В заключение можно отметить следующее. Выбор в СБЗ прецедента, т.е. ситуации-примера, в простом случае предполагает перебор всех примеров БПС. При больших объемах БПС необходимы меры по сокращению пространства перебора. Трудность также заключается в том, что для выполнения описанных процедур выбора необходима идентификация всех элементов строки текущей ситуации (которые в данной ситуации могут не иметь смысла). Среди других задач, которые должны быть решены при реализации данного подхода, можно назвать организацию поиска ситуаций в СБЗ по свободным запросам; группирование близких ситуаций-примеров и выявление обобщенных описаний; устранение избыточности путем удаления близких ситуаций и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухих И. Н. Ситуационные модели: применение в системах корпоративных знаний // Модернизация образования в условиях глобализации: м-лы межд. науч. конф. 14-15.09.2005, Ч. 2. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2005. С. 22-24.

2. Глухих И. Н., Сазанов В. Е., Левушкин Д. В. Моделирование отбора ситуаций в базе примеров ситуационной системы поддержки принятия решений на основе анализа сходства строковых представлений // Научно-технический калейдоскоп». Сер. «Приборостроение, радиотехника и информационные технологии. 2001. № 2. С. 31-36.

Анна Юрьевна ДЕРЕВНИНА —
проректор по учебной работе ТюмГУ,
кандидат физико-математических наук, доцент

УДК 001.5

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЦЕНАРНОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ СИСТЕМЫ

АННОТАЦИЯ. Описан алгоритм для построения графа на плоскости, позволяющий наилучшим образом и с минимальным искажением отобразить динамику системы в процессе эволюции.

The algorithm of building the special data structure is described. The data structure means the graph in 2-dimensional space, that allows visualize the evolution of dynamic system in its true value.

Считается, что социально-экономические системы являются открытыми и нелинейными, что дает основание к применению синергетического подхода к изучению систем. Необходимым условием развития систем является периодическое возникновение неустойчивости. Все сложные системы флуктуируют, что означает, что параметры систем подвержены случайным отклонениям от средних значений. Если в области устойчивости флуктуации уменьшаются с течением времени до нуля, то в области неустойчивости, благодаря положительной обратной связи, они могут стать настолько сильными, что это приведет к скачкообразному переходу в новое состояние. Неустойчивость приводит к тому, что уровень структурности системы изменяется, падает энергия связи, увеличивается энтропия, что является характерным признаком того, что система приближается к точке бифуркации и тому критическому моменту в своем развитии, после которого неизбежно перейдет в качественно иное состояние и изменит направление эволюции. В биологии примером подобного процесса являются дивергентно-конвергентные циклы, результатом которых служит видовое разнообразие биологических видов.

Динамику сложных систем удобно представлять в пространстве переменных, описывающих эту систему (фазовом пространстве). Вообще говоря, размерность этого пространства велика, поэтому считается, что при изучении системной динамики необходимо выписывать десятки, а то и сотни уравнений. Однако явления функционально сложные и происходящие на макроуровне могут быть описаны простыми системами уравнений. Синергетика показывает, какими методами можно редуцировать эту сложность поведения системы, свести ее к простому. А их несколько:

• можно определить параметры порядка поведения сложной системы [6];

• можно исследовать развитые, устоявшиеся стадии поведения сложных диссипативных систем, структуры-аттракторы эволюции, которые описываются относительно просто [3];

• можно строить диаграммы бифуркаций [5] и т. д.

Способ свертывания сложного, который используется в научной школе А. А. Самарского и С. П. Курдюмова в Институте прикладной математики и Институте математического моделирования РАН, — это исследование развитых, асимптотических стадий развития сложных неравновесных систем и определение спектров структур-аттракторов эволюции этих систем.

Аттрактор (от лат. attrahere — притягивать) — это установившийся режим движения, иными словами, множество точек (в простейшем случае — одна точка) в фазовом пространстве координат системы, к которым стремятся ее траектории. За аттракторами стоят визуальные образы неких «воронок», которые втягивают в себя множество траекторий динамики системы, предопределяют ход эволюции системы на участках, отдаленных от таких «воронок». В синергетике под аттракторами часто понимают реальные структуры в пространстве и времени, на которые выходят процессы самоорганизации в открытых нелинейных средах. Структуры-аттракторы выглядят как цели эволюции. Структуры-аттракторы относительно просты по сравнению со сложным и хаотическим ходом промежуточных процессов в этих системах. Асимптотика упрощается, поэтому появляется возможность прогнозирования хода развития исходя из общих тенденций развертывания процессов в изучаемых системах.

Хотя путей развития системы может быть очень много, их количество не бесконечно. Знание ограничений, того, что в принципе нельзя осуществить в данной среде, знание своего рода эволюционных принципов запрета — само по себе очень ценно, так как позволяет не тратить материальные средства, время и управленческие воздействия впустую. Кроме того, раз существует множество путей развития, т.е. путь развития не предопределен, не единственен, значит, есть возможность выбора лучшего, оптимального сценария развертывания событий.

Методология составления сценариев предполагает предварительное определение пространства параметров, определяющих систему [1, 4, 8].

Рассмотрим конечное множество $W = \{w_0, w_1, ..., w_m\}$ возможных состояний системы в процессе развития. Следует отметить, что в данной работе понятие «развитие» сужено до понятия «цикл развития», ограниченного по времени. Началом цикла будем считать устойчивое состояние w_0, w_i, $i = 1, m$ — структуры-аттракторы, в направлении которых предположительно эволюционирует система.

Определим отображение $P : W \to W$, задающее воздействие, в результате которого система из текущего состояния w_i переходит в состояние $P(w_i)$. Отображение P можно задать в виде матрицы переходов $P = (p_{ij})$, где $p_{ij} = 1$, если $w_j = P(w_i)$ и $p_{ij} = 0$ в противном случае. Множество W и матрица P однозначно определяют ориентированный граф G без кратных дуг и петель с вершинами W и матрицей смежности P. Наряду с графом G рассмотрим матрицу $D = (d_{ij})$, элемент которой назовем мерой различия вершин w_i и w_j. Матрица D является симметричной матрицей с нулевыми диагональными элементами и имеет частичное упорядочение на множестве внедиагональных элементов:

$$d_{k1l1} \le d_{k2l2} \le \dots \le d_{k\nu l\nu}, \ \nu = m(m+1)/2$$

Вопрос о способах вычисления расстояний d_{ij} пока оставим открытым. Достаточно сказать, что его можно вычислять как расстояние между точками в многомерном пространстве исходных параметров, например, как расстояние Махаланобиса. Другой способ оценки расстояния — с помощью экспертных оценок мер различия по вербально-числовой шкале Харрингтона.

Задача заключается в том, чтобы, располагая мерами различия вершин графа, снизить размерность фазового пространства, минимально исказив информацию. Алгоритм основан на построении планиметрической модели взвешенного графа G.

Определение. Планиметрической моделью взвешенного графа G = (W, D) будем называть граф G′= (Z, D′) такой, что:

1. Граф G′ изоморфен графу G.
2. Множество вершин Z графа G′ лежат в плоскости.
3. Мерой различия d'_{ij} между вершинами z_i и z_j является евклидово расстояние между точками z_i и z_j .
4. Меры различия d'_{ij}, минимизируют функционал в классе монотонных функций f:

$$S(Z,f) = \frac{\sqrt{\sum_{i,j}(d'_{ij} - f(d_{ij}))^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} d'^2_{ij}}} \tag{1}$$

Под изоморфизмом графов понимается взаимно-однозначное соответствие между вершинами и дугами обоих графов, сохраняющее отношение инцидентности.

Заметим, что задача построения планиметрической модели графа сводится к нахождению множества точек Z на плоскости, удовлетворяющих условию

$$S(Z,f) \underset{Z,f}{\longrightarrow} \min$$

Решение этой задачи определено с точностью до ортогональных преобразований. Множество Z будем рассматривать в виде матрицы размером (m+1) x 2, в i-ой строке которой записаны координаты точек z_i. Пусть множество точек Z1 имеет те же попарные евклидовы расстояния между точками, что и множество Z:

$$Z = \begin{bmatrix} z_0^1 & z_0^2 \\ . & . \\ . & . \\ z_m^1 & z_m^2 \end{bmatrix}, \ Z1 = \begin{bmatrix} z1_0^1 & z1_0^2 \\ . & . \\ . & . \\ z1_m^1 & z1_m^2 \end{bmatrix}, \ d'_{ij} = d1'_{ij}$$

Тогда матрицы Z и Z1 связаны соотношением Z1=Z • A + C, где матрица C имеет постоянные значения в каждом из столбцов, а матрица A — ортогональна.

Для снятия имеющейся неопределенности потребуем, чтобы матрица Z удовлетворяла дополнительным условиям

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{m} z_i^k = 0, k = 1,2 \\ \sum_{i=0}^{m} (z_i^k)^2 = m, k = 1,2 \end{gathered} \tag{2}$$

,

что означает, что множество точек Z имеет нулевое среднее и единичную дисперсию по каждой координате. Таким образом, снимается неопределенность параллельного переноса и растяжения. Неопределенность поворота ликвидируется тем, что координатные оси плоскости выбираются в соответствии с главными компонентами матрицы Z, так, чтобы ортогональные проекции точек на первую главную компоненту, по которой направлена первая ось, имели максимально возможную дисперсию.

Рассмотрим алгоритм построения планиметрической модели графа. Очевидно, задача заключается в подборе точек $Z = \{z_0, z_1, ..., z_m\}$ на плоскости, минимизирующих функционал (1). В качестве мер различия d'_{ij} между вершинами z_i и z_j рассмотрим евклидово расстояние:

$$d'_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} (z_i^k - z_j^k)^2}$$

Будем считать, что $\hat{d}_{ij} = f(d_{ij}), f \in \Im, где \Im$ есть множество возрастающих функций. В дальнейшем числа $\hat{d}_{ij}$ будем называть отклонениями от различий d_{ij}. Заметим, что числа $\hat{d}_{ij}$ имеют упорядочение, соответствующее упорядочению различий d_{ij}:

$$d_{ij} < d_{kl} \Rightarrow \hat{d}_{ij} \le \hat{d}_{kl}$$

Перепишем функционал (1) в виде

$$S(Z, f) = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (d'_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} d'^2_{ij}}} \quad (3)$$

Функционал (3) в теории многомерного неметрического шкалирования называется «стресс-критерием» [11].

Алгоритм построения планиметрической модели графа состоит из следующих шагов:

1. На первом этапе выбирается начальная конфигурация точек $Z^{(0)}=\{ z_0^{(0)}, z_1^{(0)},..., z_m^{(0)}\}$ на плоскости.

2. Далее, на каждом С-ом шаге итерации координаты точек нормируются в соответствии с условием (2).

3. Неметрический этап минимизации функционала S(Z, f): вычисление отклонений $\hat{d}_{ij}$ при заданной последовательности $Z^{(C)}$ по методу монотонной регрессии.

4. Метрический этап минимизации функционала S(Z, f): вычисление $Z^{(C)}$ по методу наискорейшего спуска.

5. Итерационная процедура заканчивается, если изменение «стресс-критерия» (3) удовлетворяет заданной точности: $|S^{(C)} - S^{(C-1)}| < \varepsilon$, иначе переход к шагу 2.

6. В завершение полученная конфигурация Z поворачивается по главным осям, чтобы ликвидировать неоднозначность решения с точки зрения поворота.

Планиметрическая модель взвешенного графа позволяет визуализировать граф наилучшим образом (наглядно и с минимальными искажениями), отобразив информацию о мерах различия между вершинами графа на плоскости. При этом полученная плоскость может интерпретироваться как фазовая плоскость динамики системы, а пути на планиметрической модели графа — как траектории движения системы.

Опишем более подробно три основных блока алгоритма.

1. *Алгоритм выбора начальной конфигурации точек* $Z^{(0)}=\{z_0^{(0)}, z_1^{(0)}, ..., z_m^{(0)}\}$ на плоскости основан на теореме Торгерсона [12].

Пусть задана матрица D, элементами которой являются квадраты евклидовых расстояний между точками на плоскости, координаты которых неизвестны.

Обозначим через D* матрицу двойного центрирования для D, то есть матрицу, у которой среднее значение по строке и по столбцу равны нулю:

$$d^*_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{m}\sum_j d_{ij} - \frac{1}{m}\sum_i d_{ij} + \frac{1}{m^2}\sum_i\sum_j d_{ij} \tag{4}$$

Теорема Торгерсона утверждает, что матрица $B = -1/2 \cdot D^*$ представима в виде $B = Z \cdot Z'$, где матрица Z составлена из координат искомых точек на плоскости.

Нетрудно показать, что матрица B обладает следующими свойствами: она симметрична, неотрицательно определена, ранг матрицы равен 2. Поэтому матрицу можно представить в виде:

$$B = Y\Lambda Y',$$

где Y — ортогональная матрица, а Λ — диагональная матрица с элементами, равными неотрицательным собственным числам матрицы B $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Обозначим через $\Lambda^{\frac{1}{2}} = diag(\sqrt{\lambda_0}, \sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_m})$ и положим

$$Z = Y\Lambda^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Тогда $B = Z \cdot Z'$. Таким образом, ограничиваясь двумя первыми ненулевыми собственными числами λ_0, λ_1, в качестве решения можно взять (5).

Очевидно, определенное таким образом решение Z единственно с точностью до ортогональных преобразований.

Замечание: В случае если элементы матрицы D не являются в точности квадратами евклидова расстояния, теорема Торгерсона неверна, поэтому матрица B может не быть неотрицательно определенной и тогда $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ не определена. В этом случае следует перейти к матрице D′:

$$d'_{ij} = d_{ij} + \alpha$$

где $\alpha \geq 0$ есть аддитивная константа. Значение константы α выбирается из соображений выполнения неравенства треугольника для любых трех точек z_i, z^j, z_k, то есть 1) $d'_{ij} \geq 0$; 2) $d'_{ij} \leq d'_{ik} + d'_{kj}$.

Минимальное значение константы α, удовлетворяющее этим условиям, находится при оптимизации невязки:

$$\alpha^* = (-1)\max_{i,j,k}(d'_{ij} - d'_{ik} - d'_{kj})$$

3. *Неметрический этап минимизации функционала* S(Z, f)

Минимизация функционала S(Z, f) методом монотонной регрессии заключается в том, чтобы найти такие отклонения $\hat{d}_{ij}$, которые (насколько это возможно) близки к расстояниям $\hat{d}_{ij}$ между точками при условии монотонной связи с исходными различиями d_{ij}:

$$d_{ij} < d_{kl} \Rightarrow \hat{d}_{ij} \leq \hat{d}_{kl}$$

Обозначим через $\mathfrak{I}$ класс монотонных функций, для которых выполняется:

$$\forall x, y \in \aleph : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Очевидно, что множество является выпуклым:

$$\forall f_1, f_2 \in \Im, \alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2 \in \Im$$

Определим функцию g как евклидово расстояние между точками $(z_i, z_j) = x$:

$$g(x) = d'_{ij}$$

Функция g* является монотонной регрессией g, если справедливо:

$$g^* = \arg\min_f \sum_x (g(x) - f(x))^2 \quad (7)$$

Решение задачи (7) сводится к решению задачи квадратичного программирования при ограничениях в виде линейных неравенств

$$x = (z_i, z_j), y = (z_k, z_l), x < y \Leftrightarrow d_{ij} < d_{kl}$$

Необходимое и достаточное условие того, что g* является решением задачи (7) приведено в работе [7].

Обозначим через $\hat{d}_{ij} = f(x)$. Тогда задача (7) сводится к отысканию чисел $\hat{d}_{ij}*$:

$$\hat{d}_{ij}* = \arg\min_{\hat{d}} \sum_{i,j} (d'_{ij} - \hat{d}_{ij})^2 \quad (8)$$

Задача (8) эквивалентна минимизации функционала (2) при фиксированном Z, так как сводится к минимизации числителя. Специальная быстрая конечная процедура для решения задачи (8) была предложена в работе [9, 10]. Опишем ее кратко.

На первом шаге формируется блок из одного элемента $B_k = g_k = g(x_k)$, k=1.

Пусть на некотором шаге B_-, B, B_+ обозначают предыдущий, активный и последующий блоки соответственно. Пусть $\overline{B}$ означает процедуру взятия среднего, по всем элементам, входящим в блок B. Тогда, если тройка B_-, B, B_+ упорядочена в смысле $\overline{B}_- < \overline{B} < \overline{B}_+$, то переходят к последующему блоку: $B = B_+$. Иначе происходит объединение блоков: если $\overline{B} < \overline{B}_-$, то объединяют блоки B_- и B: $B = B \cup B_-$; если $\overline{B} > \overline{B}_+$, то объединяют блоки B_+ и B: $B = B \cup B_+$.

Для вновь образованных блоков происходит проверка упорядоченности $\overline{B}_- < \overline{B} < \overline{B}_+$ и т. д. В результате имеем M блоков $B_1, B_2, ..., B_M : \overline{B}_1 < \overline{B}_2 < ... < \overline{B}_M$.

Определим $g^*(x_k)$ равным среднему значению того блока, который содержит элемент x_k

$$g_k* = g*(x_k) = \overline{B}_l : x_k \in B_l$$

Тогда $g_1* < g_2* < ... g_n*$ и положим $\hat{d}_{ij}* = g_k*$.

4. *Метрический этап минимизации функционала* S(Z, f)

Определим функционал

$$\tilde{S}(Z) = \min_{f \in \Im} S(Z, f) = S(Z, g*(Z)) \quad (9)$$

Задачей этого этапа является минимизация функционала (9). По методу наискорейшего спуска на с-ом шаге итерации определяется конфигурация:

$$Z^{(C+1)} = Z^{(C)} - \lambda^{(C)} \nabla \tilde{S}(Z^{(C)})$$

Вычислим градиент функционала (9) по Z. Имеем

$$\nabla \tilde{S}(Z) = \frac{\partial S}{\partial Z} + \frac{\partial S}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial Z}\bigg|_{(Z, g^*)}$$

Второе слагаемое обращается в нуль в силу того, что в точке минимума g* частная производная ∂S/∂f равна нулю, и выражение для градиента упрощается:

$$\nabla\tilde{S}(Z)=\frac{\partial S(Z,g^*)}{\partial Z}$$

Обозначим

$$T=\sqrt{\sum_{i,j}d'_{ij}-g^*(d_{ij})^2},L=\sqrt{\sum_{i,j}d'^2_{ij}}$$

Выпишем выражение для $\partial S/\partial z_{kl}$

$$\frac{\partial S}{\partial z_{kl}}=\frac{\partial}{\partial z_{kl}}(\frac{T}{L})=\frac{L\frac{\partial T}{\partial z_{kl}}-T\frac{\partial L}{\partial z_{kl}}}{L^2}=\frac{\frac{\partial T^2}{\partial z_{kl}}-\frac{T^2}{L^2}\frac{\partial L^2}{\partial z_{kl}}}{2TL} \tag{10}$$

Выразим частные производные $\frac{\partial L^2}{\partial z_{kl}},\frac{\partial T^2}{\partial z_{kl}}$ через частные производные $\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}}$.

$$\frac{\partial L^2}{\partial z_{kl}}=\frac{\partial}{\partial z_{kl}}(\sum_{i,j}d'^2_{ij})=\sum_{i,j}\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial z_{kl}}=\frac{\partial}{\partial z_{kl}}(\sum_{i,j}(d'_{ij}-g^*(d_{ij}))^2)=\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial z_{kl}}(d'_{ij}-g^*(d_{ij}))\cdot 2\cdot(d'_{ij}-g^*(d_{ij}))=$$

$$=\sum_{i,j}\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}}-\frac{g^*(d_{ij})}{d'_{ij}}\cdot\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}} \tag{12}$$

в силу того, что $\frac{\partial(g^*d_{ij})}{\partial z_{kl}}=0$.

Подставив выражения (11)-(12) в (10) и учитывая, что $S^2=\frac{T^2}{L^2}$, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial z_{kl}}=\frac{1}{2TL}\left(\sum_{i,j}(\frac{d'_{ij}-g^*(d_{ij})}{d'_{ij}}-S^2)\cdot\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}}\right)$$

Вычислим $\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}}$:

$$\frac{\partial(d'^2_{ij})}{\partial z_{kl}}=\frac{\partial}{\partial z_{kl}}(\sum_{r=1}^{2}(z_{ir}-z_{jr})^2)=2\sum_{r=1}^{2}(z_{ir}-z_{jr})\cdot\frac{\partial(z_{ir}-z_{jr})}{\partial z_{kl}}=2(z_{il}-z_{jl})\cdot(\delta_{ki}-\delta_{kj}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Окончательное выражение для градиента:

$$\frac{\partial S}{\partial z_{kl}}=\frac{1}{TL}\left(\sum_{i,j}(\frac{d'_{ij}-g^*(d_{ij})}{d'_{ij}}-S^2)\cdot(z_{il}-z_{jl})\cdot(\delta_{ki}-\delta_{kj})\right) \tag{13}$$

Формула (13) используется в программной реализации при вычислении градиента $\nabla\widetilde{S}(Z)$ в виде матрицы G с элементами

$$G_{kl} = \frac{\partial S}{\partial z_{kl}}, k = 0,...,m, l = 1,2 \tag{14}$$

Способ выбора шага $\mu^{(C)} = \left\|\lambda^{(C)}\nabla\widetilde{S}(Z^{(C)})\right\|$ подробно обсуждается в [2]. На каждой итерации выбор шага зависит от угла между градиентом на текущем и предыдущем шагах:

$$\mu^{(C)} = A^{(C)}(\Xi),$$

где $A^{(C)}$ — есть некоторая непрерывная функция, а Ξ — угол между градиентами. В программе реализуется функция вида:

$$A^{(C)}(\Xi) = \mu^{(C-1)}\rho^{\cos\overline{\Xi}}, \tag{15}$$

где $\rho = 4$, а через $\cos\overline{\Xi}$ обозначено скользящее среднее для $\cos\Xi$:

$$\cos\overline{\Xi}^{(C)} = \omega\cos\Xi^{(C)} + (1-\omega)\cos\overline{\Xi}^{(C-1)}, \omega = 2/3 \tag{16}$$

Кроме того, величина шага $\mu^{(C)}$ корректируется еще двумя множителями: множителем успеха $B^{(C)}$, учитывающем отношение «стресс-критериев» на текущем и предыдущем шагах и множителем смещения $D^{(C)}$, учитывающем вероятность близости точки локального минимума. Окончательно имеем:

$$\mu^{(C)} = A^{(C)}(\Xi)B^{(C)}D^{(C)} \tag{17}$$

Множитель $B^{(C)}$ уменьшает шаг $\mu^{(C)}$ в случае, если стресс на текущей итерации сильно уменьшился, точнее

$$B^{(C)} = \begin{cases} \sqrt{\min(1, S^{(C)}/S^{(C-1)})}, c > 1 \\ \sqrt{0{,}8}, c = 1 \end{cases} \tag{18}$$

Множитель $D^{(C)}$ используется для уменьшения шага $\mu^{(C)}$ в случае, если вероятность того, что локальный минимум близок, велика.

Определим скользящее среднее величины отношения стрессов на текущем и предыдущем шагах по формуле:

$$\overline{S}^{(C)} = \begin{cases} (S^{(C)}/S^{(C-1)})^{1-\varpi} \cdot (\overline{S}^{(C-1)})^{\varpi}, \varpi = 2/3, c \geq 1 \\ 0{,}8, c = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Эмпирически установлено, что вероятность того, что точка близка к точке локального минимума, возрастает при значениях $\overline{S}$, близких к 1.

Кроме того, вводится множитель, имеющий тенденцию к уменьшению при увеличении колебаний величины $\cos\Xi$ вокруг 0. Определим скользящее среднее для абсолютного значения $|\cos\Xi|$:

$$a\cos\overline{\Xi} = \varpi|\cos\Xi|^{(C)} + (1-\varpi)a\cos\overline{\Xi}^{(C-1)}, \varpi = 2/3 \tag{20}$$

Окончательно используется множитель

$$D^{(C)} = \frac{1{,}6}{(1+\overline{S}^{(C)})^5 \cdot (1 + a\cos\overline{\Xi}^{(C)} - |\cos\Xi|^{(C)}} \tag{21}$$

В заключение заметим, что задача минимизации функционала (3) является многоэкстремальной. Градиентный метод позволяет определить лишь локальный минимум. Поиск глобального минимума желателен, но, как правило, значительно увеличивает затраты машинного времени. Локальный минимум используется в качестве решения, если это решение интерпретируемо и хорошо согласуется с данными. Эмпирически установлено, что стартовая конфигурация точек Z, полученная по методу Торгерсона, является наиболее рациональной, так как наименее подвержена попаданиям в локальные минимумы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абт К. Ч., Фостер Р. Н., Ри Р. Г. Методика составления сценариев: Руководство по научно-техническому прогнозированию. М.: Прогресс, 1977.
2. Крускал Дж. Б. Многомерное шкалирование и другие методы поиска структуры // Статистические методы для ЭВМ / Пер. с англ. М.: Наука, 1986. С. 301-347.
3. Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. В кн. Наука, технология, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988. С. 5-43.
4. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решения. М.: Патент,. 1996. 375 с.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 107 с.
6. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ. М.: КомКнига. 2005. 248 с.
7. Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremnen, J. M. and Bunk, N. D. Statistical inference under order restrictions. N.Y.: J.Wiley, 1972.
8. Kahn, H. Del Escalade, Metaphors et Scenarios. Paris: Calman-Levy. 1966.
9. Kruskal, J. B. Monotone Regression: Continuity and Differetiability Properties // Psychometrika. 1971. V. 36. № 1. P. 57-63.
10. Kruskal, J. B. Nonmetric Multidimensional Scaling. A Numerical Method // Psychometrika. 1964. V. 29. № 2. P. 115-129.
11. Kruskal, J. B., Carrol, J. D. Geometric models and badness-of-fit functions // Multivariate Analysis, Acad. Press, 1969. V. 11. № 4.
12. Torgerson, W. S. Multidimensional Scaling. Theory and Method // Psychometrika, 1952. V. 17. № 4.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА — заведующая кафедрой математики и информатики, кандидат физико-математических наук, доцент

УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОМУ ОПЕРАТОРУ ЛАМЕ

АННОТАЦИЯ. Записывается вариационное равенство в форме Галеркина. Устанавливаются свойства билинейных форм и доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи о равновесии двухфазного тела.

Variational equality in form Galercin's enters. Properties of bilinear forms are established and the of existence and uniqueness of theorem a solution task of balance of a biphase body is proved.

Для описания напряженно-деформированного состояния двухфазного тела (водонасыщенного грунта) относительно перемещений твердой фазы u_i получена система дифференциальных уравнений второго порядка с положительными постоянными коэффициентами G, λ, b_i, c_i $(i=1, 2, 3)$ [1]:

$$D_{ij}u_j = K_i, D_{ij} = -\left(\left(G+\lambda+b_i\delta_{ij}\right)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k + c_i\delta_{ij}\partial_j\right),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \qquad (1)$$

в которой K_i — компоненты вектора $\boldsymbol{K}$ объемных сил.