© А.Н. ДЕГТЕВ
a.degtev@list.ru

УДК 517.11

О ПОДМНОЖЕСТВАХ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

АННОТАЦИЯ. Пусть A и B рекурсивно перечислимые множества и f — общерекурсивная функция, перечисляющая A без повторений. В точности установлено, к какому классу будет принадлежать f(B), если A и B взяты из классов рекурсивных, креативных, простых, псевдопростых и псевдокреативных множеств, за исключением одного случая.

SUMMARY. Let and be the recursively enumerable sets and is total recursive function., which is enumerate A without repetition. We precisely establish what a set f(B) will be when A and B are from the classes of recursive, creative, simple, pseudosimple and pseuodcreative sets, with the exception the case.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Рекурсивно перечислимое множество, общерекурсивная функция, рекурсивное, креативное, простое, псевдопростое и псевдокреативное множества.

KEY WORDS. Recursively enumerable set, total recursive function, recursive, creative, simple, pseudosimple and pseuodcreative sets.

В работах [1], [2] семейство всех рекурсивно перечислимых множеств (РПМ) было разбито на пять классов: рекурсивных, креативных, простых, псевдопростых и псевдокреативных множеств. В заметках [3], [4] были получены ответы на вопросы: к каким в точности классам могут принадлежать множества $A\oplus B$, $A\cap B$, $A\cup B$ и $A\times B$, если РПМ A и B принадлежат к тем или иным классам, перечисленным выше. В данной статье также полностью решается ряд вопросов, связанных с этими классами.

Пусть A и B — бесконечные РПМ, принадлежащие классам X и Y, f — общерекурсивная функция (ОРФ), перечисляющая множество A без повторений, а $f(B)$ принадлежит классу Z. Тогда говорим, что Y множество в X множестве может (не может) быть Z множеством, если есть (отсутствуют) соответствующие примеры. Например, креативное множество K в любом РПМ будет креативным, так как K m-сводимо к $f(K)$. Поэтому вопросы «креативное множество в ...» ниже не рассматриваются. По этой же причине нерекурсивные РПМ не могут быть рекурсивными ни в каком РПМ.

Следующее предложение также очевидно

Предложение 1. *Рекурсивное, креативное, простое, псевдопростое или псевдокреативное множество в креативном множестве будут соответственно рекурсивным, креативным, простым, псевдопростым или псевдокреативным множеством.*

Небольшое исключение: простое множество в рекурсивном множестве может оказаться простым, когда — $\bar{R}=N\setminus R$ конечное множество.

Следующее предложение Г.Н. Кобзева играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

Предложение [5]. *Если — продуктивное множество и R-РПМ, то $P \cap R$ или $P \cap \bar{R}$ продуктивное множество.*

Следствие 1. *Некреативное РПМ не может быть креативным в простом, псевдопростом или псевдокреативном множествах.*

Предложение 2. *Если S — простое множество, то*

(a) Рекурсивное множество в S будет рекурсивным или псевдопростым множеством и простым, если его дополнение — конечное множество;

(b) Простое и псевдопростое множества в S будут простым и псевдопростым множествами соответственно;

(c) Псевдокреативное множество в S будет псевдокреативным множеством.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) очевидны. Докажем утверждение (c). Пусть A — псевдокреативное множество. По следствию 1 и замечаниям перед предложением 1 достаточно показать, что $B=f(A)$ не может быть псевдопростым множеством. В противном случае, существует РПМ такое, что $C \cup B$ — простое множество. Но, если $C \cap \bar{S}$— конечно, то множество $D=\{x:f(x) \in C\}$ оказывается таким РПМ, что $D \cap A \neq \varnothing$ и $D \cup A$ — простое множество. Иначе $\overline{D \cup A}$ конечно, то есть A — рекурсивное множество. Это противоречит псевдокреативности множества A. □

Следствие 2. *Если T — псевдопростое множество, то*

(a) Рекурсивное множество в будет рекурсивным или псевдопростым множеством;

(b) Простое и псевдопростое множества в T будут псевдопростыми множествами;

(c) Псевдокреативное множество в T будет псевдокреативным множеством.

Доказательство. Все утверждения следуют из предложения 2. Надо лишь заметить, что есть РПМ такое, что $R \cap T=\varnothing$ и $R \cup T$ — простое множество. Поэтому указанные множества в следствии 2 оказываются РПМ в простом множестве $R \cup T$. □

Лемма 1. *Если A — псевдокреативное множество, а B — непересекающееся с ним рекурсивное или псевдопростое множество, то $A \cup B$ будет псевдокреативным множеством.*

Доказательство. Достаточно показать, что $A \cup B$ не может быть псевдокреативным множеством. Иначе существует РПМ C такое, что $(A \cup B) \cap C=\varnothing$ и $A \cup B \cup C$ — простое множество, а так как $A \cap (B \cup C)=\varnothing$, то A оказывается псевдопростым множеством. □

Предложение 3. *Если T — псевдокреативное множество, то*

(a) Рекурсивное множество в T будет рекурсивным, псевдопростым или псевдокреативным множестом;

(b) Псевдопростое множество в T будет псевдопростым или псевдокреативным множеством;

(c) Псевдокреативное множество в T будет псевдокреативным множеством.

Доказательство. Пусть f и g — ОРФ, перечисляющие псевдокреативное и простое множества соответственно и

$$A_0=\{2f(x)+1:x \in N\},\ A_0=\{2g(x):x \in N\},\ A_0=\{2x:x \in N\}$$

$$f_0(x)=\begin{cases} f(y), & \text{если } x=2y+1;\\ x, & \text{если } x=2y.\end{cases} \qquad f_1(x)=\begin{cases} f(y), & \text{если } x=2y+1;\\ g(x), & \text{если } x=2y.\end{cases}$$

По лемме $f_0(A_2)$, $f_1(A_2)$ и $f_1(N)$ будут простым, псевдопростым и псевдокреативным множествами, а $f_0(A_1)$ и $f_1(A_1)$ псевдопростым и псевдокреативным множествами соответственно, хотя по лемме $A_0 \cup A_1$ и $A_0 \cup A_2$ — псевдокреативные, A_2 и N — рекурсивные множества и A_1 — псевдопростое множество соответственно. Осталось показать, что $A=\{fg(x):x\in N\}$ и $B=\{ff(x):x\in N\}$, учитывая следствие 2, не являются псевдопростыми множествами.

Предположим, что для некоторого РПМ C множество $A\cup C$ простое, причем $A \cap C=\varnothing$. Если $D=C \cap (f(N)\setminus A)$ конечно, то $f(N)$ оказывается псевдопростым, хотя $f(N)$ псевдокреативное множество. Если же D бесконечно, то РПМ $\{x:g(x)\in D\}$ будет бесконечным подмножеством, что невозможно.

Наконец, пусть РПМ C такое, что $B\cup C$ простое множество и $B \cap C=\varnothing$. Тогда множество D бесконечно и $E=\{x:f(x)\in D\}$ будет РПМ таким, что $f(N)\cup E$ — простое множество и $f(N) \cap E=\varnothing$, что невозможно. □

Предложение 4. *Если K — креативное множество, то*

(a) *Рекурсивное множество в K будет рекурсивным, псевдопростым, псевдокреативным или креативным множеством*;

(b) *Псевдопростое множество в K будет псевдопростым, псевдокреативным или креативным множеством*;

(c) *Псевдокреативное множество в K будет псевдокреативным или креативным множеством*;

(d) *Простое множество в K может быть креативным множеством.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если W_n — РПМ с постовским номером n, f — продуктивная ОРФ для $\bar{K}$ и $W_n \cap K=\varnothing$, то $K\cup W_n$ — креативное множество. Действительно, существует двухместная ОРФ g такая, что $W_{g(x,y)}=W_x\cup W_y$ для всех x, $y\in N$. Но тогда $f(g(x, n))$ будет продуктивной ОРФ для $\overline{K\cup W_n}$.

Пусть ОРФ f, g и h перечисляют креативное, псевдокреативное и простое множество соответственно, РПМ A_0, A_1, A_2 и ОРФ f_0, f_1 — как в предложении 3, $A_3=\{2h(x):x\in N\}$ и .

$$f_2(x)=\begin{cases} f(y), & \text{если } x=2y+1;\\ h(y), & \text{если } x=2y.\end{cases}$$

Тогда $f_0(N)$, $f_1(A_2)$, $f_2(A_2)$, $f_0(A_2)$ будут креативным, псевдокреативным, псевдопростым и рекурсивным множествами соответственно. Этим самым доказано утверждение (a), хотя по замечанию выше $f_1(A_2) \cup K$, $f_2(A_2)\cup K$ и $f_0(A_2)$ — креативные множества, так как $f_1(A_2) \cap K=f_2(A_2) \cap K=f_0(A_2) \cap K=\varnothing$.

РПМ A_1 и A_3 будут псевдокреативным и псевдопростым, как и $f_0(A_1)$ и $f_0(A_3)$, множествами соответственно, $f_1(A_3)$ — псевдокреативным множеством, как простое в псевдокреативном, и $f_0(A_1 \cup \bar{A}_2)$, $f_0(A_3 \cup \bar{A}_2)$, $f_0(A_4)$ будут креативными множествами, хотя $A_1 \cup \bar{A}_2$, $A_3 \cup \bar{A}_2$ и $A_4=\{2x:x\in A_3\}$ будут псевдокреативным, простым и псевдопростым множествами соответственно. Наконец, псевдокреативное множество в креативном, как и в псевдокреативном, не может быть псевдопростым множеством. □

Вопрос: верно ли, что простое множество в креативном всегда креативное множество? Заметим, что если это не так, то оно будет псевдокреативным множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Post, E.L. Recursively enumerable sets and their decision problems // Bull.Amer. Math.Soc. 1944. V. 50, P. 284-316.

2. Успенский В.А. Несколько замечаний о перечислимых множествах // Z. Math. Logik ung Grundl.Math. 1957, V.3. P. 157-170.

3. Дегтев А.Н., Кладова Е.В. Об операциях над рекурсивно перечислимыми множествами // Вестник ТюмГУ. Тюмень. 1998. № 2. С. 3-7.

4. Дегтев А.Н., Долгих А.В. Об операциях над рекурсивно перечислимыми множествами // Вестник ТюмГУ. Тюмень, 1999, № 3, С. 146-149.

5. Кобзев Г.Н. О полной ttt-степени // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 1. С. 22-25.