МАТЕМАТИКА

Максим Людвигович ПЛАТОНОВ —
ст. преподаватель кафедры алгебры
и математической логики
Института математики и компьютерных наук

УДК 510.5

О ВЕРХНИХ ПОЛУРЕШЕТКАХ Е-СТЕПЕНЕЙ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

АННОТАЦИЯ. Доказано, что верхняя полурешетка $\mathfrak{R}$ рекурсивно перечислимых степеней неразрешимости изоморфна некоторой подрешетке ζ полурешетки е-степеней вычислимых нумераций семейства всех рекурсивно перечислимых множеств.

Proved, that the upper semilattes recursively enumerable degrees of insolubility $\mathfrak{R}$ is isomorphic some sub lattes ζ e-degrees of the computable numeration's of all recursively innumerable sets.

Наряду с обычной сводимостью нумерации ν к нумерации μ ($\nu \leq \mu$) [1] семейства рекурсивно перечислимых множеств в работе [2] была определена е-сводимость (сводимость по перечислимости) таких нумераций. Подробнее: нумерация ν е-сводима к нумерации μ ($\nu \leq_e \mu$) некоторого семейства рекурсивно перечислимых множеств (РПМ) S, если существует е-оператор (оператор перечисления) Ф такой, что

$$(\forall s \in S)(\mu^{-1}(s) = \Phi(\nu^{-1}(s))).$$

Раскрывая определение е-оператора Ф согласно [3], получаем, что $\nu \leq_e \mu$, если существует рекурсивно перечислимое множество W такое, что

$$(\forall s \in S)(\mu^{-1}(s)=\{x\colon (\exists y)(\langle x,y\rangle \in \mathbf{W} \wedge \mathbf{D}_y \subseteq \nu^{-1}(s))\}),$$

где $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер пары (x, y) натуральных чисел x и y, D_y — конечное подмножество множества всех натуральных чисел **N** с каноническим номером y. В этом случае говорим, что нумерация ν е-сводима к нумерации μ при помощи е-оператора Ф, отождествляя в дальнейшем оператор перечисления Ф с рекурсивно перечислимым множеством (РПМ) W.

Пусть ε — однозначная вычислимая нумерация семейства всех рекурсивно перечислимых множеств за исключением множеств $\varnothing$ и $\{0\}$. Определим нумерацию ν некоторого рекурсивно перечислимого множества R, отличного от множеств $\varnothing$ и **N**, следующим образом:

$$\nu_R(x) = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } x \in R; \\ \varnothing, \quad \text{если } x \notin R. \end{cases}$$

Напомним, что для нумераций μ и ν семейства РПМ S нумерация $\nu \oplus \mu$ определяется так:

$$(\nu \oplus \mu)(x) = \begin{cases} \nu(y), \text{ если } x = 2y; \\ \mu(y), \text{ если } x = 2y+1. \end{cases}$$

Лемма. Если нумерация μ е-сводима к некоторой вычислимой нумерации $\nu_A \oplus \varepsilon$ рекурсивно перечислимого множества A, то нумерация μ е-эквивалентна некоторой нумерации $\nu_B \oplus \varepsilon$ подходящего рекурсивно перечислимого множества B.

Доказательство. Пусть нумерация μ е-сводима к вычислимой нумерации $\nu_A \oplus \varepsilon$ ($\mu \leq_e \nu_A \oplus \varepsilon$) при помощи е-оператора Φ. Если нумерация $\mu(x) \neq \varnothing$, $\{0\}$, то существует единственное число $z \in \mathbf{N}$ такое, что $\mu(x) = (\nu_A \oplus \varepsilon)(2z+1)$, и поэтому существует такое число $y \in \mathbf{N}$, что $<x, y> \in \Phi$ и $D_y = \{2z+1\}$. Если же нумерация $\mu(x) = \{0\}$, то существует число $y \in \mathbf{N}$ такое, что $<x, y> \in \Phi$ и $D_y \subseteq \nu^{-1}(\{0\})$ и можно считать, что все элементы D_y четные. Аналогичными рассуждениями пользуемся в случае, когда нумерация $\mu(x) = \varnothing$. Определим РПМ B и C так:

$$B = \{x: (\exists y)(<x, y> \in \Phi \wedge D_y \subseteq \{2z: \nu_A(z) = \{0\}\})\},$$

$$C = \{x: (\exists y)(<x, y> \in \Phi \wedge D_y = \{2z+1\})\}.$$

Понятно, что $B = \{x: \mu(x) = \{0\}\}$, $C = \{x: \mu(x) \neq \varnothing, \{0\}\}$, $\mu(x) = \varnothing$ для любого $x \in \overline{B \cup C}$ и существует число $y \in \mathbf{N}$ такое, что $<x, y> \in \Phi$ и $D_y \subseteq \nu^{-1}(\varnothing)$. Покажем, что нумерация μ е-эквивалентна нумерации $\nu_B \oplus \varepsilon$ ($\mu =_e \nu_B \oplus \varepsilon \Leftrightarrow \mu \leq_e \nu_B \oplus \varepsilon \wedge \nu_B \oplus \varepsilon \leq_e \mu$).

Пусть $\mu \leq_e \nu_B \oplus \varepsilon$ при помощи е-оператора Φ. Определим, е-оператор Ψ так: для всех $x, y \in \mathbf{N}$ перечисляем числа $<x,y> \in \Phi$ и относим к е-оператору Ψ число:

(a) $<x, y>$, если $D_y = \{2z+1\}$ для подходящего $z \in \mathbf{N}$;

(b) $<x, u>$, если $D_y = \{2z\}$, где $D_u = \{2x\}$;

(c) $<x,v>$, если D_y состоит из более чем одного четного числа, где $D_v = \{2a\}$, a — фиксированный элемент, для которого $\nu_B(a) = \varnothing$; и, если x в дальнейшем вычисляется в B, то и число $<x, w>$, где $D_w = \{2x\}$.

Из свойств е-оператора Φ и определения е-оператора Ψ следует, что $\mu \leq_e \nu_B \oplus \varepsilon$ при помощи е-оператора Ψ.

Обратно, пусть $\nu_B \oplus \varepsilon \leq_e \mu$ посредством е-оператора Ψ, определяемого так:

(a) если $x = 2y+1$, то относим к Ψ число $<x, u>$, где $D_u = \{y\}$.

(b) если $x = 2y$, то относим к Ψ число $<x, v>$, где $D_v = \{y, b\}$, b — фиксированный элемент, для которого $\mu_B(b) = \varnothing$; и, если в дальнейшем число y вычисляется в B, то и пару $<x, w>$, где $D_w = \{y\}$.

Очевидно также $\nu_A \leq_e \nu_B$ потому, что $\nu_A \leq_e \mu \leq_e \nu$. □

Теорема. Множество всех вычислимых нумераций вида $\nu_A \oplus \varepsilon$ образуют подрешетку ζ полурешетки е-степеней вычислимых нумераций семейства всех рекурсивно перечислимых множеств, изоморфную верхней полурешетке $\mathfrak{R}$ рекурсивно перечислимых степеней неразрешимости.

Доказательство. Как показано в лемме, если $\mu \leq_e \nu_A \oplus \varepsilon$, то нумерация μ е-эквивалентна вычислимой нумерации вида $\nu_B \oplus \varepsilon$ для подходящего РПМ B, причем $\nu_B \leq_e \nu_A$. В частности, $\overline{B} \leq_e \overline{A}$, что для РПМ A и B равносильно Тьюринговой сводимости (T-сводимости) множества B к множеству A [3]. Обратно, пусть $B \leq_T A$ для РПМ A и B. Значит, $\overline{B} \leq_e \overline{A}$ при помощи е-оператора Φ. Тогда $\nu_B \oplus \varepsilon \leq_e \nu_A \oplus \varepsilon$ посредством е-оператора Ψ, причем

(a) $<2y+1, z> \in \Psi \Leftrightarrow D_z = \{2y+1\}$,

(b) $<2y, z> \in \Psi \Leftrightarrow <y,u> \in \Phi \wedge D_z = \{2x: x \in D_u\} \vee (y \in B ? D_z = \{2a\})$,

где a — фиксированный элемент и $\nu_A(2a) = \{0\}$.

Итак, отображение $\varphi : \zeta \to \mathfrak{R}$ является требуемым изоморфизмом, причем $\varphi(\mathbf{a})$ есть T-степень РПМ A и нумерация $\nu_A \oplus \varepsilon \in \mathbf{a}$ является точной верхней гранью для нумерации $\nu_B \oplus \varepsilon$, при этом нумерация $\mu =_e \nu_A \oplus \varepsilon$ есть e-степень, содержащая нумерацию $\nu_{A\oplus B} \oplus \varepsilon$ множества $A \oplus B = \{2x: x \in A\} \cup \{2x+1: x \in B\}$. □

Обозначим через ζ верхнюю полурешетку степеней всех вычислимых нумераций $\nu_A \oplus \varepsilon$ РПМ A. В частности, степени $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ будут наименьшей и наибольшей степенями ζ, где $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ — степени нумераций $\nu_R \oplus \varepsilon$ рекурсивного множества R и $\nu_K \oplus \varepsilon$ креативного множества K соответственно. Отметим также, что степень $\mathbf{a}_0$ является минимальным элементом полурешетки ζ. Из теоремы следует, что некоторые, но не все предложения, истинные в $\mathfrak{R}$, оказываются истинными и в ζ. Некоторые из таких предложений приводятся ниже с указанием литературы, где можно найти доказательства аналогичных результатов для $\mathfrak{R}$.

Следствие 1. [4] Полурешетка ζ не является решеткой.

Следствие 2. [4] В полурешетке ζ существует счетная последовательность попарно несравнимых степеней.

Следствие 3. [4] Для любой степени $\mathbf{b}$ такой, что $\mathbf{a}_0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}_1$, существуют несравнимые степени $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$, для которых степень $\mathbf{b}$ есть точная верхняя грань, а степень $\mathbf{a}_0$ есть точная нижняя грань.

Следствие 4. [4] Для любой степени $\mathbf{b}$ такой, что $\mathbf{a}_0 < \mathbf{b} < \mathbf{a}_1$, существует несравнимая с ней степень.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977
2. Дегтев А. Н. О сводимостях нумераций //Мат. сб. 1980. Т. 112. № 2. С. 207-219.
3. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
4. Соар Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань, «Казанское математическое общество», 2000.