*Алексей Григорьевич ХОХЛОВ —*
*доцент кафедры математического*
*анализа и теории функций,*
*кандидат физико-математических наук*

**УДК 515.12.**

# *ВЫПУКЛЫЕ АНАЛОГИ БЭРОВОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ РАЗДЕЛЬНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ*

*АННОТАЦИЯ. В заметке рассматриваются некоторые выпуклые аналоги бэровости: бочечность, w-бочечность и другие, которые используются в функциональном анализе.*

*In this note we consider some of convex analogues for Baire property: barreledness, w-barreledness and other, which are used in functional analysis.*

Через $C_p(X)$, будем обозначать, как обычно, пространство непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве $X$ в топологии точечной сходимости. Напомним, что отображение $f : X \times Y \to Z$ называется раздельно непрерывным, если для всяких $x \in X$, $y \in Y$ сужения $f\big| X \times \{y\}$ и $f\big| \{x\} \times Y$ непрерывны.

Через $C^r(X_1 \times \ldots \times X_n)$ будем обозначать пространства раздельно-непрерывных вещественных функций, определяемых как произведения топологических пространств $X_i$, $1 \leq i \leq n$, наделенные топологией поточечной сходимости, то есть топологией, индуцированной степенью прямой $R^{X_1 \times \ldots \times X_n}$, рассматриваемой в тихоновской топологии.

Таким образом,

$$C_p(X_1 \times \ldots \times X_n) \subset C^r(X_1 \times \ldots \times X_n) \subset R^{X_1 \times \ldots \times X_n},$$

и, как правило, включения строгие.

Топология поточечной сходимости — одна из наименьших топологий, которыми наделяются пространства функций, и поэтому содержит и все компоненты больших топологий.

Пространство является бэровским, если пересечение последовательности открытых всюду плотных в нем множеств всюду плотно. В функциональном анализе рассматриваются выпуклые аналоги бэровости. Напомним некоторые из них.

Пусть $E$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство, $A \subset E$. Напомним, что $A$ называется уравновешенным, если $\alpha A \subset A$ для всякого $\alpha$, $|\alpha| \leq 1$ и поглощающим, если для всякого $x \in E$ найдется $\lambda > 0$ такое, что $x \in \alpha A$ для всякого $\alpha$, $|\alpha| \geq \lambda$. Известны следующие «выпуклые аналоги» свойства Бэра. Пространство $E$ называется бочечным, если всякое замкнутое выпуклое уравновешенное и поглощающее множество является окрестностью нуля [5]; $W$ — бочечным, если всякое замкнутое поглощающее множество является окрестностью нуля [4]; $E$ — выпуклое бэровское, если оно не представимо в виде счетной суммы замкнутых выпуклых нигде не плотных подмножеств. Наконец, $E$ — монотонно выпукло бэровское, если оно не представимо в виде возрастающей последовательности замкнутых нигде не плотных множеств [7]. Напомним, что множество $A \subset X$ называется ограниченным, если для всякой непрерывной функции $f \mapsto R$ ограничено множество $f(A)$ *в* $R$.

Далее нам потребуется:

*Предложение 1.* [8], [9]. Пусть $X$ — тихоновское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $C_p(X)$ — бочечное пространство,

б) всякое ограниченное подмножество $X$ конечно.

**Теорема.** Пусть $X_1, ..., X_n$ — тихоновские пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $C^r(X_1 \times \ldots \times X_n)$ — бочечное пространство,

б) $C_p(X_1 \times \ldots \times X_n)$ — бочечное пространство,

в) $C_p(X_i), 1 \le i \le n$ — бочечные пространства.

*Доказательство.* Импликация б) $\Rightarrow$ а) следует из того, что $C_p(X_1 \times \ldots \times X_n)$ — всюду плотное линейное подпространство пространства $C^r(X_1 \times \ldots \times X_n)$ и пересечение замкнутого выпуклого уравновешенного и поглощающего множества с линейным подпространством является таковым же в подпространстве. Для дальнейшего нам потребуется:

I). Всякое ограниченное подмножество в $X$ конечно тогда и только тогда, когда для всякого бесконечного множества $E \subset X$ найдется дискретное семейство открытых множеств $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ такое, что $W_i \cap E \ne \varnothing$ для всех $i \in N$.

Действительно, если $E$ неограничено, то найдется $f \in C(X)$ такая, что $f(E)$ неограничено в $R$. Тогда выберем дискретное семейство $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых в $R$ множеств, таких, что $f(E) \cap V_i \ne \varnothing$ для всех $i \in N$. Тогда $\{W_i = f^{-1}(V_i)\}_{i=1}^{\infty}$ дискретное семейство открытых в $X$ множеств, и $W_i \cap E \ne \varnothing$, $i \in N$. Пусть, наоборот, $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ — дискретное в $X$ семейство открытых множеств таких, что $W_i \cap E \ne \varnothing$, $i \in N$. Выберем $x_i \in W_i \cap E, i \in N$ и зафиксируем $f_i : X \mapsto R$ непрерывную функцию, такую, что $f_i(x_i) = i$, $f_i(X \setminus W_i) = 0$, $i \in N$. В силу дискретности семейства $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, функция $f : X \mapsto R$, такая, что $f(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$, $i \in N$, и $f(x) = 0$, $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ — непрерывна. Этим I) доказано.

Из I) следует, что если всякое ограниченное множество в $X$ конечно, то это справедливо и для всякого $Y \subset X$. Так как $X_i$ вкладывается в $X_1 \times \ldots \times X_n$, то этим доказано б) $\Rightarrow$ в).

Докажем, что в) $\Rightarrow$ б). Пусть $E \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ бесконечно. Тогда найдется $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\pi_{i_0}(E)$ бесконечно в $X_{i_0}$. Следовательно, в силу I), найдется $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ — дискретное семейство открытых в $X_{i_0}$ множеств, и $W_n \cap \pi_{i_0}(E) \ne \varnothing$ для всех $n \in N$. Тогда $\{f^{-1}(W_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — дискретно, и $f^{-1}(W_n) \cap E \ne \varnothing$ для всех $n \in N$. Этим в) $\Rightarrow$ б) доказано.

Остается доказать, что а) $\Rightarrow$ в). Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ произвольно, и $E$ — бесконечное подмножество $X_i$. Зафиксируем $x_j \in X_j$, $j \ne i$. Пространство $C^r(X_1 \times \ldots \times X_n) = C_p(X_1 \times \ldots \times X_n, \tau)$. Сужение топологии $\tau$ на слой $\{x_1\} \times \ldots \times X_j \times \ldots \times \{x_n\}$ совпадает с топологией $X_i$. Рассмотрим $E' = \{x_1\} \times \ldots \times E \times \ldots \times \{x_n\}$. В силу I) найдется дискретное семейство открытых в $(X_1 \times \ldots \times X_n, \tau)$ множеств $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $W_m \cap E' \ne \varnothing, m \in N$. Тогда

$\{V_m \cap \{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}\}_{m=1}^{\infty}$ — дискретное семейство открытых множеств в $\{x_1\}\times\ldots\times X_i\times\ldots\times\{x_n\}$, и $W_m \cap E' \neq \varnothing$, $m\in N$. Теорема доказана.

Для полноты изложения отметим.

*Предложение 2.* Пусть $X_i$ — тихоновские пространства, $1\le i\le n$. Тогда

а) $C^r(X_1\times\ldots\times X_n)$ — бочечно тогда и только тогда, когда $C^r(X_1\times\ldots\times X_n)$ монотонно выпукло бэровское,

б) $C^r(X_1\times\ldots\times X_n)$ — бэровское тогда и только тогда, когда W — бочечно.

*Доказательство.* Это следует из [3], где равенства доказаны для $C_p(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Мир, 1986, 223 с.
2. Энгелькинг Р. В. Общая топология (перевод с английского). М.: Мир, 1986, 752 с.
3. Пыткеев Е. Г. Свойства Бэра пространств непрерывных функций. Мат. заметки, 1985. Т. 38. № 5. С. 726-740.
4. Arens, R. Lugundji, J. Topologies for function spaces - Pacifics J. Math., 1951. V. 1. P. 5-31.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М; 1971, 352 с.
6. Хохлов А. Г. К теории пространств раздельно-непрерывных функций. Вестник ТГУ. 1998. № 2. С. 18-22.
7. Khaleelulla S. M. Counterexamples in Topological vector spaces. Lect.Notes in Mat. Springer, 1982. V. 936.
8. Nachbin L. Topological vector spaces of continuous functions. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1954. V. 40. P. 471-474.
9. Schiroto T. A locally convex vector spaces of continuous functions. Pros. Japan. Acad., 1954. V. 30. № 4. P. 294-298.

***Владислав Олегович БЫТЕВ —***
***профессор кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук,***
***доктор физико-математических наук***

**УДК 531**

## *О ПАРАДОКСЕ Д` АЛАМБЕРА*

*АННОТАЦИЯ. Устранение парадокса Д‘ Аламбера.*

*The D‘ Alambers paradox is eliminated.*

В работах [1-4 ] была решена задача групповой классификации моделей простого, неполярного и нетеплопроводного чисто механического континуума. В качестве следствия были получены линейные структуры тензора вязких напряжений, которые позволяют ввести правильное расширение таких известных моделей, как жидкость Эйлера-Стокса с тензором напряжений

$$T = -pI, \qquad (1)$$

здесь $p$ — гидростатическое давление, I — единичный тензор; и жидкость Новье-Стокса с тензором напряжений

$$T = -pI + 2\mu D \qquad (2)$$

здесь $\mu$ — кинематическая вязкость,