Виктор Иванович КРУГЛИКОВ —
зав. кафедрой математического анализа и теории функций, доктор физико-математических наук,

Владимир Иванович ПАЙКОВ —
доцент кафедры математического анализа и теории функций Донецкого национального университета, кандидат физико-математических наук

УДК 517.53/57

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГОМЕОМОРФИЗМОВ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩЕМ ПРИРОДУ ОТОБРАЖЕНИЙ, КВАЗИКОНФОРМНЫХ В СРЕДНЕМ

АННОТАЦИЯ. На конкретном семействе гомеоморфизмов отмечается ряд особых свойств, присущих классу квазиконформных отображений и не имеющих места для класса отображений, квазиконформных в среднем.

Special properties for quasiconformal mappings which are not exist for mappings quasiconformal in the mean.

Теория отображений с обобщенными производными представляет сейчас один из наиболее содержательных разделов современной математики, имея многочисленные и разнообразные приложения как в самой математике, так и в ее прикладных областях.

Наиболее интенсивное развитие этой теории началось во второй половине прошлого века, когда в исследованиях начали широко и систематически применяться фундаментальные характеристические законы искажения емкостей конденсаторов и модулей семейств кривых при отображениях различных классов, среди которых следует выделить прежде всего последовательно расширяющиеся классы конформных, квазиконформных и квазиконформных в среднем отображений.

Каждый из более широких классов отображений с обобщенными производными, сохраняя некую общую совокупность качественных свойств с более узким классом, имеет в то же время и свои специфические отличия. В частности, квазиконформные отображения и их обобщения не обладают, вообще говоря, всеми дифференциальными свойствами, присущими конформным отображениям.

В данной заметке ставится цель указать на некоторые особые свойства, отличающие класс пространственных квазиконформных отображений от более широкого класса отображений, квазиконформных в среднем. Мы уделяем здесь основное внимание лишь этим двум из упомянутых выше трех классов отображений, поскольку именно они являются объектом исследований многих отечественных и зарубежных математиков, в то время как класс пространственных конформных отображений весьма беден и содержит лишь мёбиусовы преобразования.

1. Используя обозначения, терминологию и основные положения теории рассматриваемых здесь отображений, изложенные в [1], [2], приведем сначала в нужной нам форме необходимые аналитические определения.

Далее везде объектом наших исследований будут гомеоморфизмы $y = f(x) : D \to \Delta$ ограниченных областей D и Δ из R^n, $n \geq 3$ такие, что f и f^{-1} являются ACL-отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях задания.

Для таких гомеоморфизмов имеют смысл величины $H_I(x, f)$ $H_0(x, f)$ и $J(x, f)$ называемые, соответственно, внутренним и внешним аналитическими отклонениями и якобианом отображения f и определяемые для п. в. точек $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ из D по формулам

$$H_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l^n(x,f)} \text{ и } H_0(x,f) = \frac{|f'(x)|^n}{|J(x,f)|},$$

где $f'(x)$ — производное отображение и

$$|f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|, \; l(x,f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|.$$

Дополнительным условием конечности величин (коэффициентов квазиконформности)

$$\operatorname{ess}_{x\in D} \sup H_I(x,f) \text{ и } \operatorname{ess}_{x\in D} \sup H_0(x,f)$$

выделяется класс квазиконформных отображений.

Если же для некоторых $p, q \geq 1/(n-1)$ конечны интегралы

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx \text{ и } \int_D H_0^q(x,f)dx,$$

то говорят об отображениях, квазиконформных в (p,q) — среднем.

Наконец, условием конечности интеграла

$$\int_D |f'(x)|^n dx$$

характеризуется класс ACL^n — отображений.

Констатируя пока лишь очевидный факт вхождения класса квазиконформных отображений в каждый из двух других классов, оставим вопрос более подробного сравнения классов отображений до п. 3.

2. При изучении многих свойств отображений, квазиконформных в среднем, источником разнообразных пояснительных примеров и контрпримеров является следующее специальное семейство гомеоморфизмов.

Основной пример. Для произвольно зафиксированного числа и некоторого параметра $\alpha > 0$ рассмотрим n-мерные шары

$$D = \{x : |x| < a\} \text{ и } \Delta = \{y : |y| < \ln^{-\alpha}(1/a)\},$$

и определим гомеоморфное отображение $y = f(x) : D \to \Delta$ следующим образом.

Пусть $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ и $(\rho, \psi_1, \dots \psi_{n-1})$ — полярные координаты в шарах D и Δ соответственно. В этих координатах отображение f: $D \to \Delta$ зададим по правилу

$$\rho = \ln^{-\alpha}(1/r), \; \varphi_k = \psi_k, \; k = 1, \dots, n-1,$$

если $r \neq 0$, и $\rho = 0$, если $r = 0$

Для подсчета аналитических величин $J(x, f)$, $|f'(x)|$, $l(x, f)$, $H_0(x, f)$ и $H_I(x, f)$ отображение $y = f(x)$ удобно представить в виде суперпозиции

$$f = \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1},$$

в которой отображение Φ осуществляет преобразование полярных координат $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ в полярные координаты $(\rho, \psi_1, \dots \psi_{n-1})$ по правилу

$$\rho = \ln^{-\alpha}(1/r), \; r > 0, \; \varphi_k = \psi_k, \; k = 1, \dots, n-1,$$

а отображения φ и ψ преобразуют полярные координаты $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ и $(\rho, \psi_1, \dots \psi_{n-1})$, соответственно, в прямоугольные координаты и по хорошо известным формулам, которые, в частности, для преобразования имеют следующий вид (для преобразования φ такие формулы вполне аналогичны)

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

где $r>0$, $0<\varphi_k<\pi$, $k = 1, ..., n - 2$, $0 < \varphi_{n-1}<2\pi$.

Нетрудно теперь проверить, что отображения f и f^{-1} невырожденно непрерывно дифференцируемы п. в. в своих областях задания, при этом для $r\neq 0$, где $r=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$, нужные нам аналитические величины имеют вид

$$J(x,f)=\alpha r^{-n}\ln^{-\alpha n-1}(1/r),\ l(x,f)=\alpha r^{-1}\ln^{-\alpha-1}(1/r),\ |f'(x)|=r^{-1}\ln^{-\alpha}(1/r),$$

$$H_0(x,f)=\alpha^{-1}\ln(1/r),\ H_I(x,f)=\alpha^{1-n}\ln^{n-1}(1/r).$$

Проводя далее вычисление интегралов

$$\int_D |f'(x)|^n dx=\omega_{n-1}\int_0^a r^{-1}\ln^{-n\alpha}(1/r)dr,$$

$$\int_\Delta \left|(f^{-1}(y))'\right|^n dy=\int_D H_I(x,f)dx=\omega_{n-1}\alpha^{1-n}\int_0^a r^{n-1}\ln^{n-1}(1/r)dr,$$

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx=\omega_{n-1}\alpha^{1+p-pn}\int_0^a r^{-1}\ln^{p(n-1)-\alpha n-1}(1/r)dr,$$

$$\int_D H_0^q(x,f)dx=\omega_{n-1}\alpha^{-q}\int_0^a r^{n-1}\ln^{q}(1/r)dr,$$

в которых через ω_{n-1} обозначена площадь поверхности единичной $(n-1)$-мерной сферы в R^n, видим, что второй и четвертый из этих интегралов являются сходящимися, первый интеграл сходится при $\alpha>1/n$, а третий интеграл расходится, если $\alpha n-p(n-1)\le 0$.

3. Первое применение построенного семейства отображений относится к более подробному, чем в п. 1, анализу сравнения классов отображений.

Напоминая, что класс квазиконформных отображений является подклассом как класса отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, так и класса ACL^n — гомеоморфизмов, в следующем утверждении указываются условия на параметры p и q, обеспечивающие последовательное включение данных трех классов отображений.

ТЕОРЕМА 1. При $p,q\ge n-1$ класс отображений, квазиконформных в (p, q) — среднем, является подклассом класса ACL^n — гомеоморфизмов f и f^{-1}, при этом имеет место строгое включение.

Доказательство. Поскольку ACL — отображения f и f^{-1}, невырожденно дифференцируемые п. в. в своих областях задания, обладают N-свойством, то, предполагая $p,q\ge n-1$, в силу соотношений

$$\int_D |f'(x)|^n dx=\int_D H_0(x,f)|J(x,f)|dx\le\int_D H_I^{n-1}(x,f)|J(x,f)|dx\le\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx,$$

$$\int_\Delta \left|(f^{-1}(y))'\right|^n dy=\int_D H_I(x,f)dx\le\int_D H_0^{n-1}(x,f)dx\le\int_D H_0^q(x,f)dx$$

выводим, что класс отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, при $p,q\ge n-1$ является подклассом класса ACL^n — гомеоморфизмов f и f^{-1}. Вложение классов здесь будет строгим на основании примера из п. 2, в котором считая $p,q\ge n-1$ и выбирая α так, чтобы $1/n<\alpha\le p(n-1)/n$, заключаем, что f не является отображением, квазиконформным в (p, q)-среднем, хотя f, f^{-1} и $\in ACL^n$

Дополнительно к этой теореме заметим, что наиболее содержательной теория отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, выглядит при условиях на параметры p и q в виде $p, q > n-1$. Так что следующее утверждение представляет некий интерес лишь для характеристики степени полноты решения вопроса о сравнении классов отображений, когда один или оба из параметров p, q не удовлетворяют требованиям теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. ACL^n-гомеоморфизмы f и f^{-1} являются отображениями, квазиконформными в $(1/(n-1), 1/(n-1))$-среднем.

Если один из параметров p или q находится в интервале $(1/(n-1), n-1)$, то класс отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем и класс ACL^n-гомеоморфизмов f и f^{-1} имеют непустое пересечение и каждый из этих классов в общем случае содержит отображения, не входящие в другой класс.

Доказательство. Как уже неоднократно отмечалось ранее, ACL^n-гомеоморфизмы f и f^{-1} обладают N-свойством и невырожденно дифференцируемы п.в. в своих областях задания D и Δ соответственно. Используя хорошо известные свойства аналитических отклонений гомеоморфизмов f и f^{-1}, выводим

$$\int_D H_I^{\frac{1}{n-1}}(x,f)|J(x,f)|dx \le \int_D H_0(x,f)|J(x,f)|dx = \int_D |f'(x)|^n dx < +\infty,$$

а также

$$\int_D H_0^{\frac{1}{n-1}}(x,f)dx = \int_\Delta H_I^{\frac{1}{n-1}}(y,f^{-1})|J(y,f^{-1})|dy \le \int_\Delta |(f^{-1}(y))'|^n dy < +\infty,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Далее, если один из параметров p или q находится в интервале $(1/(n-1), n-1)$, то класс отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, и класс ACL^n-гомеоморфизмов f и f^{-1} имеют непустое пересечение, поскольку каждый из этих классов содержит, например, квазимоконформные отображения.

В то же время основной пример из п. 2 показывает, что для любых $p > 1/(n-1)$ и $q \ge 1/(n-1)$ при условии $1/n < \alpha \le p(n-1)/n$ может быть построен гомеоморфизм f такой, что f, $f^{-1} \in ACL^n$, однако f не является отображением, квазимоконформным в (p, q)-среднем.

С другой стороны, фиксируя произвольно параметры $1/(n-1) \le p < n-1$ и $1/(n-1) \le q < n/(n-1)$, в n-мерном кубе

$$D = \{x = (x_1,\dots,x_n) : 0 < x_k < 1,\ k = 1,\dots,n\}$$

определим отображение $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$ по правилу

$$f(x) = (x_1,\dots,x_{n-1}, x_n^{1-\beta}/(1-\beta)),$$

где параметр β удовлетворяет условию

$$\frac{1}{n} \le \beta < \min\left\{\frac{1}{p+1}, \frac{1}{q(n-1)}\right\}.$$

Это отображение гомеоморфно преобразует куб D на параллелепипед

$$\Delta = \{y = (y_1,\dots,y_n) : 0 < y_k < 1,\ k = 1,\dots,n-1,\ 0 < y_n < 1/(1-\beta)\}.$$

Очевидно, f и f^{-1} невырожденно непрерывно дифференцируемы в своих областях задания, при этом

$$l(x,f) = 1,\ |f'(x)| = J(x,f) = H_I(x,f) = x_n^{-\beta},\ H_0(x,f) = x_n^{\beta-\beta n}$$

Простыми рассуждениями нетрудно проверить, что при выбранных нами выше значениях параметров p, q и β интеграл

$$\int |f'(x)|^n dx = \int_0^1 x_n^{-\beta n} dx_n$$

расходится, а потому $f \notin ACL^n$. В то же время сходимость интегралов

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx = \int_0^1 x_n^{-p\beta-\beta} dx_n \quad \text{и} \quad \int_D H_0^q(x,f)dx = \int_0^1 x_n^{q\beta-q\beta n} dx_n .$$

означает, что гомеоморфизм f является отображением, квазиконформным в (p, q)-среднем. Теорема доказана.

Наконец, последний здесь наш шаг в исследовании вопроса о сравнении классов отображений связан с известной теоремой Ф. Геринга о принадлежности квазиконформного отображения f классу $ACL^{n+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$, зависящим от коэффициента квазиконформности отображения f. Покажем, что в случае отображений, квазиконформных в среднем, этот результат уже иметь места не будет.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольно заданной пары параметров $p, q \geq 1/(n-1)$ существует гомеоморфизм $f : D \to \Delta$ шаров D и Δ, являющийся отображением, квазиконформным в (p, q)-среднем, при этом, однако, $f \notin ACL^{n+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $f : D \to \Delta$ — гомеоморфное отображение, описанное в основном примере из п. 2. Сохраняя обозначения этого примера и используя вычисленные там величины $J(x, f)$, $|f'(x)|$, $l(x, f)$, $H_0(x, f)$, $H_I(x, f)$, для произвольно заданных параметров $p, q \geq 1/(n-1)$ подберем параметр $\alpha > 0$ так, чтобы сходились интегралы

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx = \omega_{n-1}\alpha^{1+p-pn}\int_0^a r^{-1}\ln^{p(n-1)-\alpha n-1}(1/r)dr,$$

$$\int_D H_0^q(x,f)dx = \omega_{n-1}\alpha^{-q}\int_0^a r^{n-1}\ln^q(1/r)dr.$$

Для этого, очевидно, надо положить $\alpha > p(n-1)/n$, и в этом случае f является отображением, квазиконформным в (p, q)-среднем.

В то же время, при всяком $\alpha > 0$ интеграл

$$\int_D |f'(x)|^{n+\varepsilon}dx = \omega_{n-1}\int_0^a r^{-(1+\varepsilon)}\ln^{-\alpha(n+\varepsilon)}(1/r)dr$$

расходится для любого $\alpha > 0$. Значит, $f \notin ACL^{n+\varepsilon}(D)$ с любым $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

4. Еще одним применением основного примера из п. 2 является иллюстрация точности оценки искажения расстояний при отображениях, квазиконформных в среднем.

Напомним, не вдаваясь в уточнения, что при квазиконформных преобразованиях пространственных областей оценка искажения расстояний характеризуется условием Гёльдера.

В случае же, когда $f : D \to \Delta$ — отображение, квазиконформное в (p, q)-среднем (при $p, q > n-1$), и $F \subset D$ — произвольный компакт, то для любой пары точек $a, b \in F$, удовлетворяющих условию $|a - b| < \delta$, где $\delta \leq \min\{1, |F, \partial D|^4\}$, справедлива оценка

$$|f(a) - f(b)| \leq A[\Phi_p(D)]^{1/n}\ln^{p(1-n)/n}(1/|a-b|),$$

в которой $\Phi_p(D) = \int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx$, а постоянная A зависит только от n и p.

ТЕОРЕМА 4. При произвольно фиксированных параметрах $p, q > n-1$ приведенную выше оценку искажения расстояний в классе отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, нельзя заменить более сильной по порядку оценкой вида $c \cdot \ln^{-\beta}(1/|a-b|)$, $c \equiv const$, ни для какого из произвольно зафиксированных $\beta > p(n-1)/n$.

Доказательство. Если в основном примере из п. 2, исходя из неких зафиксированных значений p, q > n-1, выделить семейство гомеоморфизмов $F = \{f_\alpha\}$, различаемых параметром $\alpha > p(n-1)/n$, то это, подобно как при доказательстве теоремы 3, обеспечит сходимость интегралов

$$\int_D H_I^p(x,f_\alpha)|J(x,f_\alpha)|dx \quad \text{и} \quad \int_D H_0^q(x,f_\alpha)dx,$$

гарантируя характеристику каждого из гомеоморфизмов $y = f_\alpha(x): D \to \Delta$ как отображения, квазиконформного в (p, q)-среднем, шаров

$$D = \{x: |x| < a\} \quad \text{и} \quad \Delta = \{y: |y| < \ln^{-\alpha}(1/a)\}$$

где $0 < a < 1$ — произвольно заданное число.

Поскольку здесь

$$f_\alpha(0) = 0 \quad \text{и} \quad |f_\alpha(x)| = \ln^{-\alpha}(1/|x|) \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

то в качестве верхней оценки расстояния

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(0)| = \ln^{-\alpha}(1/|x-0|),$$

имевшей бы место для всего рассматриваемого здесь семейства $F = \{f_\alpha\}$ отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем, нельзя использовать более сильную по порядку оценку вида $c \cdot \ln^{-\beta}(1/|x|)$ ни для какого из $\beta > p(n-1)/n$ (которая заведомо была бы не пригодной для гомеоморфизма $f_\alpha \in F$ при $\beta > \alpha > p(n-1)/n$). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Относительно обсуждения точности соответствующей оценки искажения для плоских ACL^2-гомеоморфизмов см. [3], а также [4; 252-259],.

5. В завершение статьи, опираясь опять же на основной пример из п.2, покажем, что в определении отображений, квазиконформных в среднем, требования ограниченности средних отклонений независимы (чем еще раз подчеркивается специфика более узкого класса квазиконформных отображений, когда в его определении из п. 1 достаточно требования конечности лишь одного из коэффициентов квазиконформности).

ТЕОРЕМА 5. Для любых параметров p, $q \geq 1/(n-1)$ существует гомеоморфизм $f: D \to \Delta$ шаров D и Δ такой, что f и f^{-1} являются ACL-отображениями, невырожденно дифференцируемыми п. в. в своих областях задания, при этом

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx = +\infty, \text{ хотя } \int_D H_0^q(x,f)dx < +\infty.$$

Доказательство. Выбирая в качестве нужного гомеоморфизма f пока что произвольное отображение из основного примера, видим, что вычисленный в этом примере интеграл

$$\int_D H_0^q(x,f)dx$$

конечен при любых p, $q \geq 1/(n-1)$.

Если теперь зафиксировать произвольно p, $q \geq 1/(n-1)$ и выбрать какое-либо $0 < \alpha \leq p(n-1)/n$, то для соответствующего этому значению параметра α отображения f интеграл

$$\int_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx$$

будет расходящимся. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером гомеоморфизма с дифференциальными свойствами, как в теореме 5, но имеющим конечным первый интеграл и бесконечным второй, служит отображение, обратное к построенному при доказательстве этой теоремы отображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
2. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. 1986. 130. № 2. С. 185-206.
3. Миклюков В. М. О локальном модуле непрерывности отображений класса BL // Материалы четвертой научн. конф. по мат. и мех. Т. 1. Томск: ТГУ, 1974. С. 24-25.
4. Суворов Г. Д. Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.

Антон Павлович ДЕВЯТКОВ —
студент V курса
Института математики и компьютерных наук

УДК 517.53/57

*О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОМЕОМОРФИЗМОВ**

АННОТАЦИЯ. Изучаются непрерывно устранимые множества для гомеоморфизмов и последовательностей гомеоморфизмов различных классов.

This paper studies continuously removal sets for homeomorphisms and sequences of homeomorphisms from various classes.

Классическое понятие AB-множества E из плоской области D выражает возможность аналитического продолжения на это множество любой ограниченной аналитической в $D\setminus E$ функции $f(z)$.

Это понятие оказалось плодотворным и при решении в [1] задачи о распространении на компактное множество $E\subset D$ заданного в $D\setminus E$ свойства непрерывной сходимости последовательности аналитических функций. А именно, показано, что произвольная равномерно ограниченная и непрерывно сходящаяся в области $D\setminus E$ последовательность аналитических функций может быть продолжена на множество E с сохранением свойства непрерывной сходимости тогда и только тогда, когда E является AB-множеством.

Целью настоящей статьи является исследование аналогичного вопроса о возможности распространения свойства непрерывной сходимости в случае последовательностей лишь однолистных функций, и в частности, для последовательностей конформных, квазиконформных и более общих отображений.

1. Сначала определимся в необходимых предположениях и терминологии.

Пусть D — произвольная ограниченная область в комплексной плоскости C и E — компактное множество, расположенное в D так, что $D\setminus E$ — область.

Рассматривая в области $D\setminus E$ некоторый класс H ограниченных гомеоморфных отображений, множество $E\subset D$ назовем *топологически устранимым в классе* H, если любой гомеоморфизм $f\in H$ допускает гомеоморфное продолже-

*Автор выражает благодарность профессору В. И. Кругликову за постановку задачи и помощь в работе.