© К.Ю. БАСИНСКИЙ
kbasinsky@mail.ru

УДК 532.591:532.133

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

АННОТАЦИЯ. Приводится постановка нелинейной краевой задачи о распространении капиллярно-гравитационных волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости. Решение задачи находится методом переменной во времени частоты, являющимся обобщением метода Стокса для диссипативных волновых процессов. Найдено асимптотическое решение с точностью третьего приближения по волновому параметру.

SUMMARY. The article states the nonlinear boundary value problem of propagation of capillary-gravity waves on the free surface of low viscous fluids. The solution is found by the method of time-varying frequency, which is a generalization of Stokes' method for dissipative wave processes. The asymptotic solution up the third approximation to the wave parameter has been found.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Поверхностные волны, вязкость, частота, декремент затухания, поверхностное натяжение.

KEY WORDS. Superficial waves, viscosity, frequency, decrement of attenuation, surface tension.

Рассматривается распространение капиллярно-гравитационной волны длиной λ в направлении оси x^* по свободной поверхности $z^*=\xi^*(t^*, x^*)$ бесконечно глубокого слоя вязкой несжимаемой жидкости. Ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести $\mathbf{g}$, плоскость $z^*=0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Волновое движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^*=(u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой там, где это необходимо обозначены физические (размерные) величины.

В работе [1] показано, что в случае пологих волн x^*-ой компонентой нормальной проекции тензора скачка напряжения можно пренебречь по сравнению с z^*-ой компонентой. Кроме того, если отношение вязкой частоты к частоте в идеальной жидкости не превышает 0.4, то решение задачи можно искать в виде затухающих потенциальных волн. Эти ограничения определяют модель волнового движения слабовязкой жидкости. Чтобы решать соответствующую нелинейную краевую задачу первым методом Стокса [2], частоту волны полагаем неизвестной функцией времени. В работе [3] эта задача решена для гравитационных волн. В данной работе рассматриваются капиллярно-гравитационные волны, т.е. распространение волн с учетом силы поверхностного натяжения.

Нелинейная краевая задача о волновом движении слабовязкой жидкости в безразмерном виде запишется

$$div\,\mathbf{u}=0, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha-t\alpha'}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}-\nu_0\Delta\mathbf{u}+\nabla p=-\varepsilon(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} \qquad (1)$$

$$v-\frac{\alpha^2}{\alpha-t\alpha'}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\varepsilon u\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad z=\varepsilon\xi, \tag{2}$$

$$p-\gamma_0^2\xi+\kappa_0^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}-2\nu_0\frac{\partial v}{\partial z}=-\varepsilon\nu_0\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad z=\varepsilon\xi, \tag{3}$$

$$u\to 0,\ z\to-\infty$$

Здесь $\alpha=c/c_0=\omega/\omega_0$, $\alpha'=d\alpha/dt$, $c=c(t)$, $\omega=\omega(t)$ — истинная фазовая скорость и частота волны соответственно, ω_0, c_0 — частота и фазовая скорость волны линейной задачи для идеальной жидкости.

Безразмерные и физические величины связаны равенствами:

$$\mathbf{u}^*=\varepsilon c_0\mathbf{u},\ p^*=\varepsilon\rho c_0^2p,\ p^*=P-P_\alpha+\rho gz,\ \xi^*=\varepsilon\xi/k$$

$$\nu_0=\nu^*k/c_0,\ t=kct^*,\ x=kx^*,\ z=kz^*,\ k=2\pi/\lambda,\ c_0^2=c_g^2+c_\sigma^2$$

$$c_g^2=g/k,\ c_\sigma^2=\sigma k/\rho,\ \gamma_0^2=c_g^2/c_0^2,\ \kappa_0^2=c_\sigma^2/c_0^2,\ \gamma_0^2+\kappa_0^2=1$$

где ρ — плотность, P — давление, P_a — атмосферное давление, ξ^* — форма свободной поверхности, ν^* — коэффициент кинематической вязкости, λ — длина волны, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

В силу малости волнового параметра ε условия (2), (3) разложением в ряд Маклорена входящих в них функций можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z=0$.

Скорость волнового движения будем искать в виде затухающих прогрессивных волн

$$\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}e^{-n\beta t/\alpha}\mathbf{u}_n,\quad \mathbf{u}_n=(u_n,0,v_n),\quad v_n=e^{nz}\left\{A_n\cos n\bar{x}+B_n\sin n\bar{x}\right\},$$

$$u_n=e^{nz}\left\{B_n\cos n\bar{x}-A_n\sin n\bar{x}\right\},\quad \bar{x}=x-t.$$

Здесь $\beta(t)$ — безразмерный декремент затухания ($\beta^*=\beta kc_0$ — размерный).

Остальные неизвестные функции будем также искать в виде рядов по малому параметру ε:

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}e^{-n\beta t/\alpha}p_n,\quad \xi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}e^{-n\beta t/\alpha}\xi_n,$$

$$\alpha=\alpha_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n a_n(t)\right),\quad \beta=\beta_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n b_n(t)\right),$$

$$e^{-\beta t/\alpha}=e^{-\beta_0 t/\alpha_0}\left[1+\varepsilon\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}(a_1-b_1)+\varepsilon^2\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}\left(a_2-b_2+a_1b_1-a_1^2+\frac{\beta_0 t}{2\alpha_0}(b_1-a_1)^2\right)+\ldots\right],$$

где α_0, β_0 — безразмерные частота и декремент затухания, соответствующие линейной задаче.

Подставив в уравнения (1) и разложенные в окрестности $z=0$ граничные условия (2), (3) вместо $\mathbf{u}$, p, ξ, α, β ряды и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем задачи соответствующих приближений. В первом (линейном) приближении задача имеет вид: при ε^0

$$div\,\mathbf{u}_1=0,\quad \alpha_0\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}-\beta_0\mathbf{u}_1-\nu_0\Delta\mathbf{u}_1+\nabla p_1=0,\tag{4}$$

$$v_1=\alpha_0\frac{\partial\xi_1}{\partial t}-\beta_0\xi_1,\quad p_1-\gamma_0^2\xi_1+\kappa_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}-2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}=0,\quad z=0;$$

для второго приближения: при ε^1

$$div\,\mathbf{u}_2=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}-2\beta_0\mathbf{u}_2-\nu_0\Delta\mathbf{u}_2+\nabla p_2=-(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_1+$$

$$+e^{\beta_0 t/\alpha_0}\left[\beta_0\mathbf{u}_1(tb_1)'-\alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$v_2=\alpha_0\frac{\partial\xi_2}{\partial t}-2\beta_0\xi_2+\frac{\partial}{\partial x}(u_1\xi_1)+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0(ta_1)'\frac{\partial\xi_1}{\partial t}-\beta_0\xi_1(tb_1)'\right],\quad z=0,$$

$$p_2-\gamma_0^2\xi_2+\kappa_0^2\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2}-2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z}=\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial x},\quad z=0;$$

для третьего приближения: при ε^2

$$div\,\mathbf{u}_3=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_3}{\partial t}-3\beta_0\mathbf{u}_3-\nu_0\Delta\mathbf{u}_3=-\nabla p_3-[(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_1+(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_2]+$$

$$+e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{-\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}\left[\alpha_0(ta_2)'+\beta_0(ta_1)'(tb_1-ta_1)+\alpha_0t^2\left(a_1'\right)^2\right]+\beta_0\mathbf{u}_1\left[(tb_2)'+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'(tb_1-ta_1)+t^2a_1'b_1'\right]\right\}+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[2\beta_0\mathbf{u}_2(tb_1)'-\alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$v_3=\alpha_0\frac{\partial\xi_3}{\partial t}-3\beta_0\xi_3+\frac{\partial}{\partial x}\left[u_1\xi_2+u_2\xi_1+\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial z}\xi_1^2\right]+e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\left[\alpha_0(ta_2)'+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha_0\left(a_1'\right)^2t^2+\beta_0(ta_1)'(tb_1-ta_1)\right]-\beta_0\xi_1\left[(tb_2)'+\frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'(tb_1-ta_1)+\right.$$

$$\left.\left.+t^2a_1'b_1'\right]\right\}+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\alpha_0(ta_1)'\frac{\partial\xi_2}{\partial t}-2\beta_0\xi_2(tb_1)'\right\},\quad z=0,$$

$$p_3-\gamma_0^2\xi_3+\kappa_0^2\frac{\partial^2\xi_3}{\partial x^3}-2\nu_0\frac{\partial v_3}{\partial z}=\frac{3}{2}\kappa_0^2\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}+\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z}-p_2\right)-\nu_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_2+\frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right),\quad z=0.$$

Первое приближение (4) совпадает с линейной задачей, рассмотренной в [1], [4]. Ее решение имеет вид:

$$\mathbf{u}_1=Ae^z(\cos\chi,\ \sin\chi),\ p_1=Ae^z(\alpha_0\cos\chi+\nu_0\sin\chi)$$

$$\xi_1=A_1(\alpha_0\cos\chi+\nu_0\sin\chi),\ \chi=x-t+\theta,\ A=\sqrt{A_1^2+B_1^2},$$

$$\theta = arctg(A_1/B_1),\ \alpha_2^0 + \nu_0^2 = 1,\ \beta_0 = \nu_0$$

Здесь θ — начальная фаза волны.

Подставляя решения предыдущих приближений в последующие, получаем задачи в явном виде — системы линейных неоднородных уравнений. Разрешая их, получаем выражения для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности с точностью до третьего приближения. Здесь приведены только выражения для частоты и декремента затухания (дисперсионные соотношения)

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + \varepsilon^2 A^2 \alpha_0 \frac{1 - e^{-2\nu_0 t_0/\alpha}}{864\gamma_0^6 \nu_0 t} \left[32 - 72\gamma_0^2 + 108\gamma_0^4 + 27\gamma_0^6 + \right.\right.$$

$$+81\gamma_0^8 + 12\gamma_0^2\nu_0^2\left(27\gamma_0^6 + 9\gamma_0^4 - 12\gamma_0^2 - 16\right) + 288\gamma_0^4\nu_0^4\left(3\gamma_0^2 + 4\right) +$$

$$\left.\left. + 8\left(3\gamma_0^2 - 2\right)\left(4 - 3\gamma_0^2\right)\left(9\gamma_0^4 - 6\gamma_0^2 + 2\right)\left(\left(3\gamma_0^2 - 2\right)^2 + 24\gamma_0^2\nu_0^2\right)^{-1} \right] \right\}, \tag{5}$$

$$\beta = \nu_0 \left\{ 1 + \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-2\nu_0 t/\alpha}}{864\gamma_0^6 \nu_0 t} \left[81\gamma_0^8 + 135\gamma_0^6 - 36\gamma_0^4 - 24\gamma_0^2 - \right.\right.$$

$$-32 + 12\gamma_0^2\nu_0^2\left(1 + 3\gamma_0^2\right)\left(16 + 12\gamma_0^2 - 9\gamma_0^4\right) - 288\gamma_0^4\nu_0^4\left(3\gamma_0^2 + 4\right) +$$

$$\left.\left. + 8\left(4 - 3\gamma_0^2\right)\left(3\gamma_0^2 + 2\right)\left(9\gamma_0^4 - 6\gamma_0^2 + 2\right)\left(\left(3\gamma_0^2 - 2\right)^2 + 24\gamma_0^2\nu_0^2\right)^{-1} \right] \right\}.$$

Из найденных выражений для относительной частоты и декремента затухания волны следует, что свое максимальное конечное значение они принимают в начальный момент и с течением времени стремятся к значениям, соответствующим линейной задаче. Если коэффициент поверхностного натяжения σ положить равным нулю ($\kappa_0^2=0$, $\gamma_0^2=1$), то выражения (5) переходят в выражения, полученные в работе [3].

Графики зависимости фазовой скорости и декремента затухания волны длины 1 м и относительной высоты 0.1 ($\varepsilon=0.1$), распространяющейся по поверхности воды ($\nu_0=5\cdot10^{-6}$), представлены на рисунках 1 и 2 соответственно. Максимальные значения фазовая скорость и декремент принимают в начальный момент времени. Из графиков видно, что нелинейная фазовая скорость и декремент стремятся к своим линейным значениям. Фазовая скорость волны при $\sigma=73\cdot10^{-3}$ Н/м имеет большие значения, чем фазовая скорость при $\sigma=0$, и по мере затухания эта разница возрастает. Соответствующие графики для декремента затухания совпадают. Таким образом, капиллярно-гравитационная волна движется быстрее гравитационной, но при этом амплитуды их убывают с одной скоростью.

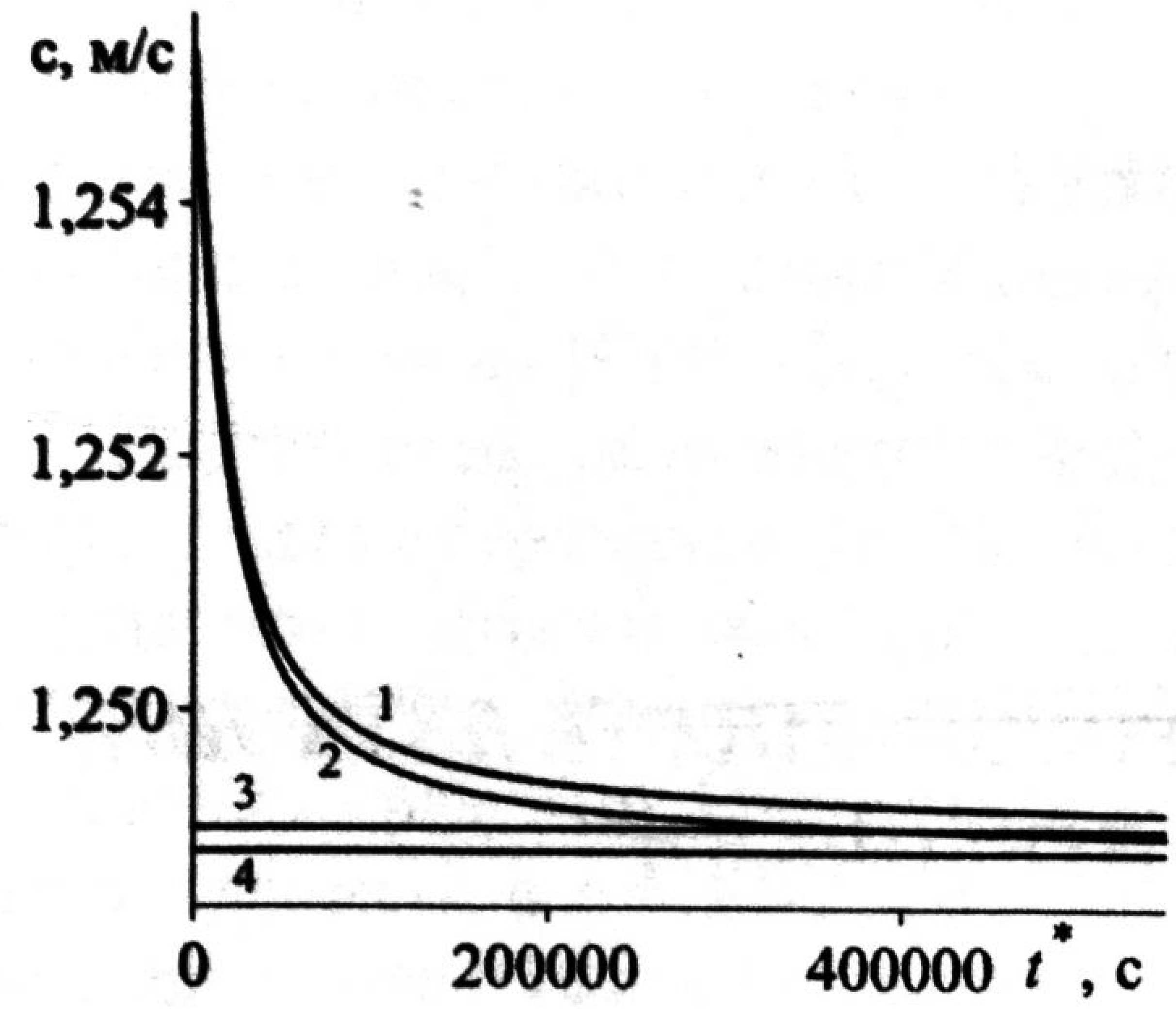

Рис. 1. Зависимость $c(t^*)$ для воды при λ=1 м, ε=0.1, A=1: линия 1 — $c(t^*)$ при σ=73·10^{-3} Н/м, линия 2 — $c(t^*)$ при σ=0, линии 3, 4 — фазовые скорости линейной задачи при σ=73·10^{-3} Н/м и σ=0 соответственно

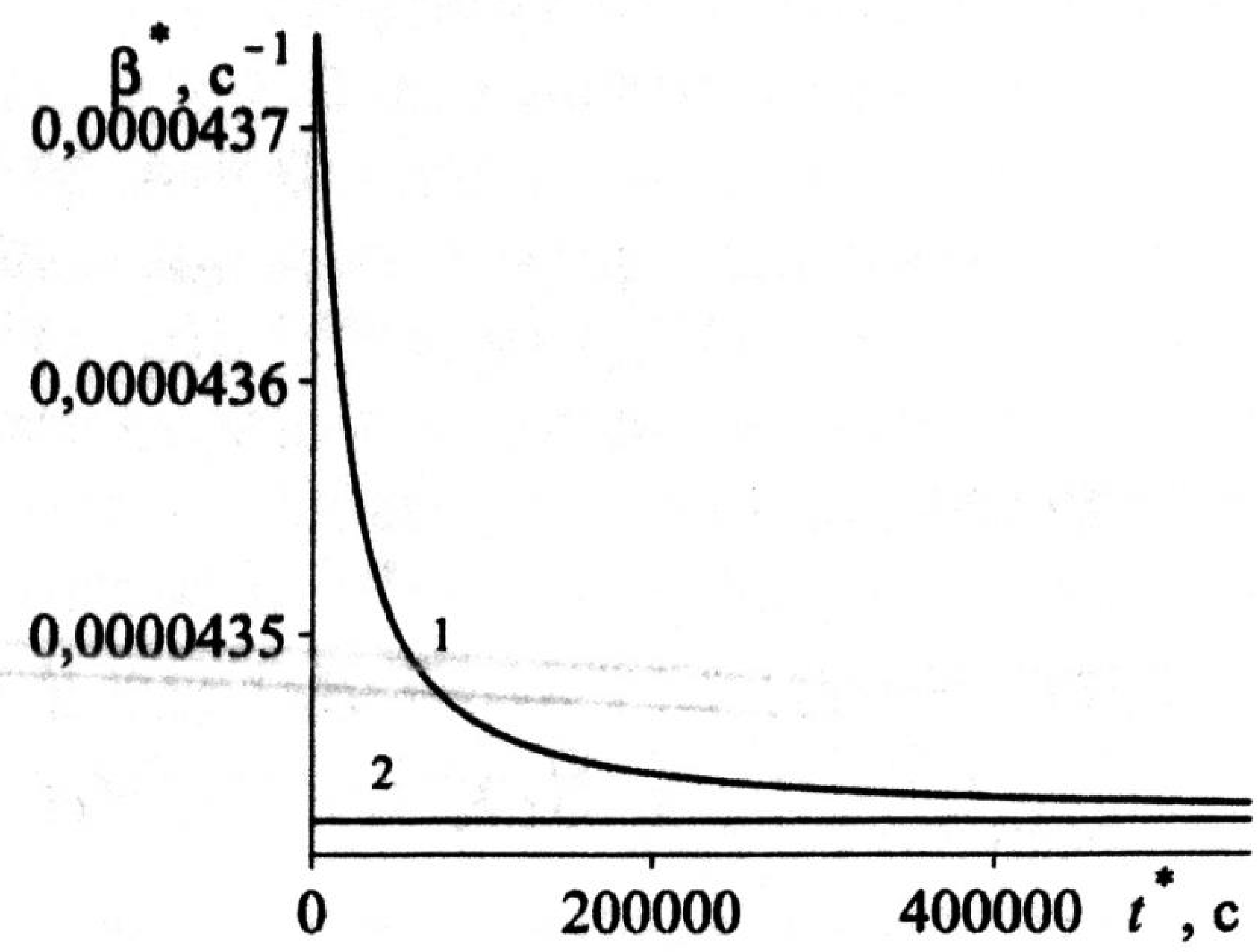

Рис. 2. Зависимость $\beta^*(t^*)$=0 для воды при λ=1 м, ε=0.1, A=1: линия 1 — $\beta^*(t^*)$ при σ=73·10^{-3} Н/м, и σ=0, линия 2 — декремент затухания линейной задачи при σ=73·10^{-3} Н/м и σ=0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баринов В.А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2010. Сер.10. Вып. 2. С. 18-31.

2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

3. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2011. Сер.10. Вып. 2. С. 82-89.

4. Joseph, D.D., Wang, J. The dissipation approximation and viscous potential flow // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 505. P. 365-377.