

© Н.С. БАХТИЙ, В.Н. КУТРУНОВ, С.В. МАЙЕР,
М.В. САФИУЛЛИНА
nbakhtiy@gmail.com

УДК 519.6, 532.546

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

АННОТАЦИЯ. В работе предлагается метод оптимизации задачи автоматической адаптации гидродинамической модели на историю разработки. Данный метод в некоторых случаях позволяет сократить объем вычислений при использовании градиентных методов автоадаптации. Работа алгоритма продемонстрирована на тестовом примере.

SUMMARY. The optimization algorithm for the problem of automatic history matching of hydrodynamic model is considered. In some cases the algorithm permits to reduce the numerical calculations when gradient methods for history matching are used. The operation of algorithm is demonstrated on the testing model.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Моделирование пластовых систем, адаптация на историю разработки, оптимизация градиентных методов, конечно-разностные методы.

KEY WORDS. Reservoir simulation, automatic history matching, gradient methods optimization, finite difference methods.

Одной из особенностей задач подземной гидродинамики является наличие значительных неточностей в исходных данных. Поэтому часто возникает необходимость подбора в некотором смысле оптимальных значений исходных параметров (то есть решения обратных задач). Например, надо определить такие фильтрационно-емкостные свойства пласта, при которых отклонение расчетных и фактических (инструментально-измеренных) показателей работы скважины и пласта будет минимальным. Этот процесс называется адаптацией гидродинамической модели на историю разработки. Автоматизация подбора параметров приводит к задаче поиска минимума функции многих переменных (целевой функции). В задачах указанного типа целевая функция вычисляется в результате запуска программного комплекса, называемого гидродинамическим симулятором. Она имеет весьма сложный вид, и однократное вычисление ее значения требует значительных временных затрат. В статье предлагается алгоритм, позволяющий в некоторых случаях существенно сократить объем вычислений. Гидродинамический симулятор, использованный в данной работе — ПК Техсхема [1].

Построение целевой функции. Пусть стоит задача минимизации разностей между N фактическими и расчетными данными. Такими данными могут быть совокупности забойных давлений скважин, расходов жидкости или нефти, инструментально замеренные насыщенности и давления в пласте и т.д. Назовем эти совокупности элементами цели.

Пусть i -ый элемент цели был измерен n_i раз в различные моменты времени. Назовем частным i -ым функционалом выражение

$$P_i(\bar{x}) = \frac{w_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} \left(\frac{s_{ij}(\bar{x}) - o_{ij}}{\sigma_i} \right)^2, \quad (1)$$

где s_{ij} — расчетное значение i -го элемента цели в j -ый момент времени, вычисляемое в результате запуска гидродинамического симулятора, o_{ij} — фактическое значение i -го элемента цели в j -ый момент времени, σ_i — абсолютная погрешность измерения i -го элемента цели, w_i и v_{ij} — глобальный и локальный весовые коэффициенты соответственно, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ — вектор варьируемых параметров (аргументов целевой функции). Количество весовых коэффициентов математически избыточно, однако целесообразно с точки зрения пользователя программного комплекса. В качестве варьируемых параметров, как правило, выбирают параметры пласта и пластовых флюидов, измеряемые со значительной погрешностью — абсолютную и относительную фазовые проницаемости, продуктивности скважин и т.д.

Введем общую целевую функцию:

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_i(\bar{x}), \quad (2)$$

тогда задача поиска оптимальных параметров сводится к минимизации функционала $Q(\bar{x}) \rightarrow \min$.

Уменьшая избыточность количества весовых коэффициентов, введем обозначение

$$r_{ij}(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{w_i v_{ij}}{n_i}} (s_{ij}(\bar{x}) - o_{ij}) \quad (3)$$

и, заменяя двойную индексацию одиночной по формуле $k = j + \sum_{b=1}^{i-1} n_b$, подставим

(3) в (1), а (1) в (2). Получим

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{N}} r_k^2(\bar{x}) \quad (4)$$

где $\bar{N} = \sum_{b=1}^N n_b$ — общее количество измерений всех элементов цели во все моменты времени.

Поиск минимума целевой функции. Из (4) следует, что градиент целевой функции равен

$$\nabla Q(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\bar{N}} r_k(\bar{x}) \nabla r_k(\bar{x}) = J^T(\bar{x}) r(\bar{x}) \quad (5)$$

где $J^T(\bar{x}) \delta r_k / \delta x_q$ — транспонированная матрица Якоби, $q=1, \dots, t$, $k=1, \dots, \bar{N}$.

Для поиска минимума целевой функции использовался алгоритм Левенберга-Маркварда [2]. Согласно этому алгоритму вектор варьируемых параметров на m -ой итерации вычисляется как

$$\bar{x}_{[m]} = \bar{x}_{[m-1]} - [H(\bar{x}_{[m-1]} + \lambda I)]^{-1} \nabla Q(\bar{x}_{[m]}), \quad m=1, \dots, M, \quad (6)$$

где M — ограничение на число итераций алгоритма (может отсутствовать), $\lambda > 0$ — коэффициент, отвечающий за влияние градиента целевой функции,

I — единичная матрица, $H(\bar{x}_{[m-1]}) = \nabla^2 Q(\bar{x}_{[m-1]}) \approx J^T(\bar{x}_{[m-1]}) J(\bar{x}_{[m-1]})$ — матрица Гессе, вычисленная в линейном приближении. Отметим, что матрица $H(\bar{x}_{[m-1]}) + \lambda I$ является симметричной, что облегчает ее обращение (посредством LDL^T разложения [3]).

При использовании алгоритма Левенберга-Маркварда, как и любого другого итерационного алгоритма, необходимо задать некоторое начальное приближение $\bar{x}_{[0]}$ и вычислить $\bar{r}(\bar{x}_{[0]})$. Для нахождения производных q -го столбца матрицы $J(\bar{x}_{[0]})$, которые могут быть вычислены только как конечно-разностные производные, нужно вычислить вектор \bar{r} в соседней точке: $\bar{r}(\bar{x}_{[0]} + \bar{d}_q)$. Здесь все компоненты вектора \bar{d}_q равны нулю, а его q -ая компонента равна некоторому малому числу Δ_q . Тогда элементы q -го столбца матрицы $J(\bar{x}_{[0]})$ равны $\partial r_k / \partial x_q \approx (r_k(\bar{x}_{[0]} + \bar{d}_q) - r_k(\bar{x}_{[0]})) / \Delta_q$, $q=1, \dots, t$, $k=1, \dots, \bar{N}$. Для вычисления каждого вектора $\bar{r}(\bar{x}_{[0]} + \bar{d}_q)$ требуется один запуск гидродинамического симулятора, таким образом, для заполнения всех t столбцов матрицы $J(\bar{x}_{[0]})$ необходимо $t + 1$ запусков гидродинамического симулятора (дополнительный запуск нужен для вычисления вектора $\bar{r}(\bar{x}_{[0]})$). Однако в некоторых случаях при последующих вычислениях матрицы J (то есть на второй и следующих итерациях) количество перезапусков можно сократить, заполняя несколько столбцов одновременно.

Взаимная независимость аргументов целевой функции. Введем понятие взаимной независимости аргументов целевой функции. Два аргумента x_q и x_p целевой функции Q называются взаимно-независимыми, если для любого \bar{x} и $\forall k \in \{1, 2, \dots, \bar{N}\}$:

$$\frac{\partial r_k(\bar{x})}{\partial x_q} \frac{\partial r_k(\bar{x})}{\partial x_p} = 0. \quad (7)$$

Другими словами, если r_k зависит от x_q , то она не зависит от x_p , и наоборот (или же r_k не зависит ни от x_q , ни от x_p). Выполнение условия (7) означает, что

$$\begin{aligned} r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p}) &= r_k(x_1, \dots, x_q + \Delta_q, \dots, x_p + \Delta_p, \dots, x_t) = \\ &= \begin{cases} r_k(x_1, \dots, x_q + \Delta_q, \dots, x_p, \dots, x_t), & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_p \\ r_k(x_1, \dots, x_q, \dots, x_p + \Delta_p, \dots, x_t), & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_q \\ r_k(x_1, \dots, x_q, \dots, x_p, \dots, x_t), & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_q \text{ и } x_p \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\begin{cases} \partial r_k / \partial x_q \approx (r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p}) - r_k(\bar{x})) / \Delta_q, & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_p \\ \partial r_k / \partial x_p \approx (r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p}) - r_k(\bar{x})) / \Delta_p, & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_q \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, при заполнении двух столбцов матрицы Якоби необходимо два перезапуска гидродинамического симулятора (для вычисления векторов $r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p})$ и $r_k(\bar{x})$), а не три ($r_k(\bar{x} + \bar{d}_q)$, $r_k(\bar{x} + \bar{d}_p)$, $r_k(\bar{x})$). Очевидно, что если h аргументов целевой функции попарно взаимно независимы, соответствующие h столбцов матрицы Якоби можно заполнить одновременно. Взаимную независимость аргументов удобно представить в виде неориентированного графа G [4]. Каждому x_q поставим в соответствие вершину v_q такого графа. Будем считать, что вершины v_q и v_p соединены ребром, если x_q и x_p взаимнонезависимы. Тогда столбцы матрицы Якоби, соответствующие любому полному подграфу g графа G , можно заполнять одновременно. Таким образом, наша задача — разбить G на минимальное количество

полных подграфов. Эта задача может быть решена простым перебором с запоминанием минимального и текущего разбиения. Очевидно, что таких минимальных разбиений может быть множество. При поиске достаточно рассмотреть разбиения, в которых любые два подграфа не имеют общих вершин. Действительно, пусть граф G разбит на l подграфов, причем два из них имеют общие вершины. Тогда достаточно исключить эти вершины из одного из подграфов. Полученное разбиение также состоит из l подграфов, но они не имеют общих вершин.

Анализ взаимной независимости аргументов на всей области их определения — задача, сопоставимая по сложности с исходной. Поэтому в предлагаемом способе оптимизации структура графа G вычисляется после первой итерации, на которой все аргументы целевой функции варьируются по одному последовательно. Затем принимается, что всегда выполнено хотя бы одно из условий:

1. Структура графа G остается неизменной.

2. Изменение структуры графа G происходит за счет добавления новых ребер. В этом случае очевидно, что полные подграфы, выделенные из исходного графа, останутся полными и в измененном (хотя, возможно, что разбиение исходного графа будет не минимальным для измененного).

3. Изменение структуры графа G происходит за счет удаления ребер, но полные подграфы, выделенные из исходного графа, останутся полными и в измененном.

В общем случае это неверно, поэтому по окончании работы алгоритма иногда имеет смысл сделать дополнительную итерацию без оптимизации, что позволит проверить, действительно ли найден минимум целевой функции. На второй и последующих итерациях аргументы целевой функции варьируются группами, соответствующими полным подграфам, образующим минимальное разбиение графа G .

Пример расчета. Рассмотрим изотермическую модель нефтяного пласта, разрабатываемого 25-ю вертикальными скважинами так, как показано на рис. 1. буквенный индекс d соответствует добывающим скважинам, n — нагнетательным. Основные исходные данные для моделирования приведены в табл. 1, вычислительная сетка равномерна. Скважины полностью вскрывают пласт.

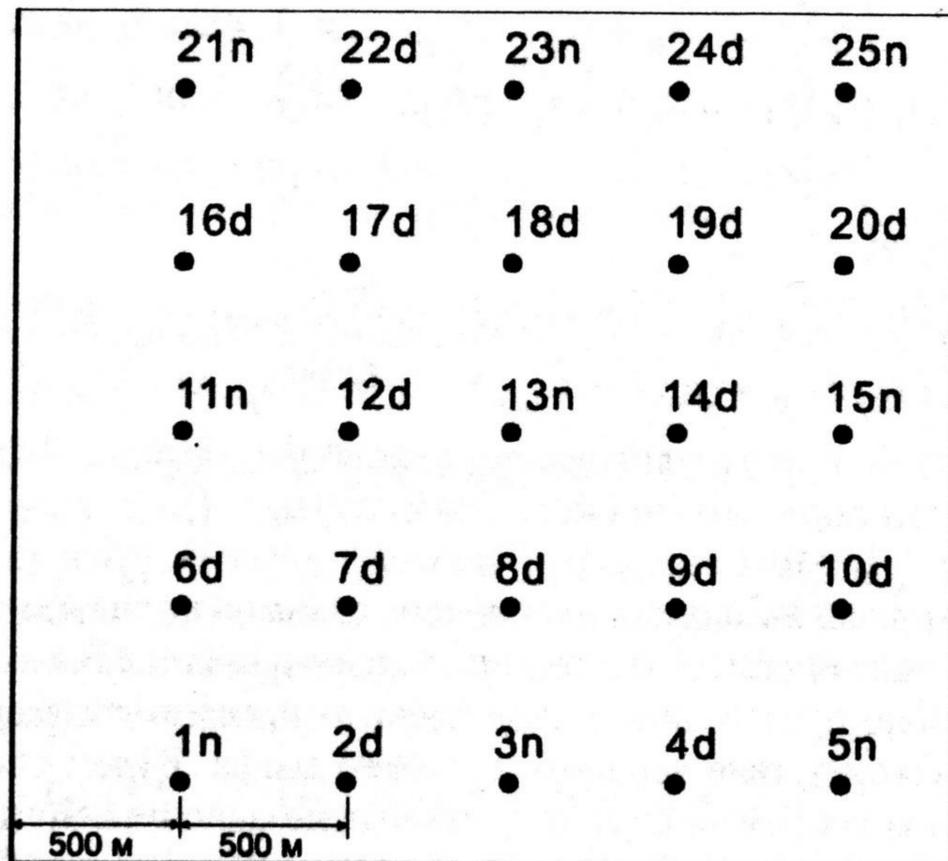


Рис. 1. Схема разработки нефтяного пласта

Границы пласта непроницаемы, в качестве граничных условий на скважинах было задано фиксированное забойное давление, приведенное в табл. 1. Капиллярными силами пренебрегаем. Относительные фазовые проницаемости (ОФП) заданы как кусочно-линейные функции своих насыщенных (см. табл. 2 и 3). При автоадаптации элементами цели были выбраны расходы суммы фаз всех скважин, аргументами целевой функции — множители K_{pr} продуктивности всех скважин (таким образом, целевая функция зависит от 25 параметров). Истинное значение данных множителей, дающее значение целевой функции $Q=0$, есть $K_{pr}=1$. В качестве начального приближения было задано $K_{pr}=2$, то есть $\bar{x}_{[0]}=\{2, 2, \dots, 2\}$.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования

Параметр	Значение	Ед.изм.
Пористость	16	%
Абсолютная проницаемость	0.01	мкм ²
Начальная нефтенасыщенность	70	%
Плотность нефти в стандартных условиях	850	кг/м ³
Плотность воды в стандартных условиях	1010	кг/м ³
Плотность нефти в пластовых условиях	836	кг/м ³
Плотность воды в пластовых условиях	999	кг/м ³
Сжимаемость нефти	0.746	1/ГПа
Сжимаемость воды	0.46	1/ГПа
Сжимаемость порового объема	0.065	1/ГПа
Вязкость нефти	6	мПа сек
Вязкость воды	0.5	мПа сек
Среднее начальное пластовое давление	14.24	МПа
Забойное давление добывающих скважин	10	МПа
Забойное давление нагнетательных скважин	23	МПа
Длина и ширина пласта	3000	м
Толщина пласта	10	м
Число расчетных ячеек по длине и ширине пласта	60	—
Число расчетных слоев по толщине пласта	10	—

Таблица 2

Относительная фазовая проницаемость по нефти

Нефтенасыщенность, %	ОФП по нефти
0	0
27	0
33.7	0.012
41.1	0.056
49.2	0.206
60	0.6
100	0.8

сказано выше, разбиение исходного графа $G(\bar{x}_{[0]})$ на 3 полных подграфа применимо и для графа $G(\bar{x}_*)$.

Примечание. В вычислениях гидродинамического симулятора всегда присутствуют шумовые эффекты (в частности, из-за применения параллельных алгоритмов). Поэтому при построении матрицы смежности был найден максимальный по модулю элемент j^* матрицы Якоби J . Затем все элементы, меньшие по модулю чем εj^* , были обнулены, после чего был проведен анализ взаимной независимости аргументов Q (здесь ε — некоторое заданное малое число).

Заключение. Известной проблемой алгоритмов автоадаптации модели на историю разработки является слишком большое время, требуемое для нахождения минимума целевой функции Q в случае, когда количество аргументов Q велико (несколько десятков). Предложенная оптимизация градиентных методов автоадаптации позволяет в некоторых случаях существенно сократить требуемое количество перезапусков гидродинамического симулятора и, как следствие, сократить время поиска минимума целевой функции. По сути, объем вычислений сокращается до значения, соответствующего поиску минимума некоторой целевой функции Q , зависящей от количества аргументов, равного минимальному количеству полных подграфов, покрывающих исходных граф G . Отметим, что анализ взаимной независимости аргументов целевой функции может быть полезен и при применении неградиентных методов ее минимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батурин Ю.Е., Майер В.П. Гидродинамическая модель трехмерной трехфазной фильтрации Техсхема // Нефтяное хозяйство. 2002. № 3. С. 38-42.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
4. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 432 с.