данными. Эмпирически установлено, что стартовая конфигурация точек Z, полученная по методу Торгерсона, является наиболее рациональной, так как наименее подвержена попаданиям в локальные минимумы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абт К. Ч., Фостер Р. Н., Ри Р. Г. Методика составления сценариев: Руководство по научно-техническому прогнозированию. М.: Прогресс, 1977.
2. Крускал Дж. Б. Многомерное шкалирование и другие методы поиска структуры // Статистические методы для ЭВМ / Пер. с англ. М.: Наука, 1986. С. 301-347.
3. Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. В кн. Наука, технология, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988. С. 5-43.
4. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решения. М.: Патент,. 1996. 375 с.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 107 с.
6. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ. М.: КомКнига. 2005. 248 с.
7. Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremnen, J. M. and Bunk, N. D. Statistical inference under order restrictions. N.Y.: J.Wiley, 1972.
8. Kahn, H. Del Escalade, Metaphors et Scenarios. Paris: Calman-Levy. 1966.
9. Kruskal, J. B. Monotone Regression: Continuity and Differetiability Properties // Psychometrika. 1971. V. 36. № 1. P. 57-63.
10. Kruskal, J. B. Nonmetric Multidimensional Scaling. A Numerical Method // Psychometrika. 1964. V. 29. № 2. P. 115-129.
11. Kruskal, J. B., Carrol, J. D. Geometric models and badness-of-fit functions // Multivariate Analysis, Acad. Press, 1969. V. 11. № 4.
12. Torgerson, W. S. Multidimensional Scaling. Theory and Method // Psychometrika, 1952. V. 17. № 4.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА — заведующая кафедрой математики и информатики, кандидат физико-математических наук, доцент

УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОМУ ОПЕРАТОРУ ЛАМЕ

АННОТАЦИЯ. Записывается вариационное равенство в форме Галеркина. Устанавливаются свойства билинейных форм и доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи о равновесии двухфазного тела.

Variational equality in form Galercin's enters. Properties of bilinear forms are established and the of existence and uniqueness of theorem a solution task of balance of a biphase body is proved.

Для описания напряженно-деформированного состояния двухфазного тела (водонасыщенного грунта) относительно перемещений твердой фазы u_i получена система дифференциальных уравнений второго порядка с положительными постоянными коэффициентами G, λ, b_i, c_i $(i=1, 2, 3)$ [1]:

$$D_{ij}u_j = K_i, D_{ij} = -\left(\left(G+\lambda+b_i\delta_{ij}\right)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k + c_i\delta_{ij}\partial_j\right),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \qquad (1)$$

в которой K_i — компоненты вектора $\boldsymbol{K}$ объемных сил.

Дополним уравнения смешанными граничными условиями

$$u_i \Big|_{S_1} = 0, \quad t_{ij} u_j \Big|_{S_2} = q_i, \qquad (2)$$
$$t_{ij} = \lambda n_i \partial_j + \left(G + b_i \delta_{ij}\right) n_j \partial_i + G \delta_{ij} n_k \partial_k,$$

t — оператор внутренних напряжений в скелете грунта. Заданная нагрузка q_i приложена к поверхности тела с дренирующим покрытием, на котором нормальные поровые давления отсутствуют, ***n*** — внешняя нормаль к поверхности $S = S_1 + S_2$.

Дифференциальный вектор-оператор ***D*** задан на линеале *M* функций ***u***, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми частными производными в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих однородным граничным условиям. Множество *M* плотно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Для дальнейшего исследования разрешимости задачи на основе проекционной теоремы [2] необходимо показать положительную определенность оператора $\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ относительно нормы векторного пространства Соболева $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$. Сумма операторов $A_{ij} + B_{ij} = \left(G + \lambda + b_i \delta_{ij}\right)\partial_i \partial_j + G \delta_{ij} \partial_k \partial_k$ равносильна введению анизотропии в обобщенный закон Гука. Для отрицательного оператора Ламе в случае анизотропии и любой вектор-функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}$, удовлетворяющей однородным смешанным условиям, имеем неравенство Корна [3]

$$C_1^2 \int_\Omega c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \geq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} |u_i|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

с постоянной C_1^2, не зависящей от выбора ***u***, но зависящей от размеров области и механических постоянных.

На основании этого неравенства оператор $-(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ симметричен и положительно определен в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$:

$$\left(-\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\right) \geq C^2 \|\boldsymbol{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad C^2 = \frac{1}{C_1^2}.$$

Для оператора $C_{ij} = c_i \delta_{ij} \partial_j$ скалярное произведение после применения формулы интегрирования по частям имеет вид:

$$\left(-\boldsymbol{Cu}, \boldsymbol{v}\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} u_i dx - \int_S \sum_{i=1}^{3} c_i u_i v_i \cos(\boldsymbol{n}, x_i) dS.$$

Оператор (-С) несимметричен:

$$\left(-\boldsymbol{Cu}, \boldsymbol{v}\right) - \left(\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{Cv}\right) = 2\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} u_i dx - \int_S \sum_{i=1}^{3} c_i u_i v_i \cos(\boldsymbol{n}, x_i) dS.$$

При однородных кинематических граничных условиях поверхностный интеграл обращается в ноль, но объемный интеграл в общем случае отличен от нуля.

Положим $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, запишем скалярное произведение

$$\left(-\boldsymbol{Cu}, \boldsymbol{u}\right) = -\frac{1}{2} \int_S c_i u_i^2 \cos(\boldsymbol{n}, x_i) dS, \quad -1 \leq \cos(\boldsymbol{n}, x_i) \leq 0.$$

При статических и смешанных однородных граничных условиях величина **(-*Cu*, *u*)** положительна, если ввести ограничение на геометрию области. В частности, в задачах Фламана и Буссинеска эта область представляет собой либо полуцилиндр, либо полусферу конечного радиуса. Две оси находятся в дневной плоскости, к которой прикладывается внешняя нагрузка, а оставшаяся ось направлена внутрь тела, поэтому $cos(\boldsymbol{n}, x_3) = -1$.

Положительная определенность оператора $\boldsymbol{D}$ для случая однородных смешанных граничных условий относительно нормы в $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$ следует из неравенства:

$$(\boldsymbol{Du}, \boldsymbol{u}) \geq \gamma^2 \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)}.$$

Используя неравенства Фридрихса $\|\boldsymbol{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leq m_1 \|\boldsymbol{u}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}$, можно показать, что оператор $\boldsymbol{D}$ положительно определен в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Обобщенным (слабым) решением рассматриваемой смешанной задачи назовем функцию $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, удовлетворяющую вариационному равенству

$$(\boldsymbol{Du}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad \boldsymbol{K} \in \boldsymbol{L_2}(\Omega), \quad (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{v}) \in V^*, \quad V = \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}^{1,2}(\Omega).$$

Требование обращения в нуль $\boldsymbol{v}$ на части границы S_1 указывается как $\boldsymbol{v} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}^{1,2}(\Omega)$. Пространство V^* является сопряженным к V.

После интегрирования по частям уменьшаем требуемую гладкость допустимых функций $\boldsymbol{u}$ и получаем форму Галеркина

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{v}) + \int_{S_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{v})}(\boldsymbol{u}) dS, \tag{1}$$

где

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \left((G + \lambda)\theta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + G \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\Omega,$$

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\int_{\Omega} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i d\Omega.$$

Рассмотрим свойства форм $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Лемма 1. Если область Ω ограничена, то форма $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ есть билинейная непрерывная форма на $V \times V$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, коэффициенты формы ограничены

$$max(G, \lambda, b_i) \leq m_1, \ \partial_i u_i \in \boldsymbol{L}_2(\Omega), \ v_i \in \boldsymbol{L}_2(\Omega), \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = 1,2,3.$$

Оценим первое слагаемое формы, используя неравенство Коши-Буняковского

$$|a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq m_1 \left| \int_{\Omega} \partial_i u_i \partial_j v_j d\Omega \right| \leq m_1 \left(\int_{\Omega} |\partial_i u_i|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_i|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq m_1 \|\boldsymbol{u}\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V,$$

где $\|\boldsymbol{u}\|_V = \left(\int\limits_\Omega |\partial_i u_i|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$ — норма в векторном пространстве Соболева $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$, в котором все частные производные первого порядка принадлежат $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Применим ко второму слагаемому неравенство Коши-Буняковского, причем $\partial_i u_i v_i$ принадлежит $\boldsymbol{L}_1(\Omega)$ и

$$\left| \int\limits_\Omega c_i \partial_i u_i v_i d\Omega \right| \le c |\partial_i u_i|_{L_2(\Omega)} |v_i|_{L_2(\Omega)}, \quad c = max(c_1, c_2, c_3).$$

Согласно теореме вложения С. Л. Соболева: $|\boldsymbol{u}|_{L_2(\Omega)} \le \mu(\Omega) \|\boldsymbol{u}\|_V$ имеем, что форма $c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ определена и

$$|c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \le m \|\boldsymbol{u}\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V, \quad m = c\mu(\Omega).$$

Окончательно получаем неравенство

$$|d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \le (m_1 + m) \|\boldsymbol{u}\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V.$$

Форма $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ билинейна и непрерывна, ч.т.д.

Лемма 2. Для любой открытой области Ω и $S_1 \ne S$ имеем

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2} \int\limits_{S_2} c_i u_i^2 cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) dS, \quad \forall \boldsymbol{u} \in V; \tag{2}$$

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \int\limits_{S_2} c_i u_i v_i cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) dS, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V. \tag{3}$$

Доказательство. Свойство (3) вытекает из (2) если заменить в последнем $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Докажем формулу (2).

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -\int\limits_\Omega c_i \partial_i u_i u_i d\Omega = -\frac{1}{2} \int\limits_\Omega c_i \partial_i (u_i)^2 d\Omega = -\frac{1}{2} \int\limits_S c_i u_i^2 cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) dS, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема. Пусть Ω ограниченная область в K^3 и $\boldsymbol{K}$ — заданный элемент, $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Тогда задача (1) имеет единственное решение $\boldsymbol{u} \in V$.

Доказательство. Положим в (1) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ и на основании положительной определенности оператора $\boldsymbol{D}$ относительно нормы пространства $\boldsymbol{W}^{1,2}$ имеем:

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \ge \gamma^2 \|\boldsymbol{u}\|_V^2,$$

то есть форма Галеркина коэрцитивна. Приведем проекционную теорему [2; 28]: Пусть W — сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\|\cdot\|_W$), и пусть $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ — непрерывная билинейная форма на $W x W$, которая коэрцитивна, то есть существует $\alpha > 0$, такое что $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \ge \alpha \|\boldsymbol{u}\|_W^2$, $\forall \boldsymbol{u} \in W$. Тогда для каждого l из W^* — пространства, сопряженного к W, — существует один и только один элемент $\boldsymbol{u} \in W$, такой, что

$$a(u,u)+c(u,u)\geq \gamma^2\|u\|_V^2.$$

Применяя проекционную теорему к равенству (1) берем в качестве W пространство V с нормой в пространстве Соболева, полагаем $a(u,v)=d(u,v)$ и в качестве $<l,v>$ берем форму (K,v), которая линейна и непрерывна на V. Пространство V сепарабельно как замкнутое подпространство сепарабельного пространства $W^{1,2}(\Omega)$, ч.т.д.

Таким образом, проекционные методы типа Бубнова-Галеркина, например, метод конечных элементов, применимы к отысканию решения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцева Т. В., Трефилина Е. Р. Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 11. С. 47-60.
2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и механике / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 590 с.

Анвар Гумерович КУТУШЕВ — профессор кафедры механики многофазных систем, доктор физико-математических наук

УДК 532.529

О РАСЧЕТЕ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИЙ СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР ФАЗ В НАСЫПНЫХ ПОРОШКООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

АННОТАЦИЯ. На основе дифференциальных уравнений движения составляющих пористой порошкообразной среды получены зависимости характерных времен изменения скоростей и температур газовой и дисперсной фаз. Показано, что эти характерные времена силового и теплового взаимодействия фаз в значительной мере зависят от числа Рейнольдса относительного движения газа и твердых частиц.

On the base of differential equations of the motion of a porous powdered medium the dependences of characteristic relaxation times of velocities and temperatures of gaseous and disperse phases were obtained. It is shown that these characteristic times of force and thermal phase interaction considerably depend on Reynolds number of a relative motion of a gas and solid particles.

Введение

При аналитическом, численном и экспериментальном исследовании волновых процессов в пористых порошкообразных средах весьма важное информативное значение имеют априорные оценки характерных времен динамического (τ_v) и теплового (τ_T) взаимодействия фаз. Например, с точки зрения теоретического описания процессов сравнение этих времен с характерным масштабом времени задачи (τ) позволяет обосновать выбор той или иной упрощенной модели двухфазной среды, как модели «эффективного» газа (τ_v/τ, $\tau_T/\tau << 1$), модели