ЗАМЕЧАНИЕ. Примером гомеоморфизма с дифференциальными свойствами, как в теореме 5, но имеющим конечным первый интеграл и бесконечным второй, служит отображение, обратное к построенному при доказательстве этой теоремы отображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.

2. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. 1986. 130. № 2. С. 185-206.

3. Миклюков В. М. О локальном модуле непрерывности отображений класса BL // Материалы четвертой научн. конф. по мат. и мех. Т. 1. Томск: ТГУ, 1974. С. 24-25.

4. Суворов Г. Д. Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.

Антон Павлович ДЕВЯТКОВ —
студент V курса
Института математики и компьютерных наук

УДК 517.53/57

*О СТИРАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОМЕОМОРФИЗМОВ**

АННОТАЦИЯ. *Изучаются непрерывно устранимые множества для гомеоморфизмов и последовательностей гомеоморфизмов различных классов.*

This paper studies continuously removal sets for homeomorphisms and sequences of homeomorphisms from various classes.

Классическое понятие AB-множества E из плоской области D выражает возможность аналитического продолжения на это множество любой ограниченной аналитической в $D\setminus E$ функции $f(z)$.

Это понятие оказалось плодотворным и при решении в [1] задачи о распространении на компактное множество $E\subset D$ заданного в $D\setminus E$ свойства непрерывной сходимости последовательности аналитических функций. А именно, показано, что произвольная равномерно ограниченная и непрерывно сходящаяся в области $D\setminus E$ последовательность аналитических функций может быть продолжена на множество E с сохранением свойства непрерывной сходимости тогда и только тогда, когда E является AB-множеством.

Целью настоящей статьи является исследование аналогичного вопроса о возможности распространения свойства непрерывной сходимости в случае последовательностей лишь однолистных функций, и в частности, для последовательностей конформных, квазиконформных и более общих отображений.

1. Сначала определимся в необходимых предположениях и терминологии.

Пусть D — произвольная ограниченная область в комплексной плоскости C и E — компактное множество, расположенное в D так, что $D\setminus E$ — область.

Рассматривая в области $D\setminus E$ некоторый класс H ограниченных гомеоморфных отображений, множество $E\subset D$ назовем *топологически устранимым в классе* H, если любой гомеоморфизм $f\in H$ допускает гомеоморфное продолже-

*Автор выражает благодарность профессору В. И. Кругликову за постановку задачи и помощь в работе.

ние на множество E (становясь, таким образом, ограниченным гомеоморфным отображением в области D).

У нас в качестве класса H будут выступать, прежде всего, класс конформных отображений, а также содержащие его разнообразные более общие классы отображений (квазиконформных, квазиконформных в среднем и др.). В связи с этим далее везде считаем, что рассматриваемый нами класс гомеоморфизмов H содержит в качестве своего подмножества все ограниченные конформные в $D\setminus E$ отображения.

В этом случае нетрудно заметить, что топологически устранимые множества всюду разрывны (то есть не содержат континуумов в качестве своих связных компонент). Действительно, во-первых, такие множества не содержат внутренних точек (иначе для конформного отображения внешности компоненты, содержащей внутренние точки, на внешность отрезка невозможно его гомеоморфное продолжение). А во-вторых, если множество E содержит континуум, то в качестве отображения класса H, не имеющего непрерывного продолжения, следует выбрать сужение на $D\setminus E$ конформного отображения внешности этого континуума на внешность круга.

Свойство всюду разрывности топологически устранимого множества E позволяет, изучая условия возможности гомеоморфного продолжения отображения $f\in H$ на множество E, ограничиться более слабым условием возможности лишь непрерывного продолжения, ибо в этом случае непрерывно продолженное на E отображение будет к тому же и однолистным. В самом деле, если бы для пары точек $a, b\in E$ нарушалось условие однолистности непрерывно продолженного на E гомеоморфного в $D\setminus E$ отображения $f(z)$ так, что $f(a)=f(b)$, то, в соответствии со свойствами всюду разрывного множества E (см., напр., [10; 208], мы могли бы окружить точки $a, b\in E$ соответственно двумя непересекающимися жордановыми контурами γ_a и γ_b, расположенными в D и не проходящими через точки множества E. Образы этих кривых $f(\gamma_a)$ и $f(\gamma_b)$ также являлись бы непересекающимися замкнутыми жордановыми кривыми, охватывающими соответственно точки $f(a)$ и $f(b)$. Но это противоречило бы равенству $f(a)=f(b)$.

Сказанное позволяет определение топологически устранимых в классе H всюду разрывных множеств E заменить эквивалентным ему определением *непрерывно устранимых множеств* и кратко называть их HC-множествами, где первый символ H характеризует рассматриваемый класс отображений, а второй символ C — возможность непрерывного продолжения отображений.

Опишем теперь соответствующее понятие устранимого множества для последовательностей отображений.

Рассматривая в области $D\setminus E$ класс $\tilde{H}$ равномерно ограниченных и непрерывно сходящихся последовательностей $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ гомеоморфизмов $f_j\in H$, $j=1, 2, \ldots$, множество $E\subset D$ назовем $\tilde{H}C$-*устранимым* (или $\tilde{H}C$-*множеством*), если имеющееся в каждой точке из $D\setminus E$ свойство непрерывной сходимости последовательности отображений можно распространить и на точки множества E, то есть для всякой последовательности гомеоморфизмов $(f_j)\in \tilde{H}$ и любой точки $a\in E$ существует предел $\lim_{j\to\infty} f_j(z_j)$, где (z_j) — произвольно выбранная последовательность точек $z_j\in D\setminus E$, $j=1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке $a\in E$.

В качестве первого комментария к этому определению необходимо отметить почти очевидное включение $\tilde{H}C\subset HC$ для классов HC- и $\tilde{H}C$ — устранимых множеств (для его обоснования достаточно выбрать в классе $\tilde{H}$ все возможные «стационарные» последовательности функций $f_j(z) \equiv f(z)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $f \in H$ — произвольная функция).

Еще одно замечание относится здесь к уточнению свойств последовательностей гомеоморфизмов из класса $\tilde{H}$.

Требование непрерывной сходимости в $D \setminus E$ каждой из таких последовательностей равносильно [2] равномерной сходимости внутри $D \setminus E$ к непрерывной функции f.

Ориентируясь на приложение наших результатов к конформным, квазиконформным и более общим отображениям, мы можем предполагать наличие у предельной функции f дополнительных топологических свойств, заключающихся в том, что f является либо константой, либо f есть гомеоморфизм того же конкретного класса.

Именно такое свойство замкнутости операции предельного перехода для последовательностей отображений (f_j) класса $\tilde{H}$ (когда предельная функция $f(z) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(z_j)$, $z \in D \setminus E$, есть либо константа, либо гомеоморфизм из класса H) мы и предполагаем далее имеющим место.

2. Следующее утверждение является основным в данной работе.

ТЕОРЕМА 1. Классы устранимых множеств HC и $\tilde{H}C$ совпадают.

Доказательство. Справедливость включения $\tilde{H}C \subset HC$ нами уже отмечалась выше.

Для доказательства обратного включения $HC \subset \tilde{H}C$ возьмем произвольную последовательность гомеоморфизмов $(f_j) \in \tilde{H}$ и рассмотрим сначала случай, когда она равномерно сходится внутри области $D \setminus E$ к гомеоморфизму $f \in H$.

Согласно определению $\tilde{H}C$-множества, мы должны проверить, что для любой точки $a \in E$ и произвольной последовательности точек $z_j \in D \setminus E$, $j=1, 2, \ldots$, сходящейся к точке a, существует предел $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(z_j)$.

Так как множество E является HC-устранимым, то считаем далее отображения f и f_j, $j=1, 2, \ldots$, уже продолженными до гомеоморфизмов во всей области D.

Поскольку свойства компактности и всюду разрывности сохраняются при гомеоморфных преобразованиях, то таковым будет множество $f(E)$ из области $f(D)$.

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ окружим точку $f(a) \in f(E)$ замкнутой жордановой кривой, расположенной в области $f(D)$, не проходящей через точки множества $f(E)$ и ограничивающей область диаметра меньше, чем ε. Прообраз этой кривой при гомеоморфном отображении f обозначим через γ, а саму кривую через $f(\gamma)$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = a$, то, начиная с некоторого номера, все точки последовательности (z_j) попадают в конечную область, ограниченную кривой γ. Каждое отображение f_j гомеоморфно в D, и, значит, точка $f_j(z_j)$ лежит внутри области, ограниченной кривой $f_j(\gamma)$. Замечая теперь, что поскольку внутри области D последовательность отображений (f_j) равномерно сходится к гомеоморфизму f, то, начиная с некоторого номера, все кривые $f_j(\gamma)$ лежат в ε-окрестности кривой $f(\gamma)$, а потому для всех достаточно больших номеров m и n имеет место неравенство

$$\left|f_m(z_m) - f_n(z_n)\right| \le \left|z_m, f(\gamma)\right| + diam\, f(\gamma) + \left|z_n, f(\gamma)\right| < 3\varepsilon$$

Следовательно, последовательность $(f_j(z_j))$ фундаментальна и желаемое существование предела $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(z_j)$ доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть случай сходимости последовательности (f_j) к постоянному отображению $f(z) \equiv C$, $z \in D$. В этом случае в качестве γ, вне зависимости от выбора точки $a \in E$, следует взять кривую, охватывающую все множество E, и заметить, что, начиная с некоторого номера, все кривые $f_j(\gamma)$ лежат в ε-окрестности вырождающегося здесь в точку множества $f(\gamma)$, а потому фундаментальность последовательности $(f_j(z_j))$ не вызывает сомнения. Теорема полностью доказана.

3. Чтобы привести ряд важнейших следствий доказанной теоремы, необходимо заметить сначала, что если в качестве класса гомеоморфизмов H рассмотреть один из конкретных классов:

- класс конформных отображений [6],
- класс K-квазиконформных отображений [4],
- класс отображений, квазиконформных в (p, q, K)-среднем [9],
- класс BL_K-гомеоморфизмов [7, 8] (совпадающий с классом отображений, квазиконформных в $(1, 1, K)$-среднем [9]),

а в качестве класса последовательностей гомеоморфизмов $\tilde{H}$ выбирать один из четырех соответствующих классов последовательностей отображений, то каждый из этих конкретных классов последовательностей гомеоморфизмов обладает требующимся в теореме 1 свойством замкнутости операции предельного перехода, а потому имеет место.

Теорема 2. Непрерывно устранимые множества в классе отдельных гомеоморфизмов и в классе последовательностей гомеоморфизмов совпадают попарно для описанных выше конкретных совокупностей отображений: конформных, K-квазиконформных, квазиконформных в (p, q, K)-среднем и BL_K-гомеоморфизмов.

Замечание. Обратим внимание на то, что условие непрерывной продолжимости конформных отображений не гарантирует наличие у продолженных функций дополнительных дифференциальных свойств (соответствующие примеры см. [3, 5]). В случае же неоднолистных отображений оказалось, что классы аналитически и непрерывно устранимых множеств совпадают, что повлекло затем последующее заключение о совпадении классов непрерывно устранимых множеств для отдельных функций и последовательностей функций (подробнее см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Девятков А. П., Кругликов В. И. О стирании особенностей последовательностей аналитических функций // ДАН. 2006. Т. 406. № 5.

2. Stoilow, S. Asupra convergentei continue. Studii si cercetari mat., 1956, 7. № 3-4. S. 247-250.

3. Lehto, O. Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings. Proceedings of the romanian-finnish seminar on Teichmuller spaces and quasiconformal mappings. Brasov-Romania, 1969. Publishing house of the Academy of the Socialist Republic of Romania, 1971. P. 203-214.

4. Gehring, F. W. The Caratheodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1963. № 336/11. P. 1-21.

5. Белинский П. П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974. 100 с.

6. Каратеодори К. Конформное отображение. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 132 с.

7. Lelong-Ferrand, J. Representation conforme et transformation a integrale de Dirichlet bornee. Paris: Gauthier-Villars, 1955. 257 p.

8. Суворов Г. Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. Киев: Наукова думка, 1981. 168 с.

9. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов, простые концы и пространственные отображения, квазиконформные в среднем. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Донецк, 1987. 286 с.

10. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: ФМ, 1963. 212 с.