

© Е.А. ГЕРБЕР, В.Н. КУТРУНОВ

e.a.gerber@gmail.com, kunkunkun@rambler.ru

Посвящается памяти Владислава Олеговича Бытева

УДК 359

О МЕХАНИЗМЕ И ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ КОЛЬЦА КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

АННОТАЦИЯ. Рассматривается движение кольца вязкой капиллярной жидкости в рамках классической и неклассической моделей гидродинамики. Описывается колебательный режим движения кольца жидкости и некоторые закономерности этого движения. Перечислены эффекты, возникающие в неклассической жидкости.

SUMMARY. The article deals with the motion of the ring of a viscous capillary fluid within the classical model of hydrodynamics and non-classical model of hydrodynamics. It also describes the oscillatory mode of motion of the ring of liquid and some regularities of this movement. The effects in the non-classical fluids are listed.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Гидродинамика, вязкая капиллярная жидкость, колебания.
KEY WORDS. Hydrodynamics, viscous capillary fluid, fluctuations.

Аналогом вращающегося плоского кольца жидкости в природе являются срезы вихревых колец. Актуальность их изучения связана с тем, что данный феномен широко распространен в природе, и обнаруживается его заметное влияние на многие технологические процессы, связанные с переносом вещества, например, при генерации акустических волн, с помощью вихревых колец [1]. Вихревые кольца могут быть использованы как в подводном бурении [2], так и при тушении нефтяных пожаров [3]. Помимо этого результаты исследований, связанные с изучением вихревых колец, имеют большое значение для авиации, т.к. вихри подобного типа образуются под крыльями самолетов во время полета [4]. Если перейти к макромасштабам, то окажется, что форму вращающихся колец имеют некоторые галактики, например, галактики Ноаг и NGC 7742, и при ряде допущений к ним применимы математические модели, используемые для моделирования вихревых колец или, в некоторых частных случаях, их плоских сечений.

Описанием вихревых колец занимается множество исследователей [1], [2], [3], но большинство предлагаемых математических моделей не учитывает наличие двух подвижных границ объекта. Впервые математическая модель, с двумя свободными границами, описывающая динамику движения по инерции вращающегося некапиллярного жидкого кольца, была представлена В.О. Бытевым [5], где он доказал теорему существования и единственности классического решения.

Модификация данной модели, описывающая движение капиллярного кольца жидкости в системе «газ-жидкость-газ», изучалась О.М. Лаврентьевой. В работе [6] представлен качественный анализ динамики плоского кольца и показано, что в процессе движения кольцо может изменить свою топологию.

К сожалению, на сегодняшний день известно лишь одно аналитическое решение этой задачи, полученное В.О. Бытевым. В одной из работ В.В. Пухначева [7], где рассматривалось движение капиллярного кольца жидкости, было построено

асимптотическое разложение решения задачи по малому параметру квазистационарности (о котором ниже) и получена оценка для разности между точным и приближенным решением. Поэтому в данной работе основная масса результатов получена на основе использования численных методов решения этой задачи.

В данной работе изучается математическая модель плоского кольцеобразного движения вязкой капиллярной жидкости в рамках классической и неклассической моделей гидродинамики. Неклассическая модель гидродинамики основывается на определяющем соотношении для тензора напряжений, используемого при описании чисто механического континуума с вращательной симметрией, о котором идет речь в работах Б.Д. Аннина, В.К. Андреева, В.О. Бытева, В.В. Бублика, С.И. Сенашева [8], [9], [10]. Тензор напряжений в данном случае можно представить в следующей форме:

$$T = -pI + 2MD, \quad (1)$$

где I — шаровой единичный тензор, (D_{ij}) — тензор скоростей деформации,

$M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}$ — матрица обобщенной динамической вязкости, μ — динамическая вязкость, μ_0 — недиссипативная динамическая вязкость, которая может иметь любой знак. Таким образом, при наличии вращательной симметрии в описании движения можно использовать понятие обобщенной жидкости, частным случаем которой является и стоксова жидкость [8]. Легко заметить, что при равенстве нулю недиссипативной составляющей вязкости происходит возврат к описанию поведения жидкости в рамках стоксовой модели.

Постановка задачи о движении кольца несжимаемой капиллярной жидкости в рамках классической и неклассической моделей гидродинамики представлена в [11]. Уравнение движения в предположении несжимаемости и однородности жидкости могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}, \nabla) \bar{u} - \frac{M}{\rho} \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{u} = (u_r(t, r), u_\varphi(t, r))$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ вектор скорости, p — гидростатическое давление.

Поскольку изначально кольцо обладает цилиндрической симметрией и рассматривается вариант его плоского движения, то для конкретного варианта записи системы уравнений Навье-Стокса будем использовать полярную систему координат.

Геометрическая часть постановки задачи. Обозначим подлежащие отысканию, $R_1(t, \varphi)$ и $R_2(t, \varphi)$ как расстояния от центра кольца до внешней и внутренней границ кольца в момент времени t в направлении угла. Пусть $R_{10}(\varphi)$, $R_{20}(\varphi)$ — положение свободных границ в нулевой момент времени, причем $R_{10}(\varphi) > R_{20}(\varphi)$. Из предположения об осевой симметрии следует, что во всех закономерностях зависимость от угла будет отсутствовать, то есть: $\bar{u} = (u_r(t, r), u_\varphi(t, r))$, $R_1(t)$, $R_2(t)$.

Будем искать решение в виде:

$$u_r = r^{-1} \Phi(t) \quad (3)$$

благодаря которой уравнение, связанное с дивергенцией, обращается в тождество.

Так как, в силу условия несжимаемости жидкости, площадь кольца не зависит от времени, то справедливы равенства:

$$\pi(R_1^2(t) - R_2^2(t)) = \pi(R_{10}^2 - R_{20}^2) = \text{const} \quad (4)$$

Используя (4), осуществим переход к новому набору переменных, в которых область интегрирования системы уравнений (2) по пространственной переменной становится фиксированной. Для этого введем новые безразмерные переменные: $\xi(t) = R_{20}^{-2} R_2^2(t)$ — связана с описанием положения внутренней границы кольца; $\eta = -\xi + r^2 R_{20}^{-2}$ — связана с описанием положения точки внутри кольца. Заметим теперь, что в отличие от переменной r , переменная η для любого момента времени остается в постоянных пределах $0 \leq \eta \leq a$, где $a = R_{20}^{-2} R_{10}^2 - 1$.

Введем следующие обозначения и соотношения, связывающие составляющие скорости и их безразмерные аналоги: $\Psi(t) = v^{-1} \Phi(t)$ — безразмерный аналог радиальной скорости, v — кинематическая вязкость; $\omega = r^1 v^{-1} u_\phi R_{20}^{-2}$ — безразмерная функция для касательной составляющей скорости, безразмерный аналог обычной угловой скорости вращения; $\tau = R_{20}^{-2} v t$ — безразмерное стоксово время; ν — обычная кинематическая вязкость.

Далее введем обозначения для групп констант: $\delta_1 = \frac{2R_{20} k_\sigma \sigma}{\rho v^2}$ — безразмерная комбинация величин, которую, следуя В.В. Пухначеву [7], назовем параметром квазистационарности, оценивающим степень влияния сил поверхностного натяжения, где k_σ — множитель, учитывающий наличие или отсутствие сил поверхностного натяжения, может принимать значения 1 или 0; $\delta_2 = \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2}$ — размерный сомножитель для слагаемого с разностью давлений газа внутри и вне полости — $\delta p_{\text{gaz}} = p_{2\text{gaz}} - p_{1\text{gaz}}$; $\varepsilon = v^{-1} \nu_0$ — мера неклассичности жидкости, или, следуя [9], мера несоосности девиатора тензора напряжений и девиатора тензора скоростей деформации, ν_0 — недиссипативная кинематическая вязкость.

После перехода к новым переменным система дифференциальных уравнений (2) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{1}{\ln(1 + \frac{a}{\xi})} \left(\frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} + \int_0^a \omega^2 d\eta + 4\varepsilon(\omega(a, \tau) - \omega(0, \tau)) - \right. \\ \left. - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{a + \xi}} \right) + \delta_2 \cdot \delta p_{\text{gaz}} \right); \\ \Psi(0) = \psi_0; \\ \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = 2\Psi; \xi(0) = 1; \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi \omega}{(\xi + \eta)} = 8 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 4(\xi + \eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}; \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{(\xi + \eta)^2} \Psi \right) \Big|_{\eta=0, a} = 0; \omega(\eta, 0) = \omega_0(\eta); \end{array} \right. \quad (5)$$

Техника вывода данных уравнений повторяет работы [5], [6], [7]. В работе [11], в рамках данной модели, при численном моделировании, с помощью авторского приложения «Ring v1.2», были обнаружены периодические затухающие колебания функции $\xi(\tau)$, которая описывает изменение внутреннего радиуса кольца от времени. Колебания были обнаружены как в рамках классической модели ($\varepsilon=0$), так и в рамках неклассической ($\varepsilon \neq 0$).

Возникшие колебания функции $\xi(\tau)$ можно классифицировать по причинам их возникновения, для этого рассмотрим соответствующее дифференциальное уравнение системы (5), в нем присутствует ряд слагаемых, которые можно разделить на два типа:

- Слагаемые, отвечающие за силы, направленные от центра кольца: давление газа внутри полости и инерционные силы, возникающие в результате вращения кольца;

- Слагаемые, отвечающие за силы, направленные в центр кольца: давление вне полости, силы поверхностного натяжения.

Таким образом, возможны несколько вариантов движения кольца жидкости:

1. Бесконечное расширение. Возникает, когда силы, направленные в центр кольца, отсутствуют.

2. Схлопывание. Возникает, когда силы, направленные от центра кольца, отсутствуют.

3. Стационарное движение (вращение кольца как твердого тела). Возникает, когда силы, направленные от центра кольца и в центр кольца, уравновешены.

4. Затухающие периодические колебания, которые могут возникать при различных вариантах наличия или отсутствия вышеупомянутых сил, зависящих от времени.

Режимы, при которых кольцо бесконечно расширяется, схлопывается или движется как целое, были описаны О.М. Лаврентьевой [6]. Нужно отметить, что в результате затухающих колебаний возможно либо схлопывание кольца, либо выход на стационарный режим движения.

В случае отсутствия начального вращения кольца в рамках классического подхода ($\varepsilon=0$), динамическая система (5), дает следующую систему алгебраических уравнений для определения особых точек:

$$\begin{cases} \ln^{-1}\left(1 + \frac{a}{\xi}\right) \left(\frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{a + \xi}} \right) + \delta_2 \left(\frac{P_{20}}{\xi^r} - P_{10} \right) \right) = 0, \\ 2\Psi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Очевидно, что второе уравнение системы (6) имеет единственное решение $\Psi=0$.

Анализируя далее (6), можно сделать вывод, что в случае $\frac{P_{20}}{\xi^r} \leq P_{10}$ система не имеет решений, поэтому нет особых точек. Производные по времени в системе не обращаются в нуль, что свойственно для монотонного варианта движения кольца. Для случая $\frac{P_{20}}{\xi^r} > P_{10}$ система имеет особые точки. Оказалось, что решением первого уравнения является также единственное положительное значение $\xi = \xi_*$.

Тип особой точки определяется корнями характеристического уравнения линеаризованной динамической системы (5). Для удобства дальнейших выкладок введем обозначения:

$$f_1(\Psi, \xi) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{a}{\xi}\right)} \left(\frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{a + \xi}} \right) + \delta_2 \cdot \delta p_{gaz} \right); \quad (7)$$

$$f_2(\Psi, \xi) = 2\Psi$$

Выпишем разложение в ряд Тейлора функций $f_1(\Psi, \xi)$, $f_2(\Psi, \xi)$ в окрестности $\Psi=0$, $\xi=\xi_*$, с точностью до первых степеней. С учетом приближения первого порядка уравнения системы (5) (напомним, вращение кольца отсутствует, поэтому последнее уравнение имеет решением тождественный ноль, то есть $\omega(\tau, \eta) \equiv 0$) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{d\tau} = a_{11}\Psi + a_{12}(\xi - \xi_*) + o_1\left(\sqrt{\Psi^2 + (\xi - \xi_*)^2}\right) \\ \frac{d\xi}{d\tau} = a_{21}\Psi + a_{22}0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\Psi}{d\tau} = a_{11}\Psi + a_{12}(\xi - \xi_*) \\ \frac{d\xi}{d\tau} = a_{21}\Psi + a_{22}0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } a_{11} = \left. \frac{\partial f_1(\Psi, \xi)}{\partial \Psi} \right|_{\substack{\Psi=0 \\ \xi=\xi_*}}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(\Psi, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\substack{\Psi=0 \\ \xi=\xi_*}}, \quad a_{21} = \left. \frac{\partial f_2(\Psi, \xi)}{\partial \Psi} \right|_{\substack{\Psi=0 \\ \xi=\xi_*}}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(\Psi, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\substack{\Psi=0 \\ \xi=\xi_*}}$$

Явное выражение для корней характеристического уравнения системы (8) будет иметь вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + 8a_{12}}}{2}. \quad (9)$$

Количество корней и тип определяется знаком подкоренного выражения (9). Если, например, взять конкретный набор значений параметров: $p_{20}=1$ Па, $p_{10}=1$ Па,

$$\delta_2 = \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2} \quad R_{20}=8 \text{ см}, \quad R_{10}=12 \text{ см}, \quad \rho=990 \text{ кг/м}^3, \quad \sigma=7,28 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}, \quad \mu=10^{-3} \text{ Па с},$$

$$\delta_1 = \frac{2R_{20} k_\sigma \sigma}{\rho v^2} = 1.15 \cdot 10^7, \quad \delta_2 = \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2} = 1.27 \cdot 10^7, \quad \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{R_{20}}{\sigma} = 1.099, \quad a=1,25, \quad \gamma=1,45, \text{ то решением}$$

системы уравнений (6) является точка ($\xi_*=0.415$, $\Psi=0$). Характеристическое уравнение при этих значениях параметра имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_{1,2} = -2,605 \pm 1,925 \cdot 10^4 i$, что означает, что особая точка ($\xi_*=0,415$, $\Psi=0$) является фокусом. Поскольку действительная часть корня отрицательна, то движение в фазовой плоскости (ξ, ξ') происходит по спирали к центру. Характер поведения системы для этой особой точки достаточно прозрачен. Значение $\Psi=0$ означает, что кольцо жидкости не двигается в радиальном направлении, а $\xi_*=0,415$ означает, что радиус кольца не изменяется, т.е. кольцо находится в стационарном режиме движения. С помощью численного моделирования при том же наборе параметров получаем точку покоя ($\xi_*=0,486$, $\Psi=0$). Таким образом, сравнивая найденные выше точки, делаем вывод о том, что первое приближение

(8) дает искомую величину с погрешностью в 15%, что говорит о достаточно хорошем согласии найденных величин.

Для выявления закономерностей изменения частоты колебаний кольца в зависимости от параметров модели ($\rho, R_{20}, \sigma, \gamma, p_{10}, p_{20}$) выпишем в явном виде выражение для круговой частоты, полученное из (5):

$$\xi'' + \omega_\xi^2(\xi - \xi_*) = C_0 \Rightarrow \omega_\xi = \sqrt{\frac{1}{\rho R_{20}^3} \left(C_1 \sigma + R_{20} \left(\frac{C_2 \gamma}{\xi_*^{\gamma+1}} - \frac{C_4 p_{20}}{\xi_*^\gamma} + C_3 p_{10} \right) \right)}, \quad (10)$$

где C_i — константы, равные производным функций (7) по ξ в особой точке $\xi = \xi_*$. Анализ выражения для частоты колебаний кольца (10) показывает, что при изменении одного параметра и неизменности остальных можно выявить некоторые закономерности зависимости частоты от выделенного параметра. Например, $\omega_\xi = \kappa_\rho P^{-1/2}$, где κ_ρ — константа, которую легко найти из (10) если считать, что меняется только плотность жидкости ρ . Зависимость частоты от плотности (расчет проводился при $R_{20} = 8$ см, $R_{10} = 10$ см, и физических характеристиках воды), изображенная на рис. 1, подтверждает выявленную закономерность с большой точностью. Точками на рис. 1 обозначены значения частоты, полученные в процессе численного моделирования при изменении $400 \leq \rho \leq 1100$ кг/м³.

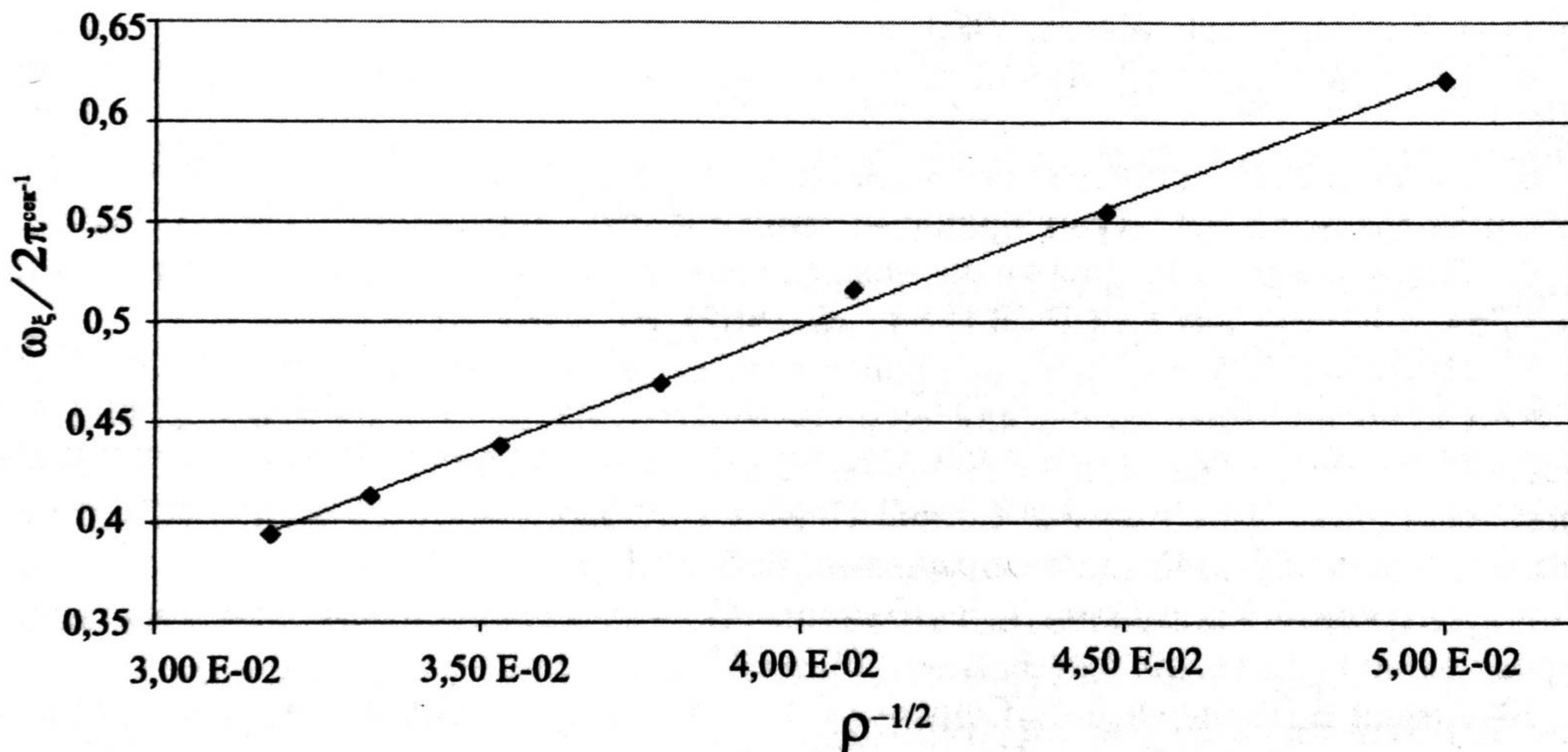


Рис. 1. Зависимость частоты $\omega_\xi / 2\pi = 1/T$ сек⁻¹ от плотности жидкости в виде $\rho^{-1/2}$

Помимо исследования возникших колебаний интересным является вопрос о влиянии недиссипативной вязкости ν_0 на динамику кольца жидкости. Физический смысл ν_0 пока неясен, но наблюдаются следующие эффекты:

1. При увеличении ν_0 усиливается действие обычной динамической вязкости, процессы затухания колебаний происходят быстрее.

2. При ненулевом значении ν_0 приходится задавать вращения на границах кольца жидкости, что выглядит парадоксально и нуждается в дальнейшем исследовании. Возможно, что в реальности нельзя задать только радиальное движение кольца, оно может оказаться неустойчивым. Но это необходимо исследовать экспериментально. Если предположение подтвердится, оно может служить косвенным подтверждением введения новой физической константы, связанной с геометрией задачи.

Таким образом, в статье приведен анализ периодического движения кольца жидкости на примере функции $\xi(\tau)$. Описаны силы, при нарушении баланса которых возможно возникновение периодических движений кольца. Определено соотношение между значениями давления газа вне и внутри полости кольца, которое обеспечивает периодический режим движения кольца. Найдены аналитические выражения как для определения координат точки покоя в фазовом пространстве, так и круговой частоты колебаний. Рассмотрены закономерности изменения частоты колебаний функции $\xi(\tau)$ в зависимости от параметров кольца жидкости для случая отсутствия начального вращения. Отмечается достаточно хорошее согласие результатов численного моделирования с выявленными закономерностями изменения частоты колебаний в зависимости от параметров системы газ-жидкость-газ. Кратко перечислены эффекты, связанные с v_0 , которые удалось установить в результате численного моделирования, проведенного с помощью пакета «Ring v 1.2».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mohring, W. On vortex sound at low Mach Number // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 85:685-91.
2. Chahine, G.L., Genoux, P.F. Collapse of a cavitating vortex ring // J. Fluids Eng. 1983. Vol. 105:400-5.
3. Akhmetov, D.G. Extinguishing gas and oil well fires by means of vortex rings. // Combust. Explos. Shock Waves. 1980. Vol. 16.
4. Dyke, M., van. An Album of Fluid Motion (10th ed.). Stanford: Parabolic Press, 1982.
5. Бытев В.О. Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1970. №3. С. 82-88.
6. Лаврентьева О.М. Движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости. (Деп. в ИГ СО АН СССР 19.11.84., № 7562). М., 1984. 51 с.
7. Пухначев В.В. Квазистационарное приближение в задаче о вращающемся кольце. // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43. № 3. Май-июнь, С. 652-677.
8. Bytev V.O. The Simple Nonpolar Continuum Media. Part II. the Constitutive Equations. Linear Structures // Cornell University Library, archived article: URL: <http://arxiv.org/abs/0906.1848> (дата обращения: 10.04.2011).
9. Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О., Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 349 с.
10. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И.. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 142 с.
11. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н. О движении кольца вязкой несжимаемой капиллярной жидкости // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 1. С. 105-109