© В.А. МАТВЕЕВ

matveev176@rambler.ru

УДК 519.833

УТОЧНЕННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ЛИЦ С ВЕКТОРНЫМИ ВЫИГРЫШАМИ

АННОТАЦИЯ. Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц с векторными выигрышами и определяется конусное равновесие. В работе такое решение уточняется посредством отношения предпочтения по конусу в пространстве критериев. Приводится пример, показывающий, что предложенная процедура позволяет выделить единственное равновесие.

SUMMARY. The two-persons game with vector payoff is considered. The cone equilibrium is defined. This decision is defined by the cone preference relation in criteria space. The given example shows that the offered procedure allows to single out the unique decision.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Векторный выигрыш, бескоалиционная игра, равновесие по Нэшу, оптимальность по конусу.

KEY WORDS. Vector payoff, noncooperative game, Nash equilibrium, cone optimality.

В работе рассматривается математическая модель взаимодействия (сотрудничества и соперничества) двух лиц, каждый из которых имеет свой набор действий X и Y соответственно. Особенностью модели является то, что результат взаимодействия для каждого лица представлен не одним критерием, а конечным набором показателей. Для простоты изложения в работе рассматривается игровая задача двух лиц с векторной двухкомпонентной функцией выигрыша у каждого игрока. Случай произвольного конечного набора игроков и векторных выигрышей, с соответствующими изменениями, изучается по аналогичной схеме.

Ситуации принятия решения более чем одним лицом и конечным набором целей (по крайней мере, у одной стороны их две или более) может быть представлена многокритериальной игрой или, альтернативное название, — игрой с векторными выигрышами. Игровые задачи с векторными выигрышами изучаются уже давно [1], [2]. Краткий исторический обзор и последние результаты представлены в [3]. В этой работе отмечается, что «многокритериальные игры могут быть использованы при моделировании различных явлений, когда в расчет приходится брать несколько различных критериев, например, при моделировании политики или менеджмента».

Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц с векторным двухкритериальным выигрышем $f^{(1)}(x, y)$ у первого и $f^{(2)}(x, y)$ у второго игрока

$$\langle X, Y, F(x, y)\rangle = \langle X, Y, (f^{(1)}(x, y), f^{(2)}(x, y))\rangle$$

$$f^{(1)}(x, y) = (f_1^{(1)}(x, y), f_2^{(1)}(x, y)), \qquad f^{(2)}(x, y) = (f_1^{(2)}(x, y), f_2^{(2)}(x, y)) \qquad (1)$$

Здесь множество $X \subset R^k$ $(Y \subset R^l)$ состоит из стратегий первого (второго) игрока. Набор из стратегий двух игроков $(x, y) \in X \times Y$ называется ситуацией и множество всех ситуаций $X \times Y$. Задана векторная функция $f^{(1)}: X \times Y \to R^2 (f^{(2)}: X \times Y \to R^2)$, которая каждой ситуации ставит в соответствие вектор выигрышей первого (второго) игрока $f^{(1)}(x, y) = (f_1^{(1)}(x, y), f_2^{(1)}(x, y))$, $(f^{(2)}(x, y) = (f_1^{(2)}(x, y), f_2^{(2)}(x, y)))$.

Партия игры развивается следующим образом: каждый из двух игроков выбирает свою стратегию, в результате чего складывается ситуация $(x, y) \in X \times Y$. После этого игроки получают свои выигрыши $f^{(1)}(x, y) = (f_1^{(1)}(x, y), f_2^{(1)}(x, y))$ и $f^{(2)}(x, y) = (f_1^{(2)}(x, y), f_2^{(2)}(x, y))$, равные значению своей векторной функции в сложившейся ситуации. Цель обоих игроков состоит в выборе такой своей стратегии, чтобы достичь возможно большего значения каждой из двух компонент своей векторной функции выигрыша, учитывая при этом выбор другого игрока.

В задаче (1) каждый игрок решает многокритериальную задачу при фиксированном выборе другого игрока. В [4; 58-59] отмечено, что «кандидатом» на оптимальное решение в многокритериальной задаче может являться только Парето-оптимальный исход. Однако Парето-оптимальных решений в задаче (1) может быть несколько, а в непрерывном случае даже бесконечное множество.

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в задачах с векторным выигрышем предлагают конусные отношения. В многокритериальных задачах такой подход представлен в [5], [6]. Будем рассматривать выпуклый, острый, многогранный (полиэдральный) пространственный конус $K \subset R^2$ [7; 235-255]. Конус порождает в векторном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq$ по правилу

$$f^{(1)} \geq f^{(2)} \Leftrightarrow f^{(1)} \geq f^{(2)} \in K. \tag{2}$$

Такой конус K называют конусом доминирования в R^2. Часто рассматривается многогранный конус, который можно задать матрицей, именно,

$$K = \{f \in R^2 \mid Af \geq 0_{(2)}\} \tag{3}$$

Будем считать, что матрица A является неотрицательной, т.е. $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной и, в специально оговоренных случаях, неразложимой [8; 352].

Важными примерами многогранных конусов являются

$$R_{\geq}^2 = \{x \in R^2 \mid Ex \geq 0_{(2)}\} = \{x \in R^2 \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2\} \tag{4}$$

и его внутренность

$$R_{>}^2 = \{x \in R^2 \mid Ex > 0_{(2)}\} = \{x \in R^2 \mid x_i > 0,\ i = 1, 2\}, \tag{5}$$

где E — единичная матрица в R^2. Здесь и далее считаем, что многогранный конус не содержит нулевой вектор. Использование векторной упорядоченности (2) позволяет определить в задаче (1) равновесия, оптимальные по конусу K.

Определение 1. Ситуация $(x^*, y^*) \in X \times Y$ называется равновесием по конусу K в игре двух лиц с векторным выигрышем (1), если выполнены два условия

$$\forall x \in X\ f(x, y^*) - f(x^*, y^*) \notin K, \qquad \forall y \in Y\ f(x^*, y) - f(x^*, y^*) \notin K$$

Множество таких решений будем обозначать $S_K(X, Y)$.

Определение равновесия по конусу в игровой задаче (1) является достаточно общим. Оно включает в себя, как частный случай, равновесие Нэша-Парето (Нэша-Слейтера) [9; 233]. Действительно, такие решения получаются из определения 1, если в качестве конуса доминирования использовать конус $R_{\geq}^{2}$ из (4) (конус $R_{>}^{2}$ из (5)). Множество равновесий Нэша-Парето (Нэша-Слейтера) будем обозначать $S_P(X, Y)(S_S(X, Y))$.

Как правило, игровая задача с векторными выигрышами имеет бесконечное множество равновесий по Нэшу-Парето. Так, в [1] в примере 2.3 (игра «производство — инспекция») исследуются бескоалиционные игры двух лиц с векторными выигрышами. Эта игра имеет бесконечное множество равновесных по Парето решений. Сокращение множества равновесных решений, тем более выбор единственного наилучшего решения, является важной задачей.

В задаче (1) каждый игрок решает многокритериальную задачу при фиксированном выборе другого игрока. Используем терминологию и обозначения из [10], [11]. Моделью является многокритериальная задача. Это система

$$\langle X, f^{(1)}(x)\rangle \tag{6}$$

Задано множество допустимых альтернатив $x \in X \subset R^k$, среди которых лицо, принимающее решение (ЛПР), делает свой выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_1^{(1)}(x, y)$, $f_2^{(1)}(x, y)$ являются позитивными [4; 55]. Тогда, на содержательном уровне, цель ЛПР состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно двум компонентам векторной функции выигрыша $f^{(1)}(x)=(f_1^{(1)}(x, y), f_2^{(1)}(x, y))$.

Определение конусного оптимума основано на векторной упорядоченности (2) и многогранный конус определен посредством матрицы (3). Именно [6; 170], оптимальное по конусу решение в многокритериальной задаче (6) есть $x \in {}^*X$ что выполнено условие

$$\forall x \in X \; f(x) - f(x^*) \notin K$$

Свойства такого решения представлены в [6; 170-171]. Так, если в многокритериальной задаче (6) множество альтернатив $X \subset R^k$ компактно, векторная функция выигрыша $f^{(1)}: R^k \to R^2$ непрерывна, конус доминирования K в критериальном пространстве R^2 является выпуклым, острым, то существует альтернатива, оптимальная по конусу K. Пусть в многокритериальной задаче (6) заданы конусы доминирования K_1 и K_2 и $X_1^* \subset X$, $X_2^* \subset X$ множества альтернатив, оптимальных по конусу K_1, K_2 соответственно. Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.

Многокритериальная задача (6) является задачей в условиях неопределенности, именно в условиях неопределенности цели. Для уточнения решения (уменьшения степени неопределенности) можно использовать дополнительную информацию. Это могут быть мнения экспертов. В качестве примера рассмотрим случай, когда два эксперта оценили важность (вес) критериев: первый эксперт указал отношение важности, как 7:3, а второй эксперт — 1:1. Эти отношения важности критериев верны для первого и второго игроков. Такая информация позволит определить матрицу A и соответствующий двухгранный конус (3), как

$$K=\{x\in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_{(2)}\}. \tag{7}$$

Пример. Рассмотрим первую двухкритериальную задачу (6). Множество стратегий $X=\{x\in R^2 \mid 2x_1+5x_2\leq 10,\ x_i\geq 0,\ i=1,\ 2\}$. Оно представлено на рис. 1 треугольником OTP. Задан векторный двухкритериальный выигрыш $f^{(1)}(x)=(f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x))=(x_1, x_2)$. В такой задаче максимальных по Слейтеру (и по Парето) решений бесконечно много и их множество $X^*=\{x^*\in R^2 \mid 2x_1^* + 5x_2^*=10,\ x_i^*\geq 0,\ i=1,\ 2\}$. Оно представлено отрезком TP на рис.1. В то же время оптимальным по конусу K из (7) является единственный исход $f^{(1)*}(x)=(f_1^{(1)*}(x), f_2^{(1)*}(x))=(5,0)$. По условию многокритериальной задачи оптимальной по конусу K стратегией будет такая же пара $x^*=(x_1^*, x_2^*)=(5,0)$.

Множество всех таких решений представлено ломаной линией AQB на рис. 2.

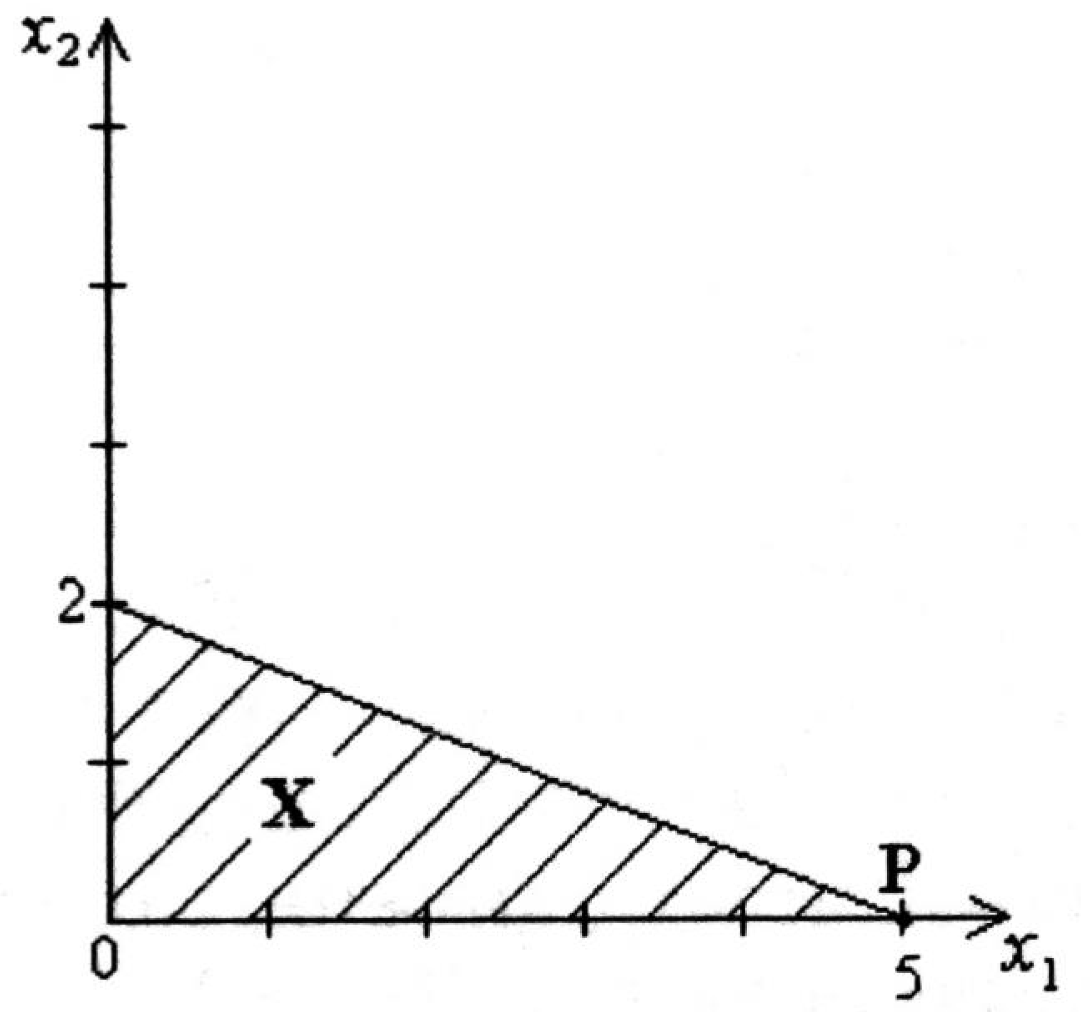

Рис. 1

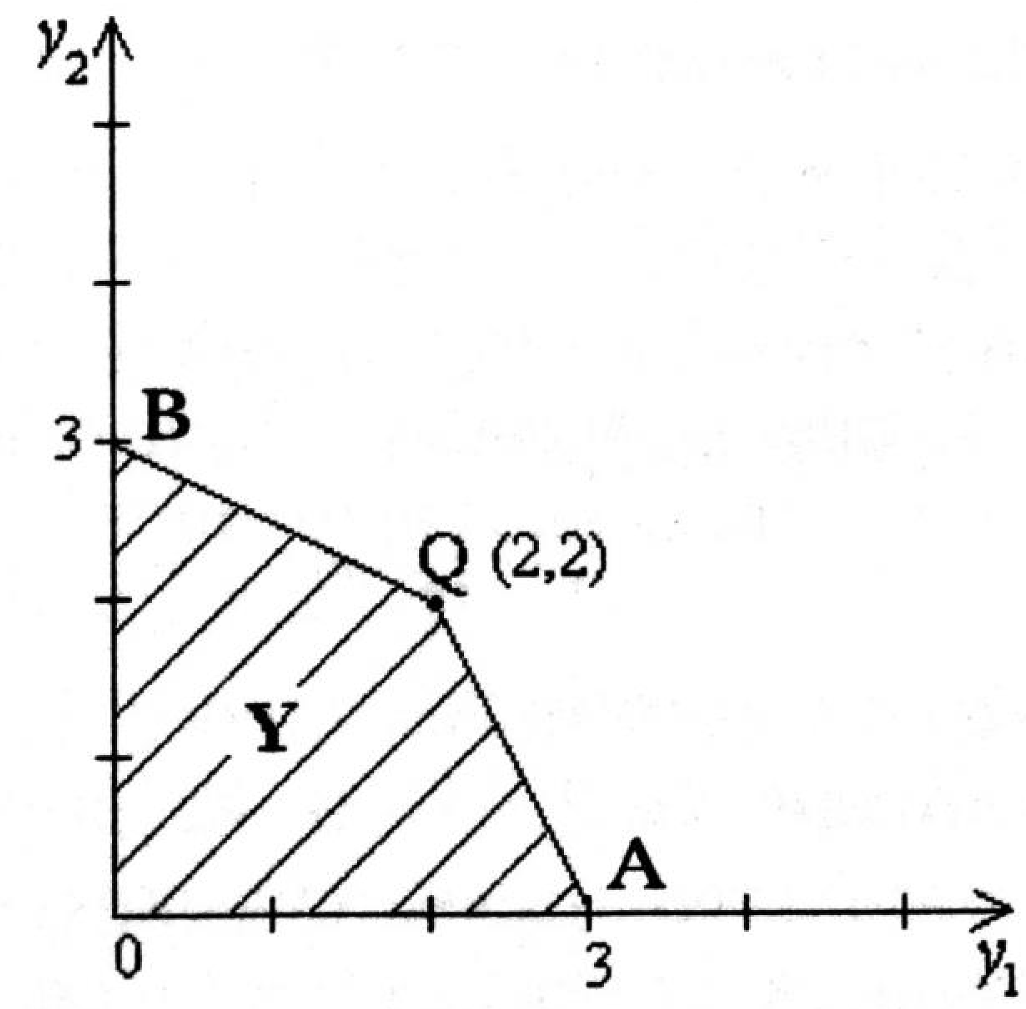

Рис. 2

Рассмотрим вторую многокритериальную задачу (6), в которой множество стратегий $Y=\{y\in R^2 \mid 2y_1 + y_2\leq 6,\ y_1 + 2y_2\leq 6,\ y_i\geq 0,\ i=1,\ 2\}$. Оно представлено на рис. 2 четырехугольником OAQB. Двухкритериальный векторный выигрыш задан $f^{(2)}(y)=(f_1^{(2)}(y), f_2^{(2)}(y))=(y_1, y_2)$. В этой задаче максимальных по Слейтеру (и по Парето) решений бесконечное множество, именно,

$$Y^*=Y^{1*}\cup Y^{2*}=Y^*=Y^{1*}\cup Y^{2*}=\{y\in R^2 \mid y_1 + 2y_2=6,\ 0\leq y_1\leq 2,\ i=1,\ 2\}\cup$$
$$\{y\in R^2 \mid 2y_1 + y_2\}=6,\ 2\leq y_1\leq 3,\ i=1,\ 2.$$

Оптимальными по конусу K из (7) являются стратегии, представленные отрезком AQ, т.е. $Y^K=\{y\in R^2 \mid 2y_1 + y_2=6,\ 2\leq y_1\leq 3,\ i=1,\ 2\}$.

Уточнение по конусу можно применить несколько раз, последовательно уточняя (улучшая) решение. Такой метод в многокритериальной задаче приведен в [6]. Соответствующий подход для игровой задачи можно представить в матричной форме. Рассмотрим следующую последовательность квадратных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц [8; 352; 381]

$$A_1,\ A_2,\ ...,\ A_i,\ ...,\ i\in N \tag{8}$$

Все элементы стохастической матрицы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1 [8; 381]. По последовательности матриц построим новую последовательность

$$B_1=A_1,\ B_2=A_2\cdot A_1=A_2B_1,\ B_3=A_3\cdot A_2\cdot A_1=A_3\cdot B_2,\ \ldots,$$
$$B_n=A_n\cdot A_{n-1}\ \ldots\ A_1=A_nB_{n-1},\ \ldots,\ n\in N \qquad (9)$$

Каждая матрица из последовательности (9) будет определять многогранный конус аналогично (3). Обозначим конусы этой последовательности как K_i, $i\in N$. Полученная последовательность конусов позволит построить уточненное по конусу решение в игровой задаче (1).

Утверждение 1. Рассматривается игровая задача (1). Пусть матрицы A_i, $i\in N$, из последовательности (7) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда для любого натурального n

а) матрица $B_n=A_n\cdot A_{n-1}\cdot\ldots\cdot A_1$ из последовательности (9) является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;

б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n\subset K_{n+1}$;

в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений в игровой задаче (1) имеет место включение $S_{K_n}(X, Y)\supset S_{K_{n+1}}(X, Y)$.

Каждая матрица B_i, $i\in N$ из последовательности (9) является стохастической и для них верны условия теоремы Фробениуса [8; 355]. У такой матрицы максимальное собственное значение $\lambda_i=1$. Каждому собственному значению однозначно можно выбрать левый собственный вектор

$$\alpha^{(n)}=(\alpha_1^{(n)},\ \alpha_2^{(n)}),\ \alpha_1^{(n)}+\alpha_2^{(n)}=1,\ \alpha_1^{(n)}>0,\ \alpha_2^{(n)}>0. \qquad (10)$$

Учитывая вышеизложенное, для последовательности матриц (9) верно

Утверждение 2. Пусть матрицы A_i, $i\in N$, из последовательности (8) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда существует предел последовательности матриц (9), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} B_i=\lim_{n\to\infty}\ A_n\cdot A_{n-1}\cdot\ldots\cdot A_1=A_0$$

Матрица A_0 является положительной, вырожденной с рангом равным 1, обе строки матрицы равны

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}=\alpha^{(0)}=(\alpha_1^{(0)},\ \alpha_2^{(0)}),\ \alpha_1^{(0)}+\alpha_2^{(0)}=1,\ \alpha^{(n)}=\alpha_1^{(0)}>0,\ \alpha_2^{(0)}>0,$$

где левый собственный вектор $\alpha^{(n)}$ из (10).

Последнее утверждение является основанием для уточнения оптимального по конусу решения игровой задачи (1).

Определение 2. Рассматривается игровая задача (1) и последовательность неотрицательных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц (8). Пусть набор чисел

$$\alpha^{(0)}=(\alpha_1^{(0)},\ \alpha_2^{(0)}),\ \alpha_1^{(0)}+\alpha_2^{(0)}=1,\ \alpha_1^{(0)}>0,\ \alpha_2^{(0)}>0$$

представляет строку предельной матрицы A_0 из утверждения 2. Тогда равновесное решение бескоалиционной игры двух лиц со скалярными выигрышами

$$\langle X,\ Y,\ f^{(1)}(x,y)=\alpha_1^{(0)}f_1^{(1)}(x,y)+\alpha_2^{(0)}f_2^{(1)}(x,y)),$$
$$f^{(1)}(x,y)=\alpha_1^{(0)}f_1^{(2)}(x,y)+\alpha_2^{(0)}f_2^{(2)}(x,y))\rangle \qquad (11)$$

будем называть уточненным по последовательности матриц (8) решением игровой задачи с векторными выигрышами (1) и множество таких решений будем обозначать $S_0(X, Y)$.

Утверждение 3. Пусть в игровой задаче (1) множество стратегий $X \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ компактны, векторные функции выигрыша $f^{(1)}: X \times Y \to R^2$, $f^{(2)}: X \times Y \to R^2$ непрерывны, квадратные матрицы второго порядка в последовательности (8) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда в задаче существует уточненное по последовательности матриц (8) решение, возможно в смешанном расширении игры.

Существование уточненного по последовательности матриц решения в задаче (1) следует из компактности множества стратегий X и Y, существования и непрерывности скалярных функций из (11)

$$f^{(1)}(x, y)=\alpha_1^{(0)} f_1^{(1)}(x, y) + \alpha_2^{(0)} f_2^{(1)}(x, y),\ f^{(2)}(x, y)=\alpha_1^{(0)} f_1^{(2)}(x, y) + \alpha_2^{(0)} f_2^{(2)}(x, y))$$

и теоремы о существовании ситуации равновесия в бескоалиционной игре двух лиц со скалярными выигрышами [12; 132-133].

Если в определении 2 уточнение оптимального по конусу решения в игровой задаче (1) проводится по последовательности многогранных конусов, определенных степенями неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической матрицы A, то полученное решение будем называть уточненным по конусу K решением многокритериальной задачи (1).

Рассматривается игровая задача двух лиц с векторными выигрышами у каждого игрока (1). Множества стратегий первого и второго игрока заданы

$$X=\{x \in R^2 \,|\, 2x_1 + 5x_2 \le 10,\ x_i \ge 0,\ i=1, 2\},$$

$$Y=\{y \in R^2 \,|\, 2y_1 + y_2 \le 6,\ y_1 + 2y_2 \le 6,\ y_i \ge 0,\ i=1, 2\}.$$

и представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Стратегиями игроков в этой игре являются пары: для первого игрока $x=(x_1, x_2) \in X \subset R^2$ и для второго — $y=(y_1, y_2) \in Y \subset R^2$. Пара стратегий $(x, y)=((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in X \times Y \subset R^4$ составляет ситуацию. Векторные функции выигрыша являются двухкритериальными, именно,

$$F(x, y)=(f_1^1(x, y) + f_1^2(x, y),\ f_2^1(x, y) + f_2^2(x + y))=$$

$$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)=(x_1, x_2) + (y_1, y_2)=f^{(1)}(x) + f^{(2)}(y).$$

Цель первого (второго) игроков состоит в выборе своей стратегии, что доставляет возможно большие значения двум компонентам своей векторной функции выигрыша

$$f^{(1)}(x)=(f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x))=(x_1, x_2)(f^{(2)}(y)=f_1^{(2)}(y),\ f_2^{(2)}(y))=(y_1, y_2)).$$

Задан двухгранный конус (7), который можно определить с помощью стохастической матрицы. Эту матрицу обозначим также A. Тогда конус

$$K=\{x \in R^2 \,|\, Ax= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge 0_{(2)}\}=\{x \in R^2 \,|\, Ax= \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge 0_{(2)}\}. \quad (12)$$

Учитывая сепарабельный характер векторных выигрышей $F(x, y)$ в игровой задаче, нахождение равновесных ситуаций в (1) сводится к решению двух двухкритериальных задач для первого и второго игроков, именно,

$$\langle X, f^{(1)}(x) = f_1^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x)) = (x_2, x_2)\rangle, \tag{13}$$

$$\langle Y, f^{(2)}(x) = f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x)) = (y_1, y_2)\rangle. \tag{14}$$

Учитывая вышеизложенное, получаем, что множество равновесных по Нэшу-Парето ситуаций

$$S_P(X, Y) = X^P \times Y^P = \{x^* R^2 \mid 2x_1^* + 5x_2^* = 10,\ x_i^* \geq 0,\ i=1, 2\} \times$$

$$\{y \in R^2 \mid y_1 + 2y_2 = 6,\ 0 \leq y_1 \leq 2,\ i=1, 2\} \cup \{y \in R^2 \mid 2y_1 + y_2 = 6,\ 2 \leq y_1 \leq 3,\ i=1, 2\}.$$

Среди них выделяется множество равновесных по конусу К (7) ситуаций

$$S_K(X, Y) = X^K \times Y^K = (5, 0) \times \{y \in R^2 \mid 2y_1 + y_2 = 6,\ 2 \leq y_1 \leq 3\}.$$

Найдем уточненные по конусу K ситуации. Наибольшее собственное значение матрицы А из (12) есть $\lambda=1$. Тогда соответствующий левый собственный вектор можно выбрать $c = (5/8, 3/8)$. В соответствии с определением 2, уточненным по конусу К максимальным решением многокритериальной задачи (13) будут решения задачи математического программирования

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to max$$

$$(x_1, x_2) \in X = \{x \in R^2 \mid 2x_1 + 5x_2 \leq 10,\ x_i \geq 0,\ i=1, 2\}.$$

Аналогично для второго игрока

$$f(y) = 5y_1 + 3y_2 \to max,$$

$$(y_1, y_2) \in Y = \{y \in R^2 \mid 2y_1 + y_2 \leq 6,\ y_1 + 2y_2 \leq 6,\ y_i \geq 0,\ i=1, 2\}.$$

В первой задаче максимум достигается в единственной точке $x^\# = (x_1^\#, {}_2^\#) = (5{,}0) \in X$, что доставляет векторный исход $f^{(1)}(x^\#) = (f_1^{(1)}(x^\#), f_2^{(1)}(x^\#)) = (5{,}0) = f^{(1)}(X)$. Во второй задаче максимум достигается в единственной точке $y^\# = (y_1^\#, y_2^\#) = (2{,}2) \in Y$, что доставляет векторный исход $f^{(2)}(y^\#) = (f_1^{(2)}(y^\#), f_2^{(2)}(y^\#)) = (2{,}2) = f^{(2)}(Y)$.

Таким образом, в представленной игровой задаче двух лиц с векторными двухкритериальными выигрышами у обоих игроков имеется единственная уточненная по конусу К из (7) ситуация

$$S_O(X, Y) = ((5{,}0),(2{,}2)).$$

В этой равновесной ситуации первый и второй игроки получают векторные выигрыши $f^{(1)\#}(x) = (f_1^{(1)\#}(x), f_2^{(1)\#}(x)) = (5{,}0)$ и $f^{(2\#)}(y) = (f_1^{(2)\#}(y), f_2^{(2)\#}(y)) = (2{,}2)$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blackwell, O. An analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff. // Pacific Journal of Mathematics. 1956. V.6. P. 1-8.

2. Shaplay, L.S. Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. // Naval Research Logistics Quarterly. 1959. V.6. P. 57-61.

3. Megen, F., Borm, P., Tijs, S. A preference concept for multicriteria game // Mathematical Methods of Operation Research. 1999. V.49. № 3. P. 401-412.

4. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: ВШ, 2002. 288 с.

5. Yu, P.L. Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Journal of Optimization Theory and Application. 1974. V.14, №3. P. 319-377.

6. Матвеев В. А. Исследование оптимальности по конусу в многокритериальной задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 4. С. 169-176.

7. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с.

8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

9. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 320 с.

10. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.

11. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.

12. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. 304 с.

13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.