

9. Александров А.В., Яковлев В.И. Математическое описание и методы анализа нестационарных процессов в газопроводах. М.: ВНИИЭгазпром, 1970. 30 с.
10. Hammersmidt E.G., Ind.Eng.Chem.26 (1934)851.
11. Natural gas hydrates, Energy information administration, International Energy Outlook 1998, DOE/EIA-0484(98) (Washington, DC, April 1998).

*Сергей Павлович РОДИОНОВ —  
главный научный сотрудник  
Тюменского филиала Института теоретической и  
прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор*

*Любовь Николаевна ОРЕХОВА —  
аспирант  
Тюменского государственного университета*

УДК 532.546

## **МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ АПСКЕЙЛИНГЕ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

*АННОТАЦИЯ. В статье предложена методика определения тензоров модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую (upscaling). Методика основана на решении задачи двухфазной фильтрации внутри крупной ячейки.*

*The method of evaluation of upscaled tensors of relativity phase permeabilites is presented. A basis of methods is solved of two phase filtration problem in coarse cell.*

В настоящее время при моделировании разработки нефтяных месторождений широко применяются трехмерные численные гидродинамические модели многофазной фильтрации. Гидродинамические модели создаются на основе геологических моделей нефтяных месторождений, которые в некоторых случаях могут содержать настолько большое количество ячеек разностной сетки, что время расчетов становится неприемлемым. Поэтому необходимо уменьшить количество ячеек путем объединения мелких ячеек геологической сетки в крупные ячейки гидродинамической сетки. Эквивалентные фильтрационно-емкостные параметры крупных ячеек, которые зависят от параметров составляющих их мелких ячеек, естественно определить таким образом, чтобы различие результатов расчетов на исходной и укрупненной сетках было минимальным. Такая процедура в зарубежной литературе называется up'scaling (ремасштабирование) геологической модели в гидродинамическую. В последнее время теория up'scaling'a интенсивно развивается за рубежом (см., например, [1, 2]). Число отечественных публикаций по этой теме значительно меньше. Как отмечается в [1], завершенная теория up'scaling'a в настоящее время еще не построена.

Эквивалентными параметрами укрупненных ячеек, необходимыми для гидродинамических расчетов, являются пористость горной породы, насыщенности фаз и абсолютная проницаемость пористой среды. Вопросы определения эквивалентных или модифицированных относительных фазовых проницаемостей при up'scaling'e отражены в обзорах [3, 4].

В настоящей работе предлагается методика определения эквивалентных относительных фазовых проницаемостей (ОФП) при укрупнении ячеек. Методика основана на решении задачи двухфазной фильтрации в отдельной крупной ячейке. Такой способ определения фильтрационных параметров крупных ячеек является наиболее точным среди других методов.

Рассмотрим процедуру up'scaling'a при следующих допущениях: нефть, вода и пористая среда несжимаемы; вязкости фильтрующихся фаз постоянны; капиллярные и гравитационные силы пренебрежимо малы. Во избежание громоздкости изложения рассматривается случай двумерных ячеек. Расчет эквивалентных величин осуществим на примере одной из ячеек гидродинамической сетки, т.к. в остальных их можно определить по аналогии. Схематическое представление процедуры up'scaling'a приведено на рис. 1.

Вычисление эквивалентных значений скалярных величин, характеризующих емкостные свойства крупной ячейки, таких как пористость породы  $\phi$  и насыщенности фаз  $S_l$ , не вызывает трудностей и определяется путем осреднения по ее объему [1]:

$$\phi^* = \frac{1}{V} \int_V \phi dV, \quad \phi^* S_l^* = \frac{1}{V} \int_V S_l \phi dV, \quad V = \int_V dV \quad (l=w, o), \quad (1)$$

где индексом  $l$  внизу отмечены параметры, относящиеся к водной ( $l=w$ ) и нефтяной ( $l=o$ ) фазам. Эквивалентные параметры крупной ячейки отмечены знаком \* вверху. Сложнее обстоит дело с определением фильтрационных параметров крупных ячеек, таких как абсолютная проницаемость пористой среды и относительные проницаемости фаз. Фильтрационные параметры могут быть скалярами, векторами или тензорами.

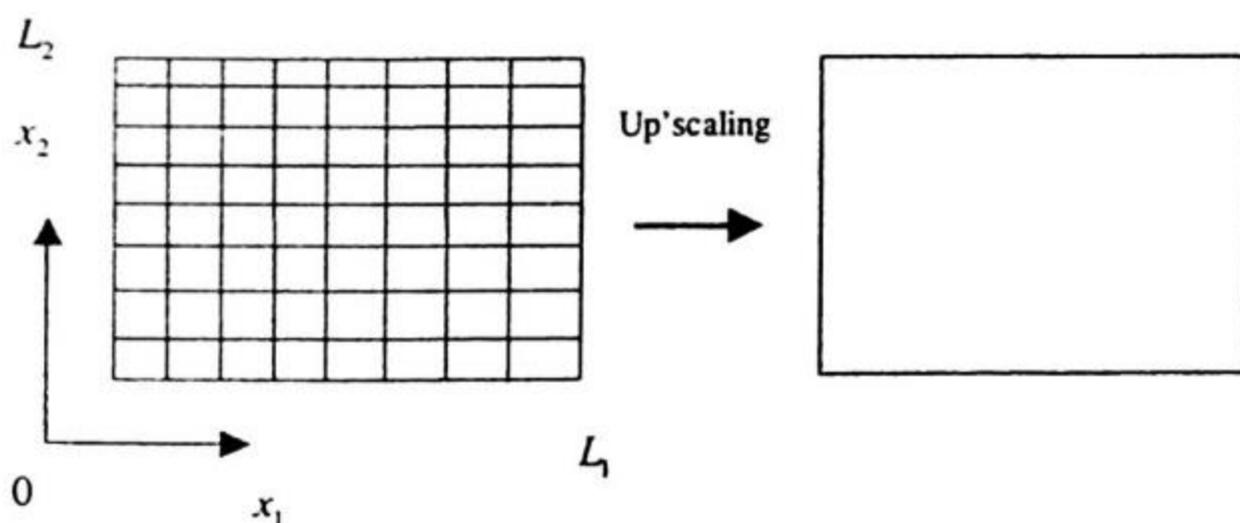


Рис. 1. Схематическое представление процедуры up'scaling'a в декартовых координатах  $x_1$  и  $x_2$  для крупной ячейки, включающей в себя  $8 \times 8 = 64$  мелкие ячейки;  $L_k$  — длины крупной ячейки вдоль координат  $x_k$  ( $k=1, 2$ )

При вычислении эквивалентной абсолютной проницаемости крупной ячейки в каждой ее точке полагается справедливым закон Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2)$$

или в компонентном виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nabla p)_1 \\ (\nabla p)_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $k_k = k_k(x_1, x_2)$ ,  $u_k$  и  $(\nabla p)_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}$  —  $k$ -ая ( $k=1, 2$ ) составляющая соответ-

ственно диагонального тензора абсолютной проницаемости  $k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ , вектора скорости жидкости  $u$  и градиента давления  $\nabla p$ ;  $\mu$  — вязкость жидкости. Подставляя выражение (2) в уравнение сохранения массы жидкости

$$\operatorname{div} u = 0,$$

можно получить следующее уравнение для давления  $p(x_1, x_2)$  фильтрующейся жидкости, которое решается численно внутри крупной ячейки

$$\operatorname{div} \left( \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = 0. \quad (3)$$

Тензор эквивалентной абсолютной проницаемости  $k^*$  для крупной ячейки гидродинамической сетки представляет собой коэффициент пропорциональности между средними по объему скоростью жидкости  $\langle u \rangle$  и градиентом давления  $\langle \nabla p \rangle$ :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{V} \int_V u dV, \quad \langle \nabla p \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\nabla p) dV.$$

Тензор  $k^*$  определяется из выражения

$$\langle u \rangle = -\frac{1}{\mu} k^* \langle \nabla p \rangle \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \langle u \rangle_1 \\ \langle u \rangle_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \nabla p \rangle_1 \\ \langle \nabla p \rangle_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь и далее скобками  $\langle \cdot \rangle$  обозначены вспомогательные средние величины, являющиеся результатом up'scaling'a, но не используемые в расчетах на крупной сетке. Знаком \* отмечены величины, необходимые для расчетов на этой сетке.

Для решения дифференциального уравнения (3) необходимо задать условия для давления на границах укрупненной ячейки. Лучше всего их взять из решения на мелкой сетке. Однако для этого потребовалось бы решить исходную задачу на геологической сетке, которую и требуется упростить. Поэтому на практике используются следующие наиболее распространенные типы граничных условий [1]:

а) — «открытые границы»

$$1. p(0, x_2) = 1, p(L_1, x_2) = 0, p(x_1, 0) = p(x_1, L_2) = 1 - x_1/L_1,$$

$$2. p(x_1, 0) = 1, p(x_1, L_2) = 0, p(0, x_2) = p(L_1, x_2) = 1 - x_2/L_2.$$

б) — «закрытые границы»

$$1. p(0, x_2) = 1, p(L_1, x_2) = 0, \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, L_2) = 0.$$

$$2. p(x_1, 0) = 1, p(x_1, L_2) = 0, \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(L_1, x_2) = 0.$$

Здесь каждому типу граничных условий (а или б) соответствует два варианта их задания (1 и 2).

Чтобы определить компоненты тензора  $k^*$  необходимо сперва выбрать тип граничного условия: а) или б). Затем с выбранным типом граничных условий

дважды решить уравнение (3), поочередно рассматривая варианты  $j=1$  и  $2$ . Поскольку векторы  $\langle u \rangle$  и  $\langle \nabla p \rangle$  имеют две компоненты и уравнение (3) решается для двух различных вариантов граничных условий ( $j=1, 2$ ), то для выбранного типа граничных условий становится возможным определение всех четырех компонент тензора

$$k^* = \begin{pmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Система уравнений для определения компонент имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_1^1 &= -\frac{1}{\mu} (k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1), & \langle u \rangle_2^1 &= -\frac{1}{\mu} (k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1) \\ \langle u \rangle_1^2 &= -\frac{1}{\mu} (k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2), & \langle u \rangle_2^2 &= -\frac{1}{\mu} (k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2) \end{aligned} \quad (6)$$

или с учетом второго из соотношений (4):

$$\begin{aligned} k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1 &= \langle k_{11} \nabla p \rangle_1^1 + \langle k_{12} \nabla p \rangle_2^1, \\ k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1 &= \langle k_{21} \nabla p \rangle_1^1 + \langle k_{22} \nabla p \rangle_2^1, \\ k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 &= \langle k_{11} \nabla p \rangle_1^2 + \langle k_{12} \nabla p \rangle_2^2, \\ k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 &= \langle k_{21} \nabla p \rangle_1^2 + \langle k_{22} \nabla p \rangle_2^2. \end{aligned}$$

Здесь индексами 1 и 2 вверху отмечены значения для граничных условий с номерами 1 и 2. Индексами 1 и 2 внизу обозначены соответствующие компоненты векторов  $\langle u \rangle$  и  $\langle \nabla p \rangle$ .

Определенный на основе граничных условий (5) тензор  $k^*$  может оказаться несимметричным. Чтобы получить симметричный тензор, система уравнений (6) дополняется следующим условием [1]:

$$k_{12}^* - k_{21}^* = 0 \quad \text{или} \quad k_{12}^* = k_{21}^* = (k_{12}^* + k_{21}^*)/2 \quad (7)$$

Из системы (6)-(7) и определяются компоненты симметричного тензора  $k^*$ .

Отметим, что полный тензор  $k^*$  может быть определен только при граничных условиях типа а) — «открытые границы». При граничных условиях типа б) — «закрытые границы» — можно вычислить только диагональную часть этого тензора. Действительно, при граничных условиях б) имеем  $\langle u \rangle_2^1 = \langle u \rangle_1^2 = 0$ . Поэтому из (6) следует, что

$$\langle u \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu} k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu} \langle k_1 \nabla p \rangle_1^1, \quad \langle u \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu} k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu} \langle k_2 \nabla p \rangle_2^2$$

и компоненты тензора абсолютной проницаемости для крупной ячейки можно определить с использованием следующих простых формул:

$$k_{11}^* = \frac{\langle k_1 \nabla p \rangle_1^1}{\langle \nabla p \rangle_1^1}, \quad k_{22}^* = \frac{\langle k_2 \nabla p \rangle_2^2}{\langle \nabla p \rangle_2^2}, \quad k_{12}^* = k_{21}^* = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь процедуру определения тензоров модифицированных ОФП для водной ( $k_{rw}^*$ ) и нефтяной ( $k_{ro}^*$ ) фаз с вязкостями  $\mu_w$  и  $\mu_o$ . Внутри крупной ячейки скорости фаз определяются на основе обобщенного закона Дарси

$$u_l = -k \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l} \nabla p, \quad (l=w, o),$$

и решается следующая система уравнений двухфазной фильтрации [5]:

$$\operatorname{div} \left( k \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \nabla p \right) = 0, \quad \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \operatorname{div} \left( k \frac{k_{rw}}{\mu_w} \nabla p \right), \quad S_w + S_o = 1. \quad (9)$$

Система уравнений (9) кроме граничных условий для давления (5) дополняется граничными условиями для насыщенности одной из фаз (для воды). Эти условия задаются на границах, через которые происходит втекание жидкости в ячейку. Для вариантов 1 и 2 имеем

$$S_w(0, x_2, t) = S_{wb}(t), \quad (10.1)$$

$$S_w(x_2, 0, t) = S_{wb}(t), \quad (10.2)$$

где  $S_{wb}(t)$  — зависимость водонасыщенности на границе от времени, которая должна выбираться из физических соображений или из приближенных решений. Кроме того, внутри крупной ячейки должны быть заданы начальные условия:

$$S_w(x_1, x_2, 0) = S_{wo}(x_1, x_2) \quad (11)$$

Далее в крупной ячейке рассчитываются средние скорости каждой из фаз

$$\langle u_l \rangle^j = \frac{1}{V} \int_V u_l^j dV, \quad \langle \nabla p \rangle^j = \frac{1}{V} \int_V (\nabla p)^j dV \quad (l=w, o; j=1, 2).$$

Компоненты симметричного тензора модифицированных ОФП  $l$ -ой фазы ( $l=w, o$ )

$$k_{rl}^* = \begin{pmatrix} k_{rl11}^* & k_{rl12}^* \\ k_{rl21}^* & k_{rl22}^* \end{pmatrix}$$

определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \langle u_l \rangle_1^1 &= -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl11}^* k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{rl12}^* k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1), \\ \langle u_l \rangle_2^1 &= -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl21}^* k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{rl22}^* k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1), \\ \langle u_l \rangle_1^2 &= -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl11}^* k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{rl12}^* k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2), \\ \langle u_l \rangle_2^2 &= -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl21}^* k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{rl22}^* k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2). \end{aligned} \quad (12)$$

$$k_{rl12}^* - k_{rl21}^* = 0.$$

Здесь компоненты тензора  $k^*$  рассчитываются согласно (6)-(7). Уравнения (12) получены в результате осреднения скоростей фаз, определенных из обобщенного закона Дарси, по объему крупной ячейки.

Полный тензор модифицированных ОФП, как и полный тензор абсолютной проницаемости, может быть определен только для граничных условий типа а).

Для граничных условий типа б) значения диагональных компонент усредненных ОФП определяются согласно следующим формулам:

$$k_{rl11}^* = \frac{\langle k_{rl} k_1 \nabla p \rangle_1^1}{k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1}, \quad k_{rl22}^* = \frac{\langle k_{rl} k_2 \nabla p \rangle_2^2}{k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2}, \quad k_{rl12}^* = k_{rl21}^* = 0 \quad (l=w, o) \quad (13)$$

где значения  $k_{11}^*$  и  $k_{22}^*$  определяются из (6) при условии (7).

Определение зависимости модифицированных ОФП от водонасыщенности осуществляется следующим образом. Внутри крупной ячейки при заданных начальных (11) и граничных (5) условиях на основе системы уравнений (9) решается задача нестационарной двухфазной фильтрации. При этом в каждой точке крупной ячейки и в каждый момент времени рассчитываются насыщенности фаз и давление смеси. Далее согласно (1) вычисляются средние насыщенности фаз по объему крупной ячейки  $S_l^* = S_l^*(t)$ , средние значения скоростей и градиентов давления и, согласно (12) или (13), — модифицированные ОФП  $k_{rl}^* = k_{rl}^*(t)$ . При каждом  $t$  значения  $S_l^*$  и  $k_{rl}^*$  ставятся в соответствие друг другу. В результате получаем искомые зависимости

$$k_{rl}^* = k_{rl}^*(S_w^*), \quad (l=w, o).$$

Предложенную выше методику можно легко обобщить на трехмерный случай. В этом случае для определения тензоров  $k^*$  и  $k_{rl}^*$  необходимо решить три задачи с тремя компонентами скоростей фаз и градиентов давления и с тремя вариантами граничных условий. Всего таким образом можно определить девять компонент тензоров абсолютной и относительных фазовых проницаемостей трехмерной крупной ячейки. Методика может быть обобщена также на случай, когда в состав крупных ячеек входят мелкие ячейки, вскрытые скважинами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Durlofsky L. J. Upscaling and Gridding of Fine Scale Geologocal Models for Flow Simulation. Department of Petroleum Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305-22220 USA, 2005.
2. Chen Y., Durlofsky L.J., Gerritsen M., Wen X.H. A Coupled Local-Global Upscaling Approach for Simulating Flow in Highly Heterogeneous Formations // Appearing in Advances in Water Resources, 26, 1041-1060 (2003).
3. Barker, J.W., Thibeau, S. A Critical Review of the Use of Pseudo Relative Permeabilities for Upscaling, Paper SPE 35491 presented at European 3-D Reservoir Modeling Conference held in Stavanger, Norway, April 16-17, 1996
4. Christie M.-A. Upscaling for reservoir simulation. // J. Petrol. Technol. 1996. V. 48, № 11. P.1004-1010.
5. Басниев К. С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учеб. М.: Недра, 1993.