Бронислав Петрович РУДАКОВ —
доцент кафедры математики Тюменского государственного архитектурно-строительного университета, кандидат физико-математических наук

УДК 514.763.7, 517.518.43, 519.674, 519.675

О ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ СПРЯМЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТКАНЕЙ

АННОТАЦИЯ. Указаны необходимые и достаточные условия (типа F.Gronwall) представления уравнения с четырьмя переменными составными шкальными номограммами со всеми криволинейными шкалами. Найдены необходимые условия представимости номограммами первого жанра с криволинейной ответной шкалой.

The necessary and sufficient conditions (such as T.Gronwall) representation of the equation with four variable by compound slide-rule nomograms with all curvilinear scales are specified. The necessary conditions of representation by nomograms of the first genre with curvilinear answer-back scale are found

Пусть совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j(x,y,z)=t_j=Const.,\ (j=1-4) \tag{1}$$

определяет ткань трехмерного пространства [1]. Известно, что исключение x, y, z из (1) приводит к уравнению ткани; возьмем его в виде

$$t_4=f(t_1,t_2,t_3). \tag{2}$$

Интерес представляет определение условий, при выполнений которых образованная поверхностями ткань (1) была бы топологически эквивалентна ткани, образованной семействами плоскостей [1].

Как известно [1], в этих случаях коррелятивное преобразование пространства преобразует ткань из плоскостей в номограмму из выравненных точек, определяемую уравнением

$$|\, f_{i1}(t_i);f_{i2}(t_i);f_{i3}(t_i);1\,|=0\ (i=1-4). \tag{3}$$

В работе рассматривается случай, когда коррелятивный образ спрямленной пространственной ткани дает номограмму из четырех плоских шкал, лежащих попарно в двух плоскостях. Для определенности будем считать, что шкалы t_1, t_2 принадлежат координатной плоскости $y=0$, а шкалы t_3, t_4 — плоскости $z=0$, чего, очевидно, можно достигнуть надлежащим проективным преобразованием пространства. При этих условиях, как показал R. Soreau [2], детерминантное уравнение (3) примет вид

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & 0, & f_{i2}(t_i), & 1 \\ f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 0, & 1 \end{vmatrix}=0\ \ (i=1,2;\ k=3,4), \tag{4}$$

и пространственная номограмма с этим уравнением допускает плоский эквивалент — составную (створную) номограмму из двух подномограмм с общей прямолинейной немой шкалой α:

$$\begin{vmatrix} f_{i1}, & f_{i2}, & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} f_{k1}, & f_{k2}, & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4'}$$

где f_{jr} — сокращенное обозначение функции $f_{jr}(t_j)$ ($j=1-4$; $r=1{,}2$).

Что касается теоретико-функциональных условий, то в дальнейшем будем считать, что однозначная функция $f(t_1,t_2,t_3)$ уравнения (2), определенного в некоторой прямоугольной области G:

$$\alpha_i < t_i < \beta_i\ ,\ (i=1-3),$$

обладает в этой области непрерывными частными производными достаточно высокого порядка и отличными от нуля производными первого порядка $\frac{\partial f}{\partial t_i} \equiv f_i'$, $(i=1-3)$. Так что рассматриваемые далее функции

$$M = -\frac{(t_4)_2'}{(t_4)_1'},\quad \overline{M} = -\frac{(t_4)_3'}{(t_4)_1'}, \tag{5}$$

где $(t_4)_j' \equiv \frac{\partial t_4}{\partial t_j}$ $(j=1-3)$, будут достаточно гладкими и отличными от нуля в области G.

Относительно функций $f_{jr}(t_j) \equiv f_{jr}$ уравнения (4) считаем, что они обладают производными необходимого порядка.

1. Об условиях спрямляемости некоторых пространственных тканей

Укажем необходимое и достаточное условие представимости уравнения (2) номограммой (4), где *все шкалы криволинейны.* Доказательство проведем в форме, предложенной П. В. Николаевым [4] для уравнения с тремя переменными.

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_j = \begin{vmatrix} U_j' & U_3' \\ V_j' & V_3' \end{vmatrix}\ (j=1,2);\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} U_3' & U_{12}'' \\ V_3' & V_{12}'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1' & U_{23}'' \\ V_1' & V_{23}'' \end{vmatrix};\\
&\Delta_4 = \begin{vmatrix} U_3' & U_{11}'' \\ V_3' & V_{11}'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1' & U_{13}'' \\ V_1' & V_{13}'' \end{vmatrix};\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} U_3' & U_{23}'' \\ V_3' & V_{23}'' \end{vmatrix};\\
&\Delta_6 = \begin{vmatrix} U_3' & U_{13}'' \\ V_3' & V_{13}'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1' & U_{33}'' \\ V_1' & V_{33}'' \end{vmatrix};\ \Delta_7 = \begin{vmatrix} U_1' & U_{13}'' \\ V_1' & V_{13}'' \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{где } U = \frac{(f_{12}-f_{22})f_{32}}{(f_{12}-f_{22})f_{31} + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}},\\
&V = \frac{(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21})f_{32}}{(f_{12}-f_{22})f_{31} + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Лемма (типа F. Gronwall [3]). Уравнение (2) тогда и только тогда представимо номограммой (4), когда при заданных функциях M, $\overline{M}$ (5) существует решение относительно функций f_{jr} $(j=1-3;\ r=1,2)$ следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\Delta_1 \cdot M + \Delta_2 = 0, \tag{8}$$

$$(\ln\overline{M})_1' + \frac{1}{M}(\ln\overline{M})_2' + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} - \frac{\Delta_4}{\Delta_1} = 0\ , \tag{9}$$

$$\frac{1}{M}\cdot\overline{M}_2' - \left(ln\overline{M}\right)_3' + \frac{\Delta_5}{\Delta_2} + \frac{\Delta_6}{\Delta_1} + \left(\frac{\Delta_7}{\Delta_1} + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)\overline{M} = 0. \qquad (10)$$

Из (4) имеем: $$f_{42} = U \cdot f_{41} + V, \qquad (11)$$
где U, V есть (7).

Дифференцируя (11) отдельно по t_j $(j = 1-3)$ и составляя функции M, $\overline{M}$ (5), получим:

$$\left(U_1' \cdot f_{41} + V_1'\right)M = -\left(U_2' \cdot f_{41} + V_2'\right), \qquad (12)$$

$$\left(U_1' \cdot f_{41} + V_1'\right)\overline{M} = -\left(U_3' \cdot f_{41} + V_3'\right). \qquad (13)$$

Из (12), (13), соответственно, имеем:

$$f_{41}\cdot\left(U_2' + U_1'M\right) + \left(V_2' + V_1'M\right) = 0, \qquad (14)$$

$$f_{41}\cdot\left(U_3' + U_1'\overline{M}\right) + \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right) = 0. \qquad (15)$$

Из совместности системы (14-15) относительно f_{41} находим:

$$\begin{vmatrix} U_2' + U_1'\cdot M & V_2' + V_1'\cdot M \\ U_3' + U_1'\cdot\overline{M} & V_3' + V_1'\cdot\overline{M} \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

откуда получаем:

$$\Delta_1 \cdot M - \begin{vmatrix} U_1' & U_2' \\ V_1' & V_2' \end{vmatrix}\cdot\overline{M} + \Delta_2 = 0. \qquad (17)$$

Из (11) имеем тождество:

$$f_{32} = U \cdot f_{31} + V. \qquad (18)$$

Дифференцируя (18) по t_j $(j = 1,2)$, найдем, что выполняется условие

$$\begin{vmatrix} U_1' & U_2' \\ V_1' & V_2' \end{vmatrix} = 0; \qquad (19)$$

следовательно, уравнение (17) принимает вид (8).

Рассмотрим уравнение (15). Прежде заметим, что

$$U_3' + U_1'\cdot\overline{M} \neq 0. \qquad (20)$$

Действительно, допустив обратное, из (15) имели бы, что $\Delta_1 \equiv 0$, что приводит к условию $(f_{12} - f_{22})f_{31} + f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0$. Это противоречит требованиям, наложенным на функцию $f(t_1, t_2, t_3)$.

Дифференцируя (15) отдельно по t_j $(j = 1-3)$, получим:

$$\left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)_j' \cdot f_{41} + \left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)\cdot\left(f_{41}\right)_4'\cdot\left(t_4\right)_j' + \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right)_j' = 0. \qquad (21)$$

Рассмотрим систему уравнений (15), (21). Матрица, соответствующая этой системе, будет (матрица содержит четыре строки):

$$\begin{pmatrix} U_3' + U_1'\overline{M} & 0 & V_3' + V_1'\overline{M} \\ \left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)_j' & \left(t_4\right)_j' & \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right)_j' \end{pmatrix} (j = 1-3). \qquad (22)$$

В силу совместности системы (15), (21) относительно $f_{41}, (f_{41})'_4$ ранг матрицы (22) должен быть равен двум. Поскольку (в силу требований, наложенных на функцию $f(t_1, t_2, t_3)$, а также в силу (20)) определитель

$$\begin{vmatrix} U'_3 + U'_1\overline{M} & 0 \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_2 & (t_4)'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{в области G,} \tag{23}$$

то для того, чтобы ранг матрицы (22) был равен двум, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю миноры, окаймляющие определитель (23), т. е. имеем:

$$\begin{vmatrix} U'_3 + U'_1\overline{M} & 0 & V'_3 + V'_1\overline{M} \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_2 & (t_4)'_2 & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_2 \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_j & (t_4)'_j & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_j \end{vmatrix} = 0 \ (j = 1,3) . \tag{24}$$

Рассмотрим этот определитель при $j = 1$. Прибавляя ко второй строке третью, умноженную на M, и используя (5), получим:

$$\begin{vmatrix} U'_3 + U'_1\overline{M} & 0 & V'_3 + V'_1\overline{M} \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_2 + (U'_3 + U'_1\overline{M})'_1 M & 0 & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_2 + (V'_3 + V'_1\overline{M})'_1 M \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_j & (t_4)'_j & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_j \end{vmatrix} = 0 \, (j = 1,3) . \tag{25}$$

Справедливы следующие тождества:

$$\begin{vmatrix} U'_1 & U''_{1j} \\ V'_1 & V''_{1j} \end{vmatrix} = 0 \ (j = 1,2) , \tag{26}$$

которые нетрудно получить из (18) дифференцированием по t_j $(j = 1,2)$, после чего, выразив f_{31}, еще раз продифференцировать по t_j. В силу этого из (25), используя (8), получим (9); при этом заметим, что, как и Δ_1, $\Delta_2 \neq 0$ в области G, ибо в противном случае функция $f(t_1, t_2, t_3)$ не удовлетворяла бы наложенным на нее требованиям.

Наконец, рассмотрим определитель (24) при $j = 3$. Отнимем от третьей строки вторую, умноженную на $\frac{\overline{M}}{M}$; в силу (5) получим:

$$\begin{vmatrix} U'_3 + U'_1\overline{M} & 0 & V'_3 + V'_1\overline{M} \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_2 & (t_4)'_2 & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_2 \\ (U'_3 + U'_1\overline{M})'_3 - (U'_3 + U'_1\overline{M})'_2 \cdot \frac{\overline{M}}{M} & 0 & (V'_3 + V'_1\overline{M})'_3 - (V'_3 + V'_1\overline{M})'_2 \cdot \frac{\overline{M}}{M} \end{vmatrix} = 0 \, (j = 1,3) \tag{27}$$

Заметим, что справедливо тождество:

$$\frac{V}{U} = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}{f_{12} - f_{22}} . \tag{28}$$

Дважды дифференцируя (28) по t_3 получим:

$$\begin{vmatrix} U_3' & U_{33}'' \\ V_3' & V_{33}'' \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Но тогда, раскрывая определитель (27) и используя (8), получим (10).

Достаточность. Дано, что существуют функции f_{jr} $(j = 1-3;\ r = 1,2)$, удовлетворяющие системе уравнений (8-10).

Очевидны тождества: $f_{32} = U \cdot f_{31} + V$, (18)

$$\frac{f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22}}{f_{12} - f_{22}} U + V = 0. \quad (28)$$

Но тогда от уравнений (9), (10) можно перейти, соответственно, к соотношениям (25), (27) и, следовательно, справедливы соотношения (24). Последние означают совместность относительно функций

$$F = F(t_1, t_2, t_3),\ \Phi = \Phi(t_1, t_2, t_3). \quad (30)$$

системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)\cdot F + \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right) = 0, \\ &\left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)_j' \cdot F + \left(U_3' + U_1'\overline{M}\right)\cdot \Phi \cdot (t_4)_j' + \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right)_j' = 0 \ \ (j = 1-3). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Дифференцируя первое уравнение отдельно по t_j $(j = 1-3)$ и сравнивая со вторым при соответствующем значении j, получим: $F_j' = \Phi \cdot (t_4)_j'$ $(j = 1-3)$. Отсюда нетрудно перейти к следующей системе однородных уравнений относительно функции F:

$$F_i' - \frac{(t_4)_i'}{(t_4)_1'} \cdot F_1' = 0 \ \ (i = 2,3). \quad (32)$$

Нетрудно проверить, что система (32) — якобиева. Составляя уравнение в полных дифференциалах, соответствующее системе (32), и интегрируя его, получим: $t_4 = Const$.

Следовательно, общим решением системы (32) будет $F = \Psi(t_4)$, где Ψ — произвольная функция, т. е. F есть функция от $t_4 = f(t_1, t_2, t_3)$. Обозначив ее через f_{41}, будем иметь из (31):

$$f_{41} \cdot \left(U_3' + U_1'\overline{M}\right) + \left(V_3' + V_1'\overline{M}\right) = 0. \quad (15)$$

Для дальнейшего отметим, что имеют место следующие тождества:

$$U_2' + U_1'M = 0,\ V_2' + V_1'M = 0, \quad (33)$$

что нетрудно проверить, стоит только вместо M подставить его выражение из (8). Но тогда справедливо соотношение:

$$f_{41} \cdot \left(U_2' + U_1'M\right) + \left(V_2' + V_1'M\right) = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14), (15) запишем в виде

$$\left(U \cdot f_{41} + V\right)_1' \cdot M + \left(U \cdot f_{41} + V\right)_2' = 0, \quad (34)$$

$$\left(U \cdot f_{41} + V\right)_1' \cdot \overline{M} + \left(U \cdot f_{41} + V\right)_3' = 0. \quad (35)$$

Случай А). Пусть $\left(U \cdot f_{41} + V\right)'_1 = 0.$ (36)

Тогда из (34-35) следует, что $\left(U \cdot f_{41} + V\right)'_i = 0 \; (i = 2,3)$. Следовательно, $U \cdot f_{41} + V$ есть функция от t_4. Обозначив ее через f_{42}, будем иметь:

$$f_{42} = U \cdot f_{41} + V, \tag{11}$$

т. е. уравнение (2) представимо номограммой (4).

Случай В). Пусть $\left(U \cdot f_{41} + V\right)'_1 \neq 0$. (37)

Тогда из (34), (35), соответственно, имеем:

$$-M = \frac{U'_2 \cdot f_{41} + V'_2}{U'_1 \cdot f_{41} + V'_1}; \tag{12}$$

$$-\overline{M} = \frac{U'_3 \cdot f_{41} + V'_3}{U'_1 \cdot f_{41} + V'_1}, \tag{13}$$

т. е. имеем следующую систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно t_4:

$$\left(t_4\right)'_i - \frac{U'_i \cdot f_{41} + V'_i}{U'_1 \cdot f_{41} + V'_1}\left(t_4\right)'_1 = 0 \quad (i = 2,3). \tag{38}$$

Эти уравнения независимые, т. к. ранг матрицы, соответствующей системе (38), равен двум.

Составляя скобки Якоби, нетрудно убедиться, что система (38) — замкнутая. Нахождение ее решения сведем к интегрированию замкнутой системы однородных дифференциальных уравнений. Для этого вместо того, чтобы непосредственно искать функцию t_4, удовлетворяющую системе (38), будем искать уравнение

$$\omega\left(t_1, t_2, t_3, t_4\right) = 0, \tag{39}$$

которому эта функция удовлетворяет.

Из (39) имеем: $\left(t_4\right)'_j = -\dfrac{\omega'_j}{\omega'_4} \quad (j = 1-3).$ (40)

Отсюда следует, что соотношения (полученные из (38) после замены в них $\left(t_4\right)'_j$ их выражениями (40))

$$\frac{U'_i \cdot f_{41} + V'_i}{U'_1 \cdot f_{41} + V'_1} \cdot \omega'_1 - \omega'_i = 0 \quad (i = 2,3) \tag{41}$$

должны обращаться в нуль после замены в них t_4 его значением, найденным из (39).

Систему (41) можно записать в виде:

$$\frac{U'_i \cdot f_{41} + V'_i}{U'_1 \cdot f_{41} + V'_1} \cdot \omega'_1 - \sum_{j=2}^{4} \delta_i^j \omega'_j = 0 \quad (i = 2,3), \tag{41*}$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Следовательно, мы пришли к системе однородных дифференциальных уравнений, которая, как нетрудно проверить, является полной и якобиевой. Нетрудно найти, что общим ее решением является произвольная функция от аргументов t_4, $U \cdot f_{41} + V$, т. е. $\omega\left(t_4;\; U \cdot f_{41} + V\right)$.

Значит, общее решение системы (38) найдем, отыскивая t_4 из уравнения

$$\omega\left(t_4;\ U\cdot f_{41}+V\right)=0. \tag{42}$$

Отсюда, в частности, имеем: $t_4 = E\left(U\cdot f_{41}+V\right)$, где E — произвольная функция, или $f_{42}\left(t_4\right)=U\cdot f_{41}\left(t_4\right)+V$ (11);
т.е, уравнение (2) допускает номограмму (4).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если уравнение (2) представимо номограммой (4) (любого жанра), то функция M (4) удовлетворяет условию

$$M_3' = 0. \tag{43}$$

Справедливость этого утверждения нетрудно проверить, выражая функцию M из уравнения (8) через функции f_{jr} номограммы (4).

2. Необходимые условия спрямляемости некоторых пространственных тканей

В дальнейшем (без нарушения общности) рассмотрим случай, когда двойственный образ спрямленной пространственной ткани дает пространственную створную номограмму первого жанра с ответной криволинейной шкалой t_4 с уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_{12}(t_1) & 1 \\ f_{21}(t_2) & 0 & 1 & 1 \\ 0 & f_{32}(t_3) & 0 & 1 \\ f_{41}(t_4) & f_{42}(t_2) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4*}$$

где между функциями $f_{41}(t_4)$, $f_{42}(t_4)$ не существует линейной зависимости. Такую номограмму обозначим T_4.

Теорема 1. Если уравнение (2): $t_4 = f(t_1, t_2, t_3)$ представимо номограммой T_4 (4*), то функции $M, \overline{M}$ (5) удовлетворяют условиям:

$$M_3' = 0,\ \left(\ln M\right)_{12}'' = 0,\ \left(\ln \overline{M}\right)_{13}'' \neq 0. \tag{44}$$

Условие $M_3' = 0$ выполняется в силу *следствия 1.*

Коррелятивным образом номограммы T_4 (4*) является пространственная ткань с уравнением (2), образованная семейством плоскостей t_4, принадлжащих связке, и тремя пучками плоскостей $t_r (r = 1-3)$ таких, что пучки плоскостей t_1, t_2 принадлежат одной связке, а семейства плоскостей t_3, t_4 — другой. Эту ткань также обозначим T_4. На плоскостях любого семейства плоскостей t_j ткани T_4 плоскости остальных трех семейств высекают, очевидно, прямолинейные ткани. Вычисляя кривизны [1] этих тканей ткани T_4, функция которой имеет вид

$$W = f(t_1, t_2, t_3) - t_4, \tag{2*}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\left(f_1'\right)^2\cdot M\cdot \overline{M}}\cdot\left(\ln\frac{\overline{M}}{M}\right)_{23}'', \quad & k_2 &= \frac{1}{\left(f_1'\right)^2\cdot\overline{M}}\cdot\left(\ln\overline{M}\right)_{13}'', \\ k_3 &= -\frac{1}{\left(f_1'\right)^2\cdot M}\cdot\left(\ln M\right)_{12}'', & k_4 &= -\left(k_1+k_2+k_3\right). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

На плоскостях семейства t_4 плоскости других трех семейств высекают, как известно [1], прямолинейные шестиугольные ткани. Следовательно, $k_4 = 0$, т.е. $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

Далее, кривизны $a_i \left(i = 1,2,3\right)$ любой ткани с уравнением (2*), удовлетворяющие [1] условию:
$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \tag{46}$$
вычисляются по формулам:

$$a_1 = -\frac{1}{f_1'}\left(ln\frac{M}{\overline{M}}\right)_1', \quad a_2 = \frac{1}{f_1' \cdot M}\left(ln\overline{M}\right)_2', \quad a_3 = -\frac{1}{f_1' \cdot \overline{M}}\left(lnM\right)_3' \tag{47}$$

В силу условия (46) имеем:

$$\left(ln\frac{M}{\overline{M}}\right)_1' - \frac{1}{M}\cdot\left(ln\,\overline{M}\right)_2' + \frac{1}{\overline{M}}\cdot\left(ln\,M\right)_3' = 0. \tag{48}$$

С учетом $M_3' = 0$ (43) последнее равенство примет вид:

$$-M\cdot\left(ln\overline{M}\right)_{13}'' = \left(ln\overline{M}\right)_{23}''. \tag{49}$$

Заметим, что условия (43): $M_3' = 0$ и (49) эквивалентны. Справедливость этого нетрудно проверить, используя выражения функций $M, \overline{M}$ (5). Отметим также, что дифференцированием (49) по t_3 и в силу условия $M_3' = 0$, получим:

$$-M\cdot\left(ln\overline{M}\right)_{13}'' = \left(ln\overline{M}\right)_{23}'' \tag{50}$$

На плоскостях семейств t_3 плоскости других трех семейств высекают прямолинейные ткани, которые также являются шестиугольными. Действительно, в силу того, что $k_4 = 0$ и в силу (43), из (45) имеем:

$$k_3 = -\left(k_1 + k_2\right) = -\frac{1}{\left(f_1'\right)^2\cdot\overline{M}}\left[\frac{1}{M}\left(ln\overline{M}\right)_{23}'' + \left(ln\overline{M}\right)_{13}''\right]. \tag{51}$$

Но тогда выражение, стоящее в квадратных скобках(51), в силу (50) тождественно равно нулю, т.е. $k_3 = 0$.

Из (51) имеем: что $k_1 + k_2 = 0$. Ясно, что ни одно из k_1, k_2 не равно нулю, в противном случае они бы совместно обратились в нуль, т. е. все $k_j = 0 \left(j = 1-4\right)$. Но тогда ткань T_4 была бы шестиугольной [1], а ее коррелятивным образом являлась бы номограмма (3) нулевого жанра [5].

Итак, $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, т.е. имеет место $\left(ln\,\overline{M}\right)_{13}'' \neq 0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.
2. Soreau, R. Nomographie ou Traite des Abaques, tome premier, p. 345. Paris, 1921.
3 Gronwall, T. H. Sur les equations entre trios variables representables par les nomogrammes a points alignes // Journ. mathem. pures et appliques, ser. 6 , 8. Paris, 1912.
4 Николаев П. В. О представлении уравнений номограммами второго жанра. ДАН СССР, т. 157, № 6, 1964.
5 Дураков (Рудаков) Б. П. О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами нулевого жанра. // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, вып. 31, 1965. С. 29-49.