МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Максим Людвигович ПЛАТОНОВ —
ст. преподаватель кафедры алгебры
и математической логики
Института математики и компьютерных наук

Александр Николаевич ДЕГТЕВ —
профессор кафедры алгебры
и математической логики
Института математики и компьютерных наук,
доктор физико-математических наук

Тюменский государственный университет

УДК 510.5

О ВЕРХНИХ ПОЛУРЕШЕТКАХ Р-СТЕПЕНЕЙ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

АННОТАЦИЯ. В работе доказывается, что верхняя полурешетка р-степеней вычислимых нумераций семейства рекурсивно перечислимых множеств не является нижней и дистрибутивной полурешеткой. Показано, что если р-степень содержит однозначную нумерацию, то в этой полурешетке истинны следующие предложения:

$$(\exists b)(a < b \wedge (\forall c)(a \leq c \leq b \Rightarrow c=b));$$

$$(\forall b)(a < b \Rightarrow (\exists c)(a < c < b)).$$

This proved that the upper semilattice p-degrees all computable Numerations family of recursively enumerable sets (RPM) is not lower and distributive semilattice. We show that if the district level of a unique numbering, it semilattice true following suggestions:

$$(\exists b)(a < b \wedge (\forall c)(a \leq c \leq b \Rightarrow c=b));$$

$$(\forall b)(a < b \Rightarrow (\exists c)(a < c < b)).$$

Пусть S — непустое семейство подмножеств множества N всех целых неотрицательных чисел. Произвольное сюръективное отображение $\nu{:}N \rightarrow S$ называется *нумерацией* множества S. Нумерацию ν множества S называют *вычислимой*, если множество $G_\nu=\{\langle n, s\rangle : s\in\nu(n)\}$ является рекурсивно перечислимым, где $\langle n, s\rangle$ — канторовский номер, упорядоченной пары (n, s).

Пусть μ и ν — некоторые нумерации множества S. Нумерация μ p-сводится (сводится позитивно) к нумерации ν и символически обозначается $\mu\leq_p\nu$ [2], если существует p-оператор (оператор перечисления) Φ такой, что для любого элемента $s\in S$ имеет место:

$$\mu^{-1}(s)=\Phi(\nu^{-1}(s)),$$

где $\mu^{-1}(s)$ и $\nu^{-1}(s)$ — прообразы (номера) элемента $s\in S$ относительно нумераций μ и ν соответственно.

На интуитивном уровне сводимость нумерации μ к нумерации ν означает, что существует эффективная процедура (алгоритм), позволяющая по любому μ-номеру элемента получать ν-номер этого же элемента.

Отображение $\Phi : P(N)\to P(N)$, где $P(N)=\{X : X\subseteq N\}$, называется p-оператором [3], если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что для любого множества $X\subseteq N$ имеет место:

$$\Phi(X)=\{x : \exists y[y\in D_{f(x)}\& D_y\subseteq X]\},$$

где $D_{f(x)}$ или D_y — конечное подмножество N с каноническим номером n соответственно.

Используя введенные определения, получим следующую формулировку понятия p-сводимости нумераций:

$$\mu\leq_p\nu\leftrightarrow\mu^{-1}(s)=\{x : \exists y[y\in D_{f(x)}\& D_y\subseteq\nu^{-1}(s)]\}.$$

В случае p-сводимости нумераций можно считать, что $\mu\leq_p\nu$ посредством ОРФ f.

Пусть S — семейство рекурсивно перечислимых множеств (РПМ). Как и в случае m-сводимости нумераций [1], отношение $\leq_p$ на множестве $H_p^0(S)$ всех вычислимых нумераций семейства S является квазипорядком. Отношение $\leq_p$ обладает свойством антисимметричности, что позволяет определить понятие p-эквивалентности нумераций. Нумерации μ и ν называются *p-эквивалентными* и обозначаются как $\mu\equiv_p\nu$, если $\mu\leq_p\nu$ и $\nu\leq_p\mu$. Прямая сумма $\oplus$ двух нумераций μ и ν есть нумерация $\mu\oplus\nu$, которая определяется так:

$$(\mu\oplus\nu)(y)=\begin{cases}\mu(x), \text{ если } y=2x;\\ \nu(x), \text{ если } y=2x+1.\end{cases}$$

Любые две нумерации имеют точную верхнюю грань, которой и является их прямая сумма. Как известно [1], множество H_p^0 (S) является замкнутым относительно операции $\oplus$. Это означает, что если нумерации являются вычислимыми, то их прямая сумма также является вычислимой нумерацией.

Класс $[\nu]_p$ всех нумераций, p-эквивалентных нумерации ν, называется *p-степенью* нумерации ν: $[\nu]_p=\{\mu : \mu\equiv_p\nu\}$. Фактор-множество H_p^0 (S)$/\equiv_p$ по отношению p-эквивалентности вычислимых нумераций есть множество классов p-эквивалентных нумераций или p-степеней, которое обозначим через L_p^0 (S). Квазипорядок $\leq_p$ индуцирует отношение частичного порядка на множестве L_p^0 (S), которое будем обозначать символом $\leq$, следующим образом: $[\mu]_p\leq[\nu]_p\leftrightarrow\mu\leq_p\nu$. Прямая сумма $\oplus$ двух p-степеней $[\mu]_p$ и $[\nu]_p$ есть p-степень $[\mu\oplus\nu]_p$, задаваемая так:

$$[\mu \oplus \nu]_p(y) = \begin{cases} [\mu]_p(x), \text{ если } y = 2x; \\ [\nu]_p(x), \text{ если } y = 2x+1. \end{cases}$$

Понятно, что точной верхней гранью любых двух p-степеней $[\mu]_p$ и $[\nu]_p$ есть p-степень $[\mu \oplus \nu]_p$. Таким образом, $L_p^0(S)$ множество — верхняя полурешетка p-степеней вычислимых нумераций семейства S. Отметим тот факт [1], что $L_p^0(S)$ — идеал верхней полурешетки всех нумераций семейства, т.е. подмножество, содержащее вместе с каждым элементом все меньшие его. В частности, $L_p^0(S)$ имеет наибольший элемент **1** и счетное число минимальных, например, p-степени однозначных нумераций семейства S.

Пусть $\mu : N \to S_0$ и $\nu : N \to S_1$ — нумерации некоторых произвольных семейств рекурсивно перечислимых множеств (РПМ) $S_0 = \{A_i\}_{i\in N}$ и $S_1 = \{B_j\}_{j\in N}$, $S_0 \subseteq S_1$. Говорят, что нумерация μ семейства S_0 p-сводится к нумерации ν семейства и символически обозначают $\mu \leq_p \nu$ [2], если существует ОРФ f такая, что выполнены следующие условия:

a) для любого множества $A_i \in S_0$ имеет место:

$$(\forall A_i \in S_0)(\exists B_j \in S_1)(\mu^{-1}(A_i) = \{x : \exists y[y \in D_{f(x)} \& D_y \subseteq \nu^{-1}(B_j)]\});$$

b) не существует множества $B_k \in S_1$, $B_k \neq B_j$, что $B_k \leq_p B_j$.

Лемма 1. *Пусть ν_0 и ν_1 — нумерации семейств РПМ S_0 и S_1 таких, что $S_0 \cap S_1 = \varnothing$, а μ_0 и μ_1 — нумерации подсемейств $S'_0 \subseteq S_0$ и $S'_1 \subseteq S_1$. Если $\mu_0 \oplus \mu_1 \leq_p \nu_0 \oplus \nu_1$, то $\mu_0 \leq_p \nu_0$ и $\mu_1 \leq_p \nu_1$.*

Доказательство. Пусть $\mu_0 \oplus \mu_1 \leq_p \nu_0 \oplus \nu_1$ посредством ОРФ f. Для определенности будем считать, что:

$$(\nu_0 \oplus \nu_1)(y) = \begin{cases} \nu_0(x), \text{ если } y = 2x; \\ \nu_1(x), \text{ если } y = 2x+1. \end{cases}$$

$$(\mu_0 \oplus \mu_1)(n) = \begin{cases} \mu_0(x), \text{ если } n = 2m; \\ \mu_1(x), \text{ если } n = 2m+1. \end{cases}$$

Докажем существование ОРФ g, посредством которой осуществляется p-сводимость μ_0 к ν_0. Рассмотрим произвольное натуральное четное число $y = 2x$. Такому выбору соответствует, например, случай, когда $\mu_0 \oplus \mu_1 \leq_p \nu_0$. Используя данное число в качестве канонического номера конечного множества, определим элементы этого множества: $D_{f(y)} = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Далее, каждому α_i $(0 \leq i \leq k)$ соответствует конечное множество $D_{\alpha_i} = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Любое $\beta_j \in D_{\alpha_i}$ число $(0 \leq j \leq l)$ является некоторого РПМ семейства S_0, и поэтому нечетные числа из D_{α_i} в p-сведении $\mu_0 \oplus \mu_1$ к ν_0 не будут играть никакой роли. Если рассмотреть множества $D_{\gamma_i} = \{\beta_j : \beta_j \in D_{\alpha_i} \& \beta_j \equiv 0 \text{ (mod2)}\}$ и $D_{g(n)} = \{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_s\}$ получим, что существует ОРФ g, посредством которой $\mu_0 \leq_p \nu_0$.

Аналогичным образом можно показать, что $\mu_1 \leq_p \nu_1$ посредством некоторой ОРФ h. □

Лемма 2. *Пусть ν_0 и ν_1 — нумерации семейств РПМ S_0 и S_1 таких, что $S_0 \cap S_1 = \varnothing$, причем ν_1 — однозначная нумерация. Если $\mu \leq_p \nu_0 \oplus \nu_1$, то $\mu \equiv_p \mu_0 \oplus \mu_1$, причем $\mu_0 \leq_p \nu_0$ и $\mu_1 \leq_m \nu_1$.*

Доказательство. Пусть $\mu \leq_p \nu_0 \oplus \nu_1$ посредством ОРФ f и $D_{f(y)}=\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Если нашлось $\alpha_i \in D_{f(y)}$ такое, что $D_{\alpha_i}=\{y\}$, $\mu(x)=(\mu_0 \oplus \mu_1)(y)$, то и полагаем $D_{g(x)}=\{\gamma\}$, где $D_\gamma=\{y/2\}$, если y четное число, и относим его к множеству R_0. Если y нечетное число, то полагаем $h(x)=y$ и относим его к множеству R_1. Если же такого $\alpha_i \in D_{f(y)}$ не нашлось, то заведомо $\mu(x) \in R_0$. Поэтому, пусть $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_s$ $(s \leq k)$ — все те числа $\alpha_i (i \leq k)$, что выполнено условие $x \in \beta_j$, то x четное число, и при этом окажется, что $D_{\beta_i}=\{2y_0, 2y_0, ..., 2y_t\}$ $(t \leq s)$, то полагаем $D_{\gamma_i}=\{y_0, y_0, ..., y_t\}$, и $D_{g(x)}=\{\gamma_0, \gamma_0, ..., \gamma_s\}$ а число x относим к R_0.

Понятно, что R_0 и R_1 рекурсивные множества, и, предполагая их бесконечность, пусть $\{a_i\}_{i\in N}$ и $\{b_j\}_{j\in N}$ — прямые пересчеты множеств R_0 и R_1. Определим теперь две нумерации μ_0 и μ_1 так: $\mu_0(n)=\nu_0(a_n)$ и $\mu_1(n)=\nu_1(b_n)$. Понятно, что $\mu_1 \leq_m \nu_1$ посредством ОРФ $\tilde{h}(n)=h(b_n)$, а $\mu_0 \leq_m \nu_1$ посредством ОРФ $\tilde{g}(n)=g(a_n)$. Очевидно также, что нумерация $\mu_0 \oplus \mu_1$ удовлетворяет заключению леммы. Если же, скажем, $R_0=\{a_0, a_1, a_{m-1}\}$, то тогда пусть $\tilde{g}(n)=g(a_n)$, где $p \equiv n \pmod m$. □

Пусть R — РПМ отлично от $\varnothing$ и N. Определим нумерацию ν_R следующим образом:

$$\nu_R(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x \in R; \\ \varnothing, \text{ если } x \notin R. \end{cases}$$

Понятно, что ν_R — вычислимая нумерация множества $\{\{0\}, \varnothing\}$.

Лемма 3. *Для любых РПМ A и B: $\nu_B \leq_p \nu_A \leftrightarrow B \leq_p A$*

Доказательство. Необходимость утверждения леммы непосредственно следует из самого определения p-сводимости. Обратно, пусть $B \leq_p A$ посредством ОРФ f, a и b — фиксированные элементы из A и $\bar{A}$. Если $D_{f(y)}=\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k\}$, то $x \in B \leftrightarrow D_{\alpha_i} \subseteq \bar{A}$ для подходящего i $(0 \leq i \leq k)$. Но возможно, что $x \in B$ и $D_{\alpha_j} \subseteq A$ для некоторого $j(0 \leq j \leq k)$. Поэтому нельзя утверждать, что $\nu_B \leq_p \nu_A$ посредством ОРФ f. Исправляя эту погрешность, пусть $D_{\beta_i}=D_{\alpha_i} \cup \{a\}$ и для каждого множества $\{a_1, a_2, a_k, b\}$ такого, что $D_{\alpha_i} \in \alpha$ определим $D_\gamma=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, b\}$ Но число таких множеств в точности m и равно произведению мощностей множеств $D_{\alpha_0}, D_{\alpha_1}, ..., D_{\alpha_k}$, т.е. $\gamma=\gamma(s)(1 \leq s \leq m)$. Теперь положим $D_{f(y)}=\{\beta_1, \beta_k, \gamma_l, ..., \gamma_s\}$.

Проверим, что $\nu_B \leq_p \nu_A$ посредством ОРФ g. Если $\nu(x)=\{0\}$, то $D_{\alpha_i} \subseteq \bar{A}$ для подходящего i $(0 \leq i \leq k)$. А это значит, что и $D_{\beta_i} \subseteq \bar{A}$. Но $D_{\beta_j} \cap \bar{A} \neq \varnothing$, т.к. $a \in D_{\beta_i}$ $(0 \leq j \leq k)$. С другой стороны, в каждом D_{γ_s} окажется элемент из D_{α_i} и опять $D_{\gamma_s} \cap \bar{A} \neq \varnothing$. Если же $\nu(x) \neq \varnothing$, то в каждом D_{α_i}, значит и в каждом D_{β_i}, есть элемент из $\bar{A}$. По этой же причине, существует множество $\{a_1, ..., a_k\}$, как выше, содержащееся в $\bar{A}$. Поэтому, $D_{\gamma_s} \subseteq \bar{A}$ для подходящего $s(0 \leq s \leq m)$. □

В предложениях ниже, ряд утверждений о верхней полурешетке $L_p^0(S)$ вычислимых нумераций семейства РПМ S можно перенести на случай верхней полурешетки $L_p(S)$ p-степеней вычислимых нумераций семейства РПМ S. Вот некоторые из них.

Предложение 1. *Верхняя полурешетка $L_p(S)$*

a) не является решеткой;

b) не является дистрибутивной полурешеткой.

Доказательство. (a) Так как не является решеткой [3], то пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — две рекурсивно перечислимые p-степени, не имеющие точной нижней грани, $A \in \mathbf{a}$, $B \in \mathbf{b}$, $\nu_0=\nu_A \oplus \varepsilon$, $\nu_1=\nu_B \oplus \varepsilon$, μ — нумерация РПМ R такая, $\mu \leq \nu_0$ что и $\mu \leq \nu_1$.

Согласно лемме 1, найдутся нумерации μ_0 и μ_1 семейств $\{\{0\}, \varnothing\}$ и $S/\{\{0\}, \varnothing\}$ такие, что $\mu=\mu_0\oplus\mu_1$, $\mu_0 \le \nu_0$ и $\mu_1 \le \nu_1$. Тогда, $\mu_1=\varepsilon$ и μ_0 имеет вид μ_C некоторого РПМ C, т.е. $\mu=\mu_C\oplus\varepsilon$. Согласно лемме 2, $\mu_C \le \nu_A$ и $\mu_C \le \nu_B$. По лемме 3, $C\le_p A$ и $C\le_p B$, а по выбору РПМ A и B, существует РПМ D такое, что $D\le_p A$, $D\le_p B$ и $C<_p D$. Тогда, $\nu_D\oplus\varepsilon\le\nu_0$, $\nu_D\oplus\varepsilon\le\nu_1$ и $\mu<\nu_D\oplus\varepsilon$. Итак, p-степень нумерации μ не является точной нижней гранью p-степеней ν_0 и ν_1, т.е. L_p^0 (S) не является нижней полурешеткой.

(b) Так как P не является дистрибутивной полурешеткой [3], то пусть **a**, **b** и **c** такие p-степени, что $\mathbf{c}\le\mathbf{a}\oplus\mathbf{b}$, но не существует таких p-степеней $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$, что $\mathbf{c}=\mathbf{c}_0\oplus\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_0<\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}_1\le\mathbf{b}$. Пусть $A\in\mathbf{a}$, $B\in\mathbf{b}$, $C\in\mathbf{c}$, $\nu_0=\nu_A\oplus\varepsilon$, $\nu_1=\nu_B\oplus\varepsilon$, $\nu=\nu_0\oplus\nu_1$, $\mu=\nu_C\oplus\varepsilon$ и $\mu\le\nu_0\oplus\nu_1$.

Предположим, что $\mu=\mu_0\oplus\mu_1$, $\mu_0\le\nu_0$ и $\mu_1\le\nu_1$. По лемме 2 $\mu_0=\nu_D\oplus\varepsilon$ и $\mu_1=\nu_D\oplus\varepsilon$ для подходящих РПМ D и E. По лемме 3 $D\le_p A$ и $E\le_p B$. Но $\mu\equiv_m(\nu_D\oplus\nu_E)\oplus\varepsilon$, т.к.

$\mu\le_m(\nu_D\oplus\nu_E)\oplus\varepsilon$ посредством ОРФ f:

$$f(4x)=(4x); f(4x+2)=4x+1; f(2x+1)=4x+2=4x+3$$

и

$(\nu_D\oplus\nu_E)\oplus\varepsilon\le_m\mu$ посредством ОРФ g:

$$g(4x)=(4x); g(4x+1)=4x+2; g(4x+2)=g(4x+3)=2x+1.$$

Отсюда следует, что $C=_m D\oplus E$. Аналогично, $\nu_0\oplus\nu_1\equiv_m(\nu_A\oplus\nu_B)\oplus\varepsilon$, а т.к. $\mu\le\nu_0\oplus\nu_1$, то $C\le_m A\oplus B$. Это противоречит свойствам РПМ A, B и C. □

Предложение 2. Если $\mathbf{a}\in L_p^0$ (S) — *минимальная p-степень, содержащая однозначную нумерацию, то в* L_p^0 (S) *истинны следующие предложения*:

$$(\exists\,\mathbf{b})(a<b\,\&\,(\forall c)(a\le c\le b\to c=b));$$

$$(\forall b)(a<b\to(\exists\,c)(a<c<b)).$$

Доказательство. Вместо степеней будем иметь дело с их представителями.

(a) Пусть B имеет минимальную p-степень в L_p^0 (S) [3] и ε — однозначная вычислимая нумерация $S/\{\{0\}, \varnothing\}$ (такие нумерации существуют [1]). Если $\mu\equiv_m\nu_B\oplus\varepsilon$, где $\varepsilon(x)=\nu(x+2)$, $\nu\le\mu$ то, что очевидно, но $\mu\not\le\nu$, т.к. B нерекурсивное РПМ. Предположим, что $\nu\le\nu_0\le\mu$. По лемме 2 $\nu_0=\nu_A\oplus\varepsilon$ для подходящего РПМ A. По лемме 3 $A\le_p B$ и, поэтому, A рекурсивное множество или $A\equiv_p B$. В первом случае $\nu_A\oplus\varepsilon\equiv_m\nu$, а во втором — $\nu_A=\nu$.

(b) Пусть нерекурсивное РПМ B такое, что под p-степенью B нет минимальных p-степеней [3], $\mu=\nu_B\oplus\varepsilon$ и $\nu<\nu_B\le\mu$. По леммам 2 и 3 $\nu_0=\nu_A\oplus\varepsilon$, причем A нерекурсивное РПМ и $A\equiv_p B$. По выбору РПМ B, найдется нерекурсивное РПМ C такое, что $C\equiv_p B$. Но тогда $\nu<\nu_C\oplus\varepsilon<\mu$. □

Перейдем теперь к p-сводимости вычислимых нумераций семейства $F=\{\varnothing\{0\}, \{1\}, \ldots\}$, обозначая через $L(F)$ верхнюю решетку p-степеней таких нумераций. Интерес к ним связан с возможностью отождествить эту нумерацию с ЧРФ α так:

$$\alpha(x)=\begin{cases} n, \text{ если } \nu(x)=\{n\}; \\ \varnothing, \text{ если } \nu(x)=\varnothing. \end{cases}$$

Поэтому на $L(F)$ можно смотреть как на верхнюю полурешетку p-степеней ЧРФ, которые определены хотя бы в одной точке с областью значения равной N [4].

Прежде всего отметим, что $L(F)$ имеет наименьший элемент **0**, который состоит из всех ЧРФ, указанных выше, с рекурсивными областями определения. Поэтому минимальными элементами $\mathbf{a}\in L(F)$ называют такие, что

$$0<\mathbf{a}\&(\forall\mathbf{b})(0<\mathbf{b}\leq\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{a}).$$

Такие степени существуют. Действительно, пусть ЧРФ α такова, что $x\neq y\rightarrow \alpha(x)\neq\alpha(y)$, причем значения $\alpha(x)$ и $\alpha(y)$ определены. В [5] доказано, что ЧРФ α имеет минимальную m-степень тогда и только тогда, когда область определения D_α обладает следующим свойством: D_α нерекурсивно и для любого РПМ B такого, что $D_\alpha\subseteq B$ и B/D_α не является РПМ, существует рекурсивное множество R, для которого $D_\alpha\subseteq R\subseteq B$. В то же время нетрудно показать, что $\beta\leq_p\alpha\rightarrow\beta\leq_m\alpha$. В частности, p-степень ЧРФ α состоит из одной m-степени. Полурешетка $L(F)$ также содержит наибольший элемент **1** — p-степень универсальной ЧРФ φ в следующем смысле: $\beta\leq_m\varphi$ для любой ЧРФ β. Такие универсальные ЧРФ существуют, например, $\varphi\langle\langle x,\ y\rangle\rangle=\varphi_x(y)$ где φ_x — одноместная ЧРФ с клиниевским номером x.

Следующие предложения являются аналогами предложений 1 и 2. Надо лишь в формулировке предложения 2 заменить **a** на **0**, а в доказательствах положить $\varepsilon(x)=x+1$, а вместо ν_R взять ЧРФ

$$\nu_R(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\in R;\\ \uparrow, \text{ если } x\notin R.\end{cases}$$

Предложение 3. *Верхняя полурешетка $L(F)$ не является нижней и дистрибутивной полурешеткой.*

Предложение 4. *В $L(F)$ истинны следующие предложения:*

$$(\exists\,\mathbf{b})(a<b\&(\forall c)(a\leq c\leq b\rightarrow c=b));$$

$$(\forall b)(a<b\rightarrow(\exists\,c)(a<c<b)).$$

Открытым остается следующий вопрос: верно ли в $L^0_p(S)$ предложение

$$(\exists\mathbf{a})(\exists\mathbf{b})((\mathbf{a}\not\leq\mathbf{b}\&\mathbf{b}\not\leq\mathbf{a})\&\mathbf{a}\oplus\mathbf{b}=\mathbf{1})?$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. М.: «Наука», 1977.

2. Дегтев А.Н. О сводимостях нумераций // Математический сборник. 1980. Т. 112. № 2. С. 207-219.

3. Дегтев А.Н. О *tt-n* *m*-степенях // Алгебра и логика, 1973. Т. 12. № 2. С. 143-161.

4. Дегтев А.Н. Сакунова Е.С. О сводимостях частично рекурсивных функций // Сиб. Мат. Ж. 2000. Т. 41. № 6. С. 1345-1349.

5. Дегтев А.Н. Сводимость частично рекурсивных функций // Сибирский математический журнал, 1977. Т. 18. № 4. С. 765-774.