quad f \in A(S^{n-1}) \tag{2}$$

Здесь $d\sigma_s$ — элемент площади поверхности сферы S^{n-1}.

Доказательство. Покажем, что для любого функционала $u \in A'(S^{n-1})$ формула (1) определяет гармоническую в D функцию $\tilde{u}(x)$. При фиксированном $t \in S^{n-1}$ ядро Пуассона $P(x, t)$ является гармонической функцией по переменной x в шаре $\{x: |x| < 1\}$. Поэтому при фиксированном $x \in D$ функция

$P(x,\ t)=\dfrac{1}{\omega_{n-1}}\dfrac{1-|x|^2}{\left(1-2|x|\cos(\widehat{\arg x \arg t})+|x|^2\right)^{n/2}}$ продолжается со сферы S^{n-1} до функции

$F(x,\ t)=\dfrac{1}{\omega_{n-1}}\dfrac{1-(|x||t|)^2}{\left(1-2|x||t|\cos(\widehat{\arg x \arg t})+(|x||t|)^2\right)^{n/2}}$ $=P(|x|t,\ \arg x)$, гармонической по

t в шаре $\{t:|t|<\dfrac{1}{|x|}\}$. Следовательно, формула (1) корректна. Заметим, что при фиксированном t функция $F(x,t)=P(|t|x,\ \arg t)$ гармонична по x в шаре $\{x:|x|<\dfrac{1}{|t|}\}$. Пусть далее $\Delta_h F(x,\ t)$ — разностная аппроксимация лапласиана по переменной x. Так как $F(x,t)$ — гладкая функция, то предел $\Delta F(x,t)=\lim\limits_{h\to 0}\Delta_h F(x,t)$ существует равномерно по t, лежащим внутри шара $\{t:|t|<\dfrac{1}{|x|}\}$. Учитывая непрерывность функционала u в топологии $\mathfrak{T}_A$, получаем отсюда

$$\tilde{u}(x)=\Delta\langle u,\ P(x,\ t)\rangle=\Delta\langle u,\ F(x,\ t)\rangle=\langle u,\ \Delta\ F(x,\ t)\rangle=0.$$

Покажем, что для любой гармонической в D функции $\tilde{u}(x)$ формула (2) определяет непрерывный линейный функционал $u\in A'(S^{n-1})$.

Пусть $f\in A(S^{n-1})$. Тогда $f\in hc(\bar{G}_k)$ для некоторого номера k. По формуле Пуассона для всех $s\in S^{n-1}$ выполнено $f(s)=\dfrac{1}{\omega_{n-1}}\displaystyle\int_{S^{n-1}}\dfrac{\rho_k^2-1}{\left(\rho_k^2-2\rho_k\cos(\widehat{st})+1\right)^{n/2}}f(\rho_k t)d\sigma_t$, где $\rho_k>1$.

При любом $0<r<1$ имеем:

$$\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)f(s)d\sigma_s=\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)d\sigma_s\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho_k^2-1}{\left(\rho_k^2-2\rho_k\cos(\widehat{st})+1\right)^{n/2}}f(\rho_k t)d\sigma_t=$$

$$=\int_{S^{n-1}}f(\rho_k t)d\sigma_t\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)\frac{\rho_k^2-1}{\left(\rho_k^2-2\rho_k\cos(\widehat{st})+1\right)^{n/2}}d\sigma_s=$$

$$=\int_{S^{n-1}}f(\rho_k t)d\sigma_t\frac{(r/\rho_k)^{n-2}}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)\frac{r^2-(r/\rho_k)^2}{\left(r^2-2r(r/\rho_k)\cos(\widehat{st})+(r/\rho_k)^2\right)^{n/2}}d\sigma_s=$$

$$=(r/\rho_k)^{n-2}\int_{S^{n-1}}f(\rho_k t)\tilde{u}\left(\frac{r}{\rho_k}t\right)d\sigma_t$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)f(s)d\sigma_s=\frac{1}{\rho_k^{n-2}}\int_{S^{n-1}}f(\rho_k t)\tilde{u}\left(\frac{1}{\rho_k}t\right)d\sigma_t, \qquad (3)$$

а значит, функционал u в формуле (2) корректно определен. Линейность его не вызывает сомнений. Покажем, что он непрерывен. Достаточно проверить, что непрерывным является ограничение u на каждое банахово пространство $hc(\bar{G}_k)$. Но из формулы (3) следует, что для любой функции $f \in hc(\bar{G}_k)$ имеет место оценка $\left|\langle u,f\rangle\right| = \left|\frac{1}{\rho_k^{n-2}} \int_{S^{n-1}} f(\rho_k t)\tilde{u}\left(\frac{1}{\rho_k} t\right) d\sigma_t\right| \le M \|f\|_{hc(\bar{G}_k)}$, где $M = \frac{1}{\rho_k^{n-2}} \sup_{|x|=1/\rho_k} |\tilde{u}(x)|$.

Покажем, что отображения (1) и (2) взаимно обратные.

Пусть $u \in A'(S^{n-1})$, и $\tilde{u}(x) = \langle u, P(x,t)\rangle$, $x \in D$ — соответствующая этому функционалу гармоническая функция. Пусть $f \in A'(S^{n-1})$. Тогда для любого $0<r<1$ имеем

$$\int_{S^{n-1}} \tilde{u}(rs) f(s) d\sigma_s = \int_{S^{n-1}} \langle u, P(rs,t)\rangle f(s) d\sigma_s = \left\langle u, \int_{S^{n-1}} P(rs,t) f(s) d\sigma_s \right\rangle = \langle u, f(rt)\rangle$$

Перестановка операции интегрирования и функционала u возможна, т.к. функция $P(rs, t)$ продолжается со сферы S^{n-1} до функции $F(rs, t) = P(rt, s)$ гармонической по t в шаре $\{t : |t| < \frac{1}{r}\}$. Так как функция f является гармонической в некотором шаре G_k, то $f(rt)$ равномерно сходится к $f(t)$ внутри G_k при $r \to 1-0$. Поэтому $\lim_{r\to 1-0} \int_{S^{n-1}} \tilde{u}(rs) f(s) ds_s = \lim_{r\to 1-0} \langle u, f(rt)\rangle = \langle u, f\rangle$.

Обратно, пусть функция $g(x)$ гармонична в шаре D, и $u \in A'(S^{n-1})$ — функционал, определяемый равенством $\langle u, f\rangle = \lim_{r\to 1-0} \int_{S^{n-1}} g(rs) f(s) d\sigma_s$, $f \in A(S^{n-1})$. Тогда

$$\tilde{u}(x) = \langle u, P(x,t)\rangle = \lim_{r\to 1-0} \int_{S^{n-1}} g(rs) P(x,s) d\sigma_s = \lim_{r\to 1-0} g(rx) = g(x),\ x \in D.$$

Таким образом, отображения (1), (2) определяют изоморфизм векторных пространств $A'(S^{n-1})$ и $h(D)$. Остается показать, что отображения (1) и (2) непрерывны.

Нетрудно видеть, что множество B является ограниченным в пространстве $A(S^{n-1})$ тогда и только тогда, когда B целиком лежит в некотором пространстве $hc(\bar{G}_k)$ и B ограничено в $hc(\bar{G}_k)$. Действительно, если $B \subset hc(\bar{G}_k)$ и ограничено в $hc(\bar{G}_k)$, то для любой последовательности функций $\{f_m\} \subset B$ и любой сходящейся к нулю последовательности чисел $\{\alpha_m\}$ будет выполнено $\alpha_m f_m \to 0$ в топологии $\mathcal{T}_A$, а значит, B ограничено в $A(S^{n-1})$. Если $B \subset hc(\bar{G}_k)$ и не ограничено в любом $hc(\bar{G}_m)$ при всех $m \ge k$, то легко построить последовательность функций $\{f_m\} \subset B$ и сходящуюся к нулю последовательность чисел $\{\alpha_m\}$, для которых $\alpha_m f_m \nrightarrow 0$ в топологии $\mathcal{T}_A$. Если же B не лежит ни в каком $hc(\bar{G}_k)$, то найдется последовательность функций $\{f_m\} \subset B$ такая, что $\alpha_m f_m \nrightarrow 0$ в топологии $\mathcal{T}_A$ для любой последовательности чисел $\{\alpha_m\}$. Следовательно, в последних двух случаях множество B будет неограниченным в $A(S^{n-1})$.

Из сказанного следует, что фундаментальную систему окрестностей нуля в сильной топологии пространства $A'(S^{n-1})$ образуют множества $W_{k,m} = \{u \in A'(S^{n-1}) : |\langle u, f\rangle| < 1/m$ при всех $f \in B_k\}$, где B_k — единичный шар $\|f\|_{hc(\bar{G}_m)} \le 1$ банахова пространства $hc(\bar{G}_k)$.

Фундаментальную систему окрестностей нуля пространства $h(D)$ образуют множества $Q_{k,m}=\{G\in h(D):\sup\limits_{x\in Q_k}|g(x)|<1/m\}$, где $Q_k=\{x\in D:|x|\le 1-1/2^k\}$, k=1, 2, ...

Таким образом, каждое из пространств $A'(S^{n-1})$ и $h(D)$ обладает счетной фундаментальной системой окрестностей нуля, а значит, метризуемо [8]. Поэтому для обоснования непрерывности отображения $A'(S^{n-1})\to h(D)$ достаточно проверить, что из сходимости последовательности функционалов $u_m\to 0$ в сильной топологии $A'(S^{n-1})$ следует равномерная сходимость последовательности гармонических функций $\tilde{u}(x)\to 0$ внутри D.

Если $Q=\{x:|x|\le r<1\}$, то множество функций $\{P(x,t)\}_{x\in Q}$ ограничено в пространстве $A(S^{n-1})$. Действительно, подберем k так, чтобы $\rho_k<1/r$. Так как $P(x,t)$ продолжается до функции $F(x,t)=P(|x|t, \arg x)$, гармонической в шаре $\{t:|t|<\frac{1}{|x|}\}$, то $\{P(x,t)\}_{x\in Q}\subset hc(\bar{G}_k)$, причем $\|P(x,t)\|_{hc(\bar{G}_k)}\le\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1+r\rho_k}{(1-r\rho_k)^{n-1}}$ для всех $x\in Q$, т.е. $\{P(x,t)\}_{x\in Q}$ ограничено в $hc(\bar{G}_k)$, а значит, и в $A(S^{n-1})$. Так как $u_m\to 0$ равномерно на ограниченных в $A(S^{n-1})$ множествах, то $\tilde{u}_m(x)=\langle u_m,P(x,t)\rangle\to 0$ равномерно по $x\in Q$.

Аналогично, для обоснования непрерывности отображения $h(D)\to A'(S^{n-1})$. достаточно проверить, что если последовательность гармонических функций $\tilde{u}(x)\to 0$ равномерно внутри D, то соответствующая последовательность функционалов $u_m\to 0$ в сильной топологии $A'(S^{n-1})$.

Пусть B_k — единичный шар $\|f\|_{hc(\bar{G}_m)}\le 1$ банахова пространства $hc(\bar{G}_k)$. Согласно формуле (3) для любого $f\in B_k$ имеем

$$|\langle u_m,f\rangle|=\left|\lim_{r\to 1-0}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}_m(rs)f(s)d\sigma_s\right|=\left|\frac{1}{\rho_k^{n-2}}\int_{S^{n-1}}f(\rho_k t)\,\tilde{u}_m\left(\frac{1}{\rho_k}t\right)d\sigma_t\right|\le\frac{\omega_{n-1}}{\rho_k^{n-2}}\sup_{|x|\le 1/\rho_k}|\tilde{u}_m(x)|$$

Следовательно, $\langle u_m,f\rangle\to 0$ равномерно на любом B_k, а значит, и на любом ограниченном в $A'(S^{n-1})$ множестве. Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Для заданного функционала* $u\in A'(S^{n-1})$ *функционалы* u_r, $0<r<1$, *определяемые равенством* $\langle u_r,f\rangle=\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rs)f(s)d\sigma_s$, $f\in A(S^{n-1})$, *сходятся к* u *в сильной топологии пространства* $A'(S^{n-1})$ *при* $r\to 1-0$.

Доказательство. Действительно, $\langle u_r,f\rangle=\lim\limits_{\rho\to 1-0}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(r\rho s)f(s)d\sigma_s$, $f\in A(S^{n-1})$, поэтому функционалы u_r соответствуют в силу формулы (2) гармоническим функциям $\tilde{u}(rx)$, $x\in D$. Так как $\tilde{u}(rx)$ равномерно сходится к $\tilde{u}(x)$ внутри D при $r\to 1-0$, то по теореме 1 $u_r\to u$, в сильной топологии $A'(S^{n-1})$. Теорема доказана.

Через $D(S^{n-1})$ обозначим пространство функций, бесконечно дифференцируемых на сфере S^{n-1}. В $D(S^{n-1})$ введем топологию $\mathfrak{T}_D$ при помощи последовательности полунорм $|||f|||_p=\sup\limits_{t\in S^{n-1}}|\nabla^p f(t)|$, p=0, 1, 2, ..., где $\nabla^0 f(t)=f(t)$, $|\nabla^p f(t)|=(g^{i_1j_1}\dots g^{i_pj_p}\nabla_{i_1\dots i_p}f(t)\nabla_{j_1\dots j_p}f(t))^{1/2}$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), g^{ij} — метрический тензор на сфере S^{n-1}, $\nabla_{i_1\dots i_p}f(t)=\nabla_{i_1}\dots\nabla_{i_p}f(t)$, ∇_i— ковариантная производная на сфере.

Сопряженное пространство $D'(S^{n-1})$ является пространством распределений Л. Шварца на сфере S^{n-1}.

Теорема 3. *Пространство $A(S^{n-1})$ является плотным подпространством пространства $D(S^{n-1})$ в топологии $\mathfrak{T}_D$.*

Доказательство. Пусть $f \in A(S^{n-1})$. Обозначим тем же символом гармоническую в единичном шаре D функцию, являющуюся решением задачи Дирихле с граничными данными $f(t)$. Тогда функции $f_r(t)=f(rt) \in A(S^{n-1})$ будут сходиться при $r \to 1-0$ к функции $f(t)$ в пространстве $D(S^{n-1})$.

Теорема 4. *Пространство распределений Шварца $D'(S^{n-1})$ является подпространством пространства граничных распределений $A'(S^{n-1})$.*

Доказательство. Действительно, любой функционал $u \in D'(S^{n-1})$ является также непрерывным линейным функционалом в пространстве $A(S^{n-1})$, так как из сходимости последовательности $f_m \to f_0$ в топологии $\mathfrak{T}_A$ следует сходимость $f_m \to f_0$ и в топологии $\mathfrak{T}_D$. Описанное отображение ограничения $D'(S^{n-1}) \to A'(S^{n-1})$ является инъекцией, так как если $u_1, u_2 \in D'(S^{n-1})$ совпадают на $A(S^{n-1})$, то $u_1=u_2$ в силу плотности $A(S^{n-1})$ в $D(S^{n-1})$.

Теорема 5. *Функция $\tilde{u}(x) \in h(D)$ соответствует функционалу $u \in D'(S^{n-1}) \subset A'(S^{n-1})$ тогда и только тогда, когда $|\tilde{u}(x)| \le \dfrac{M}{\delta(x)^p}$ для некоторых $M>0$ и $p=1, 2, \dots$ Здесь $\delta(x)=1-|x|$ — расстояние от точки x до сферы S^{n-1}.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $u \in D'(S^{n-1})$. По определению топологии пространства $D(S^{n-1})$ существует число $m=1, 2, \dots$ такое, что

$$|\langle u, f\rangle| \le C \max\{\sup_{t\in S}|f(t)|, \sup_{t\in S}|\nabla f(t)|, \dots, \sup_{t\in S}|\nabla^m f(t)|\},$$ для всех $f \in D(S^{n-1})$.

Следовательно,

$$|\tilde{u}(rs)| = |\langle u, P(rs,t)\rangle| \le C\max\{\sup_{t\in S}\left|\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-r^2}{\left(1-2r\cos(\widehat{st})+r^2\right)^{n/2}}\right|, \dots, \sup_{t\in S}\left|\nabla^m\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-r^2}{\left(1-2r\cos(\widehat{st})+r^2\right)^{n/2}}\right|\} \le$$

$$\le CK\max\{\frac{1}{\left(1-2r\cos(\widehat{st})+r^2\right)^{n/2}}, \dots, \frac{1}{\left(1-2r\cos(\widehat{st})+r^2\right)^{n/2+m}}\} \le \frac{CK}{(1-r)^{n+2m}},$$

где константа K зависит только от m.

Достаточность. Пусть для функции $\tilde{u}(x) \in h(D)$ имеет место оценка $|\tilde{u}(x)| \le \dfrac{M}{\delta(x)^p}$, где $M>0$, $p=1, 2, \dots$

Рассмотрим разложение $\dfrac{1}{(1-2ra+r^2)^{1/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(a)$, справедливое при малых r и a Функции $P_m(a)$ представляют собой полиномы, известные под названием полиномов Лежандра. Известно, что $|P_m(a)| \le 1$ для всех $a \in [-1, 1]$ и $m=0, 1, 2, \dots$ Так как ряд $\dfrac{1}{1-r} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m$ является мажорантным для ряда $\sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(a)$ при всех $a \in [-1, 1]$, то ряд $\dfrac{1}{(1-r)^n} = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{(n-1)!}r^m$ является мажорантным для ряда $\dfrac{1}{(1-2ra+r^2)^{n/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Q_m(a)$ при всех $a \in [-1, 1]$, т.е. $|Q_m(a)| \le \dfrac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{(n-1)!}$

при всех $a\in[-1, 1]$. Следовательно, в разложении $\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-r^2}{\left(1-2ra+r^2\right)^{n/2}}=\sum_{m=0}^{\infty}r^m\Phi_m(a)$ для функций $\Phi_m(a)$ справедлива оценка $|\Phi_m(a)|\le Am^{n-1}$ для всех $a\in[-1, 1]$ и всех $m=1, 2, \ldots$

Любая гармоническая в шаре D функция $\tilde{u}(x)$ может быть разложена в ряд по однородным гармоническим многочленам $\tilde{u}(rt)=\sum_{m=0}^{\infty}r^mU_m(t)$, где $U_m(t)$ — сферические функции Лапласа (см., например, [10]). Этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри шара D. Функции $U_m(t)$ находятся по формулам

$$U_m(t)=\frac{1}{\rho^{m+n-2}}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(\rho s)\Phi_m(\cos\widehat{st})d\sigma_s, \tag{4}$$

где $0<\rho<1$ — любое число. Для $m=2, 3, 4, \ldots$ положим $\rho_m=1-1/m$. Тогда при всех $t\in S^{n-1}$

$$|U_m(t)|\le\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}\frac{1}{(1-1/m)^{n-2}}\int_{S^{n-1}}\left|\tilde{u}((1-1/m)s)\right|\left|\Phi_m(\cos\widehat{st})\right|d\sigma_s\le e2^{n-2}\omega_{n-1}Mm^pAm^{n-1}.$$

Следовательно, существует $B>0$ такое, что $|U_m(t)|\le Bm^{p+n-1}$ для всех $m=1, 2, \ldots$

Через $\Delta_{S^{n-1}}$ обозначим оператор Лапласа-Бельтрами на сфере S^{n-1}. $\Delta_{S^{n-1}}$ является угловой частью n-мерного оператора Лапласа Δ, а именно $\Delta f=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}f$. Известно, что сферические функции Лапласа степени m являются собственными значениями оператора $\Delta_{S^{n-1}}$, соответствующие собственному значению $-m(m+n-2)$ (это сразу следует из равенства $\Delta(r^mU_m)=0$, записанного в сферических координатах). Известно также, что оператор $\Delta_{S^{n-1}}$ является самосопряженным, в том смысле, что для любых двух функций $g, h\in C^2(S^{n-1})$ справедливо равенство $\int_{S^{n-1}}g\Delta_{S^{n-1}}h\,d\sigma=\int_{S^{n-1}}h\Delta_{S^{n-1}}g\,d\sigma$ (см. [7]).

Пусть $f\in D(S^{n-1})$. Обозначим тем же символом гармоническую в D функцию, являющуюся решением задачи Дирихле с граничными данными $f(t)$. Разложим f в ряд по сферическим функциям Лапласа $f(rt)=\sum_{m=0}^{\infty}r^mX_m(t)$, где $X_m(t)=\int_{S^{n-1}}f(s)\,\Phi_m(\cos\widehat{st})d\sigma_s$. При $m=1, 2, \ldots$ имеем

$$X_m(t)=-\frac{1}{m(m+n-2)}\int_{S^{n-1}}f(s)\Delta_{S^{n-1}}\Phi_m(\cos\widehat{st})d\sigma_s=-\frac{1}{m(m+n-2)}\int_{S^{n-1}}\Delta_{S^{n-1}}f(s)\cdot\Phi_m(\cos\widehat{st})d\sigma_s=$$

$$=\frac{(-1)^q}{(m(m+n-2))^q}\int_{S^{n-1}}\Delta^q_{S^{n-1}}f(s)\cdot\Phi_m(\cos\widehat{st})\,d\sigma_s \text{ для любого } q=1, 2, \ldots$$

Отсюда получаем, что для любого числа $\alpha>0$ существует число $C>0$ такое, что $|X(t)_m|\le\frac{C}{m^\alpha}$ для всех $t\in S^{n-1}$ и всех $m=1, 2, \ldots$

Следовательно, на пространстве $D(S^{n-1})$ корректно определен функционал

$$\langle u,f\rangle=\lim_{r\to 1-0}\int_{S^{n-1}}\tilde{u}(rt)f(t)d\sigma_t=\lim_{r\to 1-0}\int_{S^{n-1}}\sum_{m=0}^{\infty}r^mU_m(t)\sum_{l=0}^{\infty}X_l(t)d\sigma_t=$$

$$=\lim_{r\to 1-0}\sum_{m,l=0}^{\infty}r^m\int_{S^{n-1}}U_m(t)X_l(t)d\sigma_t=\lim_{r\to 1-0}\sum_{m=0}^{\infty}r^m\int_{S^{n-1}}U_m(t)X_m(t)d\sigma_t=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{S^{n-1}}U_m(t)X_m(t)d\sigma_t.$$

Мы использовали свойство $\int_{S^{n-1}}U_m(t)X_l(t)d\sigma_t=0$ при $m\neq l$: сферические функции различных степеней ортогональны (см. [10]).

Предположим, что последовательность функций $f_k\to 0$ в пространстве $D(S^{n-1})$. Покажем, что $\langle u, f_k\rangle\to 0$.

Пусть $f_k(rt)=\sum_{m=0}^{\infty}r^mX_m^{(k)}(t)$. Выберем натуральное число $q>\frac{p+2n}{2}$. Тогда $(m(m+n-2)^q)>m^{p+2n}$ для всех $m=1, 2, \ldots$. Имеем при $m=1, 2, \ldots$,

$$\left|X_m^{(k)}(t)\right|=\left|\frac{(-1)^q}{(m(m+n-2))^q}\int_{S^{n-1}}\Delta_{S^{n-1}}^q f_k(s)\cdot\Phi_m(\cos\widehat{st})d\sigma_s\right|\le\frac{1}{m^{p+2n}}\omega_{n-1}\sup_{s\in S^{n-1}}\left|\Delta_{S^{n-1}}^q f_k(s)\right|Am^{n-1}=\frac{C_k}{m^{p+n+1}}$$

где $C_k=A\omega_{n-1}\sup_{s\in S^{n-1}}\left|\Delta_{S^{n-1}}^q f_k(s)\right|\to 0$ при $k\to\infty$. Далее

$$\left|\langle u,f_k\rangle\right|=\left|\sum_{m=0}^{\infty}\int_{S^{n-1}}U_m(t)X_m^{(k)}(t)d\sigma_t\right|\le\left|\int_{S^{n-1}}U_0(t)X_0^{(k)}(t)d\sigma_t\right|+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{S^{n-1}}\left|U_m(t)\right|\left|X_m^{(k)}(t)\right|d\sigma_t\le$$

$$\le\omega_{n-1}\left|\tilde{u}(0)\right|\left|\int_{S^{n-1}}f_k(s)d\sigma_s\right|+\omega_{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}Bm^{p+n-1}\frac{C_k}{m^{P+n+1}}\le\omega_{n-1}^2\left|\tilde{u}(0)\right|\sup_{s\in S^{n-1}}\left|f_k(s)\right|+\omega_{n-1}BC_k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\to 0$$

при $k\to\infty$. Следовательно, функционал u непрерывен на $D(S^{n-1})$, т.е. $u\in D'(S^{n-1})$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Köthe, G. Die Randverteilungen analytischer Funktionen // Math. Zeitshrift. 1952. Vol. 57. S. 13-33.
2. Köthe, G. Dualität in der Funktionentheorie // J. reine angew. Math. 1953. Vol. 191. S. 30-49.
3. Tillmann, H.G. Randverteilungen analytischer funktionen und Distibutionen // Math. Zeitschrift. 1953. Vol. 59. S. 61-83.
4. Tillmann, H.G. Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen, II // Math. Zeitschrift. 1961. Vol 76. S. 5-21.
5. Sato, M. Theory of Hyperfunctions, I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1959. № 8. P. 139-193.
6. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 277 с.
7. Morimoto, M. Analytic functionals on the sphere: Translations of mathematical monographs. (№ 178). Providence: AMS, 1998. 168 p.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными М.: Мир, 1964. 843 с.
9. Шефер X. Топологические векторные пространства М.: Мир, 1971. 360 с.
10. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций М.: Наука, 1968. 208 с.