

Алексей Васильевич МАЛЬШАКОВ —  
зав. научно-исследовательской лабораторией  
петрофизического обеспечения  
Тюменского отделения «СургутНИПИнефть»,  
кандидат геолого-минералогических наук

УДК 550.832, 622.276

## КОНЕЧНОМЕРНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ПЕРКОЛЯЦИИ 1.5D НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ

**АННОТАЦИЯ.** Рассмотрена задача о вычислении мощности бесконечного кластера 1.5D неупорядоченной системы конечного размера. Предложено дифференциальное уравнение, описывающее скейлинговую (масштабную) функцию, приведено сопоставление с экспериментом.

*The problem about calculation of capacity infinite кластера 1.5D the disorder system of the finite size is considered. The differential equation describing scaling function is offered, comparison to experiment is resulted.*

Предметом данной работы является исследование критического поведения мощности бесконечного кластера двухмерной 1.5D полосообразной системы конечного размера  $L \times H$  ( $a < L < H$ , где  $a$  — минимальный размер проводящих и непроводящих элементов) вблизи порога протекания. Такая модель возникает при исследовании задачи перколяции стратифицированных геологических объектов, таких как месторождения нефти и газа, представленные пластами конечной мощности с широким распространением по латерали. Обычно при моделировании процесса заводнения нефтяного пласта рассматривается постановка задачи [1-4], которая полностью соответствует задаче о перколяции по узлам. Пласт аппроксимируется клеточной областью, набранной из одинаковых квадратных элементов проводников и непроводников с линейным размером  $a$ . В общем числе всех зон доля зон, имеющих пласт — коллектор (проводник), равняется  $p$ , причем размещение этих зон совершенно хаотическое. Характерным (минимальным) размером отдельной зоны является сторона квадрата  $a$ , которая соответствует микроскопическому размеру задачи. Рассматривается участок пласта, имеющий полосообразную форму и расположенный между двумя параллельными галереями скважин (галерейная постановка). Расстояние от нагнетательной галереи до эксплуатационной галереи равняется  $L$ . На этом расстоянии укладывается число зон  $L/a$ . При  $L \rightarrow a$  среда становится одномерной, при  $L \gg \xi$  — двухмерной ( $\xi$  — длина корреляции). Перколяционный слой в случае, когда  $L \ll \xi$  и  $H \geq \xi$ , занимает промежуточное положение между одно- и двухмерными случаями (иногда этот случай называют 1.5D — средами [5]).

Мощность бесконечного кластера перколяционной системы характеризуется следующими асимптотиками (см., например, [6]):

$$P_{\infty}(p) \propto \begin{cases} (p - p_c)^{\beta}, & p_c < p < 1 \\ 0, & 0 < p < p_c \end{cases} \quad (1a)$$

В случае, когда размеры системы конечны, для анализа таких систем используют процедуру конечномерного масштабирования [6, 7], или иначе конечно-размерного скейлинга (finite — size scaling), позволяющего добиться наложения графиков величин  $P_{\infty}(p, L)$ , полученных при разных значениях  $L$ .

При конечномерном масштабировании формулу (1) представляют в следующем виде [6, 7]:

$$P_{\infty}(p, L) \propto L^{-\beta/\nu} F(L/\xi), \quad (2)$$

которое отражает тот принцип, что эффекты конечных размеров системы при перколяционном переходе контролируются отношением длины корреляции и линейного размера решетки.

Асимптотическое поведение масштабирующей функции  $F(z)$  при больших  $z$  (иначе при  $L \rightarrow \infty$ ) определяется из условия, что в термодинамическом пределе все степени  $L$  должны исчезнуть и в результате должна получиться соответствующая степенная зависимость (1):

$$F(z \gg 1) \propto z^{\beta} \propto L^{\beta/\nu} (p - p_c)^{\beta}, \quad (3)$$

где  $z = (L/\xi)^{\nu} = (p - p_c)L^{\nu}$  — безразмерный параметр.

Окончательно формула для мощности бесконечного кластера при конечномерном масштабировании может быть записана в виде [6, 7]:

$$P_{\infty}(p, L) = L^{-\beta/\nu} F[(p - p_c)L^{\nu}]. \quad (4)$$

Согласно формуле (4), данные, относящиеся к системам с различными размерами, должны ложиться на одну универсальную линию, если построить график зависимости  $L^{\beta/\nu} P_{\infty}(p, L)$  против  $(p - p_c)L^{\nu}$ .

Проанализируем с позиций конечномерного масштабирования данные численного эксперимента по влиянию конечных размеров системы на величину мощности бесконечного кластера, приведенные в работе [3], в которой рассмотрены проводники и непроводники единичного размера.

На рис. 1 нанесены данные, приведенные в работе [3], обработанные согласно (3), с использованием численных значений критических показателей:  $\beta = 5/36$ ;  $\nu = 4/3$ ;  $p_c \approx 0.592$ . Как видно из рис. 1, данные, относящиеся к системам различного размера, ложатся на одну кривую.

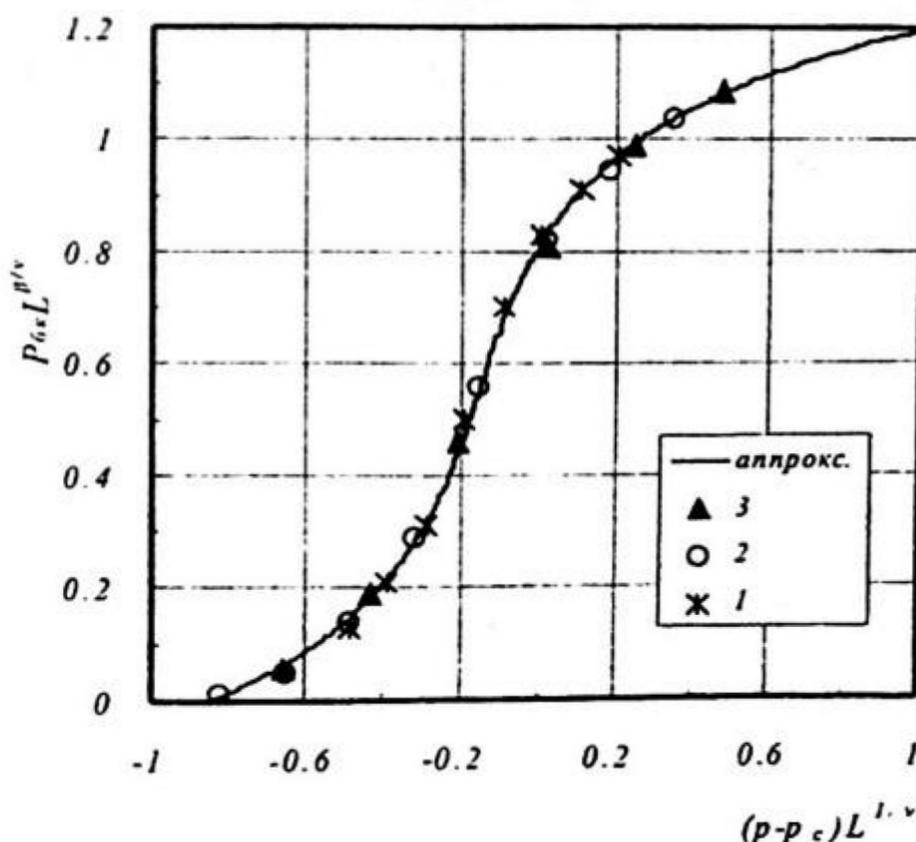


Рис. 1. Конечномерное масштабирование мощности бесконечного кластера  $P_{\infty}(p, L)$  неупорядоченной системы 1.5 D. Шифр точек — отношение  $L/a$ . Точки — данные работы [3]

Для описания поведения такой «универсальной» кривой можно использовать дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{A}{\left| \frac{z-z_c}{\Delta} \right|^{1+\alpha} + 1}, \quad (5)$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta$ ,  $z_c$  — константы ( $A$  соответствует максимальному значению производной

водной  $\left. \frac{dF(z=z_c)}{dz} \right|_{\max}$ ;  $z_c$  — значение точки пика, в которой производная функ-

ции  $F(z)$  достигает максимального значения; величина  $\Delta$  имеет смысл ширины интервала по  $z$  вблизи  $z_c$ , в котором происходит переход (кроссовер) от одной асимптотики (слева) к другой (справа). Такая модель ранее встречалась при описании роста численности человечества земного шара в работе [8], где принималось условие, что  $\alpha=1$ .

На рис. 1 нанесена кривая, соответствующая уравнению (5) с константами:  $A=2.365$ ;  $\alpha=0.26$ ;  $\Delta=0.142$ ;  $z_c=0.152$ .

На рис. 2 и рис. 3 приведены сопоставления экспериментальных данных с рассчитанными кривыми с использованием уравнений (4) и (5), из которых видно, что теоретическая модель (4) и (5) хорошо описывает экспериментальные данные.

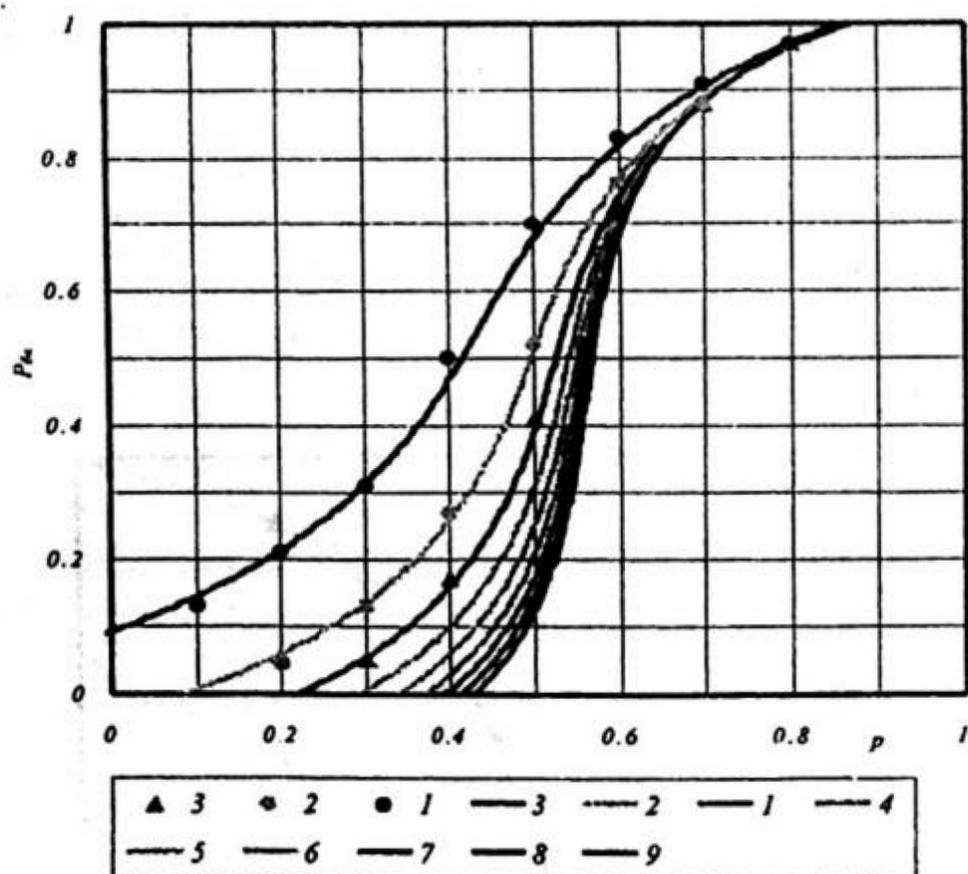


Рис. 2. Сопоставление рассчитанных зависимостей  $P_{\infty} = f(p, L/a)$  с экспериментальными данными. Шифр точек и кривых — отношение  $L/a$ . Точки — данные работы [3]

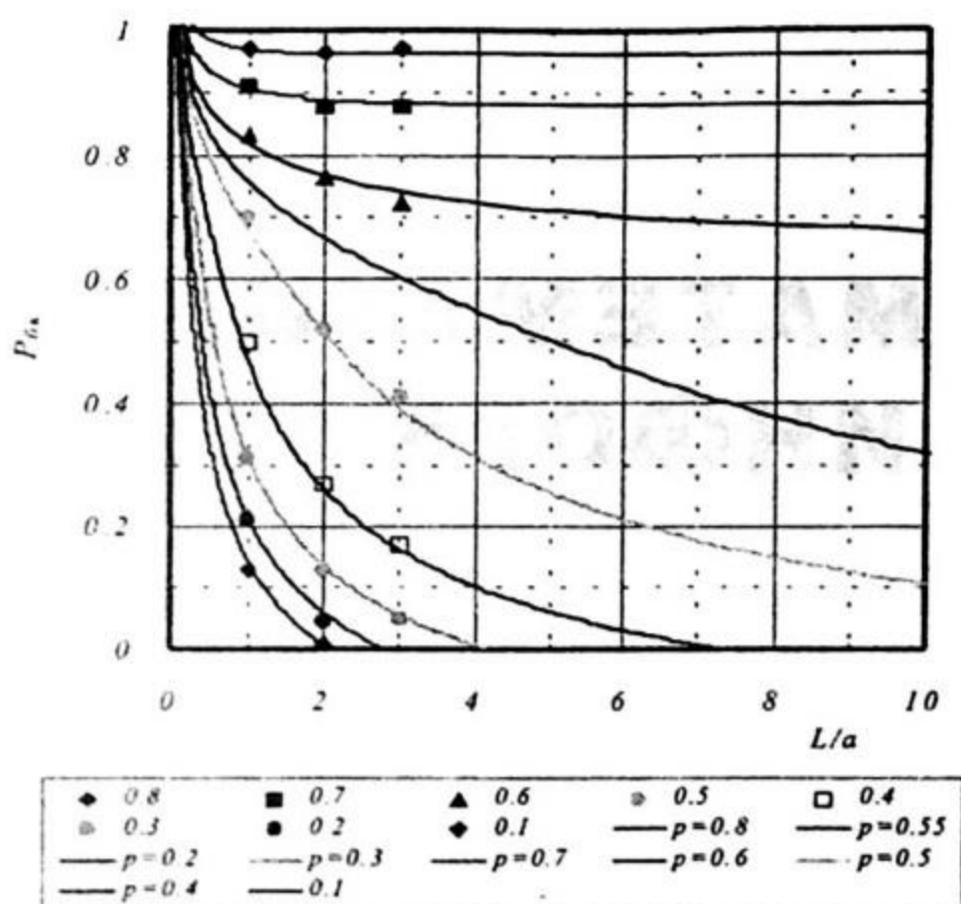


Рис. 3. Сопоставление рассчитанных зависимостей  $P_{in} = f(L/a, p)$  с экспериментальными данными. Шифр точек и кривых — величина  $p$ . Точки — данные работы [3]

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лысенко В.Д., Мухарский Э.Д. Проектирование разработки нефтяных месторождений платформенного типа. М.: Недра, 1975. 176 с.
2. Ковалев В.С., Житомирский В.М. Исследование влияния прерывистости пласта на показатели его разработки и конечную нефтеотдачу // Нефтяное хозяйство. 1978. Вып. 8. С. 27-30.
3. Бадьянов В.А. Моделирование прерывистости пластов на ЭВМ // Нефтяное хозяйство. 1982. Вып. 9. С. 19-22.
4. Швидлер М.И. Об одной оценке вероятности перколяции в неоднородных средах // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. Вып. 2. С. 666-668.
5. Снарский А.А., Безсуднов И.В., Севрюков В.А. Процессы переноса в макроскопически неупорядоченных средах. От теории среднего поля до перколяции. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 304 с.
6. Биндер К., Хеерман Д.В. Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике: Введение. М.: Наука, Физматлит, 1995. 144 с.
7. Heerman D.W., Stauffer D. Influence of boundary conditions on square bond percolation near  $p_c$  // Z.Physik B. Condensed matter. 1980. V.40. P. 133-136.
8. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 288 с.