© В.И. КУЧЕРЮК, И.В. ШАПТАЛА
m909033309qw@yandex.ru

УДК 624.04

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИТНЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ. В работе представлена математическая модель сложной композитной системы, разработана ее структурная схема, приведены варианты проработки отдельных блоков схемы.

SUMMARY. IIn the present work mathematical model of the composite system is presented, this structural scheme is developed, options of separate blocks scheme are determined.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Композит, структурная схема, математическая модель, метод осреднения.

KEY WORDS. Composite, structural scheme, mathematical model, method of averaging.

Композитные материалы (КМ) в последние годы приобретают все более важное значение по сравнению с материалами традиционными. Современные КМ обладают не только широким спектром механических, физических и химических свойств, но и способностью к специальному их изменению в зависимости от назначения конструкции [1]. Интенсивно идут исследования по нанокомпозитам, молекулярным и управляемым композитам с изменяющимися в процессе работы физико-механическими свойствами для обеспечения заданных функций.

В соответствии с источниками [2], [3] дадим общее и математическое определения понятию «композит».

1. Композиционными материалами называют гетерофазные (неоднородные) системы, состоящие из двух или более компонентов. Композит — это материал с неоднородными физическими свойствами.

2. Композит описывается математической моделью, в которую входят разрывные по координатам материальные функции физических уравнений.

Степень неоднородности композитов характеризуется двумя уровнями. Первый уровень (микронеоднородность) связан с наличием в материале двух фаз — матрицы и наполнителей различной природы [4]. Второй уровень — макронеоднородность — характеризуется наличием в теле слоев с разными механическими характеристиками [2; 301].

Проектирование конструкций из композитных систем выполняется на основе системного метода, математического моделирования и условий оптимальности. Математическая модель представляет собой сложную модель, состоящую из более простых, которые мы будем называть элементарными.

Структурная схема математической модели композитной системы с учетом оптимальности и системного анализа изображена на рис. 1.

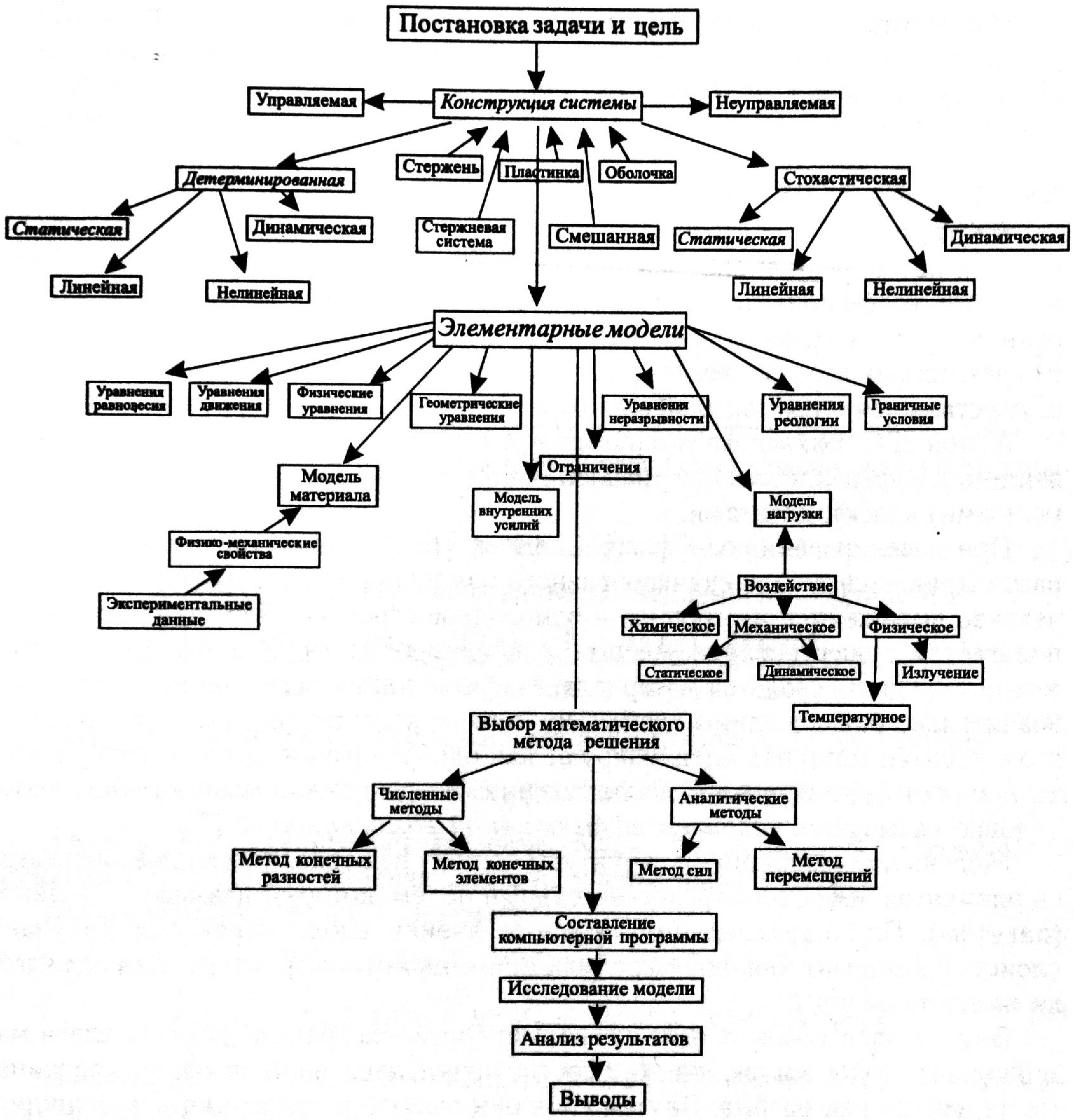

Рис. 1. Структурная схема математической модели композитной системы

Математические модели композитных систем в зависимости от способа отражения количественных соотношений могут быть детерминированными и стохастическими. В детерминированных моделях связь между величинами функциональная, в стохастических — соотношения между ними основываются на теории вероятности, носят случайный характер. Модели, не зависящие от времени, являются статическими, в то время как динамические модели позволяют исследовать процессы во времени. Описание математической модели осуществляется с помощью систем уравнений (равновесия, движения, физических, геометрических), граничных и начальных условий, предельных условий и так далее [5].

Одним из блоков структурной схемы (рис. 1) является модель материала, выбор которой при расчете неоднородных систем является важной задачей. Основным подходом для решения данной задачи является замена неоднородной среды на эквивалентную «однородную» среду. Этот подход называется методом осреднения.

Новая модель — так называемая приведенная «однородная среда» — получается после осреднения механических характеристик неоднородной среды. Новая среда может быть как изотропной, так и неизотропной; ее физико-механические характеристики называются осредненными, или приведенными. Остановимся подробно на трех методах осреднения. Это методы Н.С. Бахвалова, В.В. Болотина, В.И. Кучерюка.

В механике композитов математическое моделирование механического поведения неоднородной системы осуществляется с помощью уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от координаты. Переход от неоднородной среды к однородной, сопровождающийся преобразованием уравнения с переменными коэффициентами на уравнение с постоянными коэффициентами, осуществляется с помощью метода осреднения Н.С. Бахвалова [3; 91-100], [6].

Метод Н.С. Бахвалова в одномерном случае сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными (осредненными) коэффициентами.

При моделировании однофазных композитных материалов *неоднородность* рассматривается в виде скачкообразного изменения свойств фаз, имеющих отчетливо выраженное изотропное и однородное строение. Для таких сред предполагается существование масштаба неоднородности, в пределах которого можно осреднять свойства материала. Масштаб длины осреднения должен быть значительно больше длины ячейки, но меньше характерного размера тела. При этом условии материал идеализируют как однородный, и задача о нагружении тела может быть решена с использованием осредненных свойств. Описанное условие называется условием *эффективной гомогенности* [7].

Модель композиционной структуры состоит из периодически повторяющихся элементов, имеющих представительный объем, который называется ячейкой (пакетом). При параллельном переносе ячейки вдоль одной оси получаем слоистый композит или одномерную композиционную структуру. Каждая ячейка имеет толщину l.

Внутри пакета может быть несколько слоев. На границе раздела слоев материальные функции физических соотношений, зависящие от одной координаты, терпят по ней разрыв. Внутри слоя они являются непрерывными функциями этой координаты.

Общую толщину совокупности пакетов обозначают через L. Ввод ячейки осуществляется вводом безразмерной геометрической характеристики $\alpha=l/L$. Для того чтобы можно было войти внутрь пакета и рассмотреть микроперемещения и микронапряжения в каждом слое, входящем в пакет, вводится «быстрая» координата ξ: $\xi=\frac{z}{\alpha}$ где z — текущая («медленная») координата.

Использование двух координат — медленной x и быстрой ξ — называют введением двух масштабов. Второй масштаб, отвечающий координате ξ, позволяет заглянуть внутрь пакета при любом фиксированном значении медленной координаты z: $z=z_i$, $i=1, 2, 3$...

Решение краевой задачи находится на основе разложения по степеням малого параметра α, в котором коэффициенты зависят как от медленной, так и от быстрой координат. Вводятся два масштаба переменных (описаны выше), соответствующие микроскопическому (быстрая координата) и макроскопическому (медленная координата) описанию процессов в неоднородной периодической среде.

Запишем уравнение равновесия для неоднородной среды в виде:

$$\frac{d}{dz}\left[E(z)\cdot\frac{du}{dz}\right]+Z(z)=0 \tag{1}$$

где $E(z)$ — модуль упругости материала, $u(z)$ — перемещение, $Z(z)$ — составляющая объемной силы вдоль оси Z. Физическое соотношение в уравнении явным образом зависит от координаты Z.

На границе тела должны выполняться условия:

$$u_{z=0}=u_0,\quad \left[E(z)\cdot\frac{du}{dz}\right]_{z=L}=\sigma_0, \tag{2}$$

Вводится геометрически малый параметр α и быстрая координата $\xi=(z/\alpha)$, от которой зависит модуль упругости $E(\xi)$. В результате уравнение (1) переписывается в виде:

$$\frac{1}{\alpha}\cdot E^{\bullet}(\xi)\cdot u'(z)+E(\xi)\cdot u''(z)+Z(z)=0 \tag{3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по медленной координате z:

$$\frac{dE(z)}{dz}=\frac{dE(z)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\xi}=\frac{dE(z)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dz}=\frac{dE(z)}{d\xi}\cdot\frac{d(z/\alpha)}{dz}=E^{\bullet}(\xi)\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Решение уравнения (3) ищется в виде асимптотического разложения:

$$u=v(z)+\alpha\cdot N_1(\xi)v(z)+\alpha^2\cdot N_2(\xi)\cdot v''(z)+\ldots\alpha^n\cdot N_n(\xi)v^{(n)}(z)+\ldots \tag{4}$$

Здесь $v(z)$ — среднее перемещение, $N_1(\xi)$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$ — локальные функции i-того уровня, изменяющиеся на ячейке периодичности.

Дифференцируя (4) по Z, получаем:

$$\begin{aligned} u'&=v'+N_1^{\bullet}v'+\alpha\cdot(N_1v''+N_2^{\bullet}v'')+\alpha^2\cdot(N_2v'''+N_3^{\bullet}v''')+\ldots\\ u''&=v''+\frac{1}{\alpha}\cdot N_1^{\bullet\bullet}v'+2N_1^{\bullet}v''+N_2^{\bullet\bullet}v''+\alpha\cdot(N_1v'''+2N_2^{\bullet}v'''+N_3^{\bullet\bullet}v''')+\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение равновесия (3), группируем слагаемые относительно одинаковых степеней α:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\left[E^{\bullet}(1+N_1^{\bullet})+E\cdot N_1^{\bullet\bullet}\right]\cdot v'+\alpha^0\left[E^{\bullet}(N_1+N_2^{\bullet})+E(1+2N_1^{\bullet}+N_2^{\bullet\bullet})\right]\cdot v''+\\ &+\alpha\left[E^{\bullet}(N_2+N_3^{\bullet})+E(N_1+2N_2^{\bullet}+N_3^{\bullet\bullet})\right]\cdot v'''+\ldots+Z(z)=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Выражение при степени α^{-1} приравниваем нулю:

$$(E\cdot N_1^{\bullet})^{\bullet}+E^{\bullet}=0 \tag{7}$$

Для определения локальной функции $N_1(\xi)$ из (7), вводится процедура осреднения произвольной функции $f(z, \xi)$ на ячейке периодичности:

$$\langle f(z,\xi)\rangle=\int_0^1 f(z,\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Подробное описание получения функции $N_1(\xi)$ и ее график приведены в статье [8].

Опуская некоторые выкладки, запишем краевую задачу, полученную методикой осреднения:

$$\begin{gathered} h_0 \nu'' + \alpha \cdot h_1 \nu''' + \ldots + Z(z) = 0 \\ (\nu + \alpha \cdot N_1 \nu' + \ldots)_{z=0} = u_0 \\ (h_0 \nu' + \alpha \cdot h_1 \nu'' + \ldots)_{z=L} = \sigma_0, \end{gathered} \tag{9}$$

где $h_n (n=0, 1, 2, \ldots)$ — эффективные коэффициенты, описывающие процессы в ячейке периодичности однофазного композитного материала.

Ограничиваясь двумя членами асимптотического разложения (4), сводим решение задачи осреднения для уравнения (1) к отысканию локальной функции из уравнения (7) и решению осредненной краевой задачи (9). Полученное решение называется нулевым приближением. Аналогичный подход можно применить и к двумерному случаю [3; 138-142].

Метод В.В. Болотина [9] основывается на получении эффективных упругих и термоупругих постоянных на основе методов Фойхта и Рейсса в сочетании с гипотезами о полях напряжений, перемещений и деформаций. Принимаются гипотезы: в пределах каждого слоя композита поля напряжений и деформаций однородны; послойные компоненты тензора деформаций, описывающие деформирование в плоскости слоев, одинаковы для всего пакета слоев и др. При формулировке этих допущений учитывается фактический способ взаимодействия между элементами. Такой усовершенствованный подход позволяет получить результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытными данными.

В [10] приведен пример расчета двухслойной композитной пластины по определению приведенной цилиндрической жесткости. Рассматривается пластина, состоящая из бетонного слоя и стального листа. Для полоски, выделенной из изотропной композитной пластинки, напряжения в бетоне и стальном листе равны:

$$\sigma_x^б = -\frac{E_{бz}}{1-\upsilon_б^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \sigma_x^c = -\frac{E_{cz}}{1-\upsilon_c^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

где $E_б$, E_c, $v_б$, v_c — модули Юнга и коэффициенты Пуассона для бетона и стали.

Уравнение для изгибающего момента в элементарной полоске:

$$M = -\left[\frac{z_0^3}{3}\cdot\frac{E_б}{1-\upsilon_б^2} + \left[(h-z_0)^3 - (h-z_0-t)^3\right]\cdot\frac{E_c}{3\cdot\left(1-\upsilon_c^2\right)}\right]\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

где принято обозначение:

$$D_{пр} = \left[\frac{z_0^3}{3}\cdot\frac{E_б}{1-\upsilon_б^2} + \left[(h-z_0)^3 - (h-z_0-t)^3\right]\cdot\frac{E_c}{3\cdot\left(1-\upsilon_c^2\right)}\right].$$

Выражение для изгибающего момента приводится к дифференциальному уравнению изгиба элементарной полоски:

$$D_{пр}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M,$$

где $D_{пр}$ — искомая цилиндрическая жесткость.

В [11] приведено решение по получению приведенной цилиндрической жесткости для многослойной композитной пластинки через управляющую функцию. Композитная пластинка условно заменяется на «однородную» пластинку с помощью этой функции, которая определяется аналитическим или экспериментальным методами. Решаются две задачи оптимизации: изгиб пластины при заданных нагрузках и геометрии контура и изгиб пластины по заданной геометрической форме изогнутой срединной поверхности при заданных нагрузках. Оптимизацию проводят с выполнением ограничений по технологичности и при наложении ограничений на изменение толщины бетонного слоя.

В строительной практике очень часто встречаются конструкции, составленные из разнородных материалов. Типичным примером такой конструкции является железобетонная балка, в поперечном сечении которой находятся два сечения: сечения бетонного и стального стержней. При расчете неоднородных стержней вводится понятие приведенного сечения, когда неоднородный материал условно заменяется однородным, и новый стержень по своим упругим свойствам не отличается от неоднородного стержня [12].

Рассмотрены примеры расчета композитных тел из известной литературы с использованием метода осреднения. Построена структурная схема математической модели композитного тела. Подробно описан один из блоков структурной схемы - модель материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

2. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов: учеб. пособие М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

4. Кербер М.Л. Полимерные композиционные материалы. Структура. Свойства. Технологии. СПб: Профессия, 2008. 500 с.

5. Кучерюк, В.И., Шлык Ю.К. Биомеханика и моделирование: учеб.-практ. пособие. Тюмень: ТюмГНГУ, 2009. 336 с.

6. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Изд-во УРСС, 2003. 373 с.

7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.

8. Шаптала И.В. Определение локальной функции в задаче Фламана для двухфазной полуплоскости / Изв. вузов. Нефть и газ. 2007. № 4. С. 96-102.

9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

10. Кучерюк В.И., Сысоев Ю.Г., Иванов В.А. и др. Расчет тонкостенных конструкций объектов нефтяной и газовой промышленности: колл. монография. М.: Недра, 1996. 279 с.

11. Кучерюк В.И., Маа О.Н. К оптимизации многослойных композитных пластин и оболочек при изгибе / Проблемы оптимального проектирования сооружений: Сб. докладов IV Всеросс. семинара (Новосибирск. 3-5 апреля 2002 г.). Новосибирск: НГАСУ, 2002. С. 234-243.

12. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2004. 560 с.