Егор Николаевич ГОРЕЧИН —
аспирант кафедры алгебры и математической логики
Института математики и компьютерных наук

Владимир Николаевич КУТРУНОВ —
зав. кафедрой алгебры и математической логики
Института математики и компьютерных наук,
доктор физико-математических наук, профессор

Тюменский государственный униерситет

УДК 517.53.

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАТЕРНИОННОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

АННОТАЦИЯ. Показано, что интегральный оператор типа Коши инволютивен в четырехмерном пространстве. Изучены спектральные свойства интегральных кватернионных операторов, связанных с интегралом типа Коши.

It is shown, that the integral operator type of Cauchy involutes in four-dimensional space. Spectral properties integral quaternionic operators, connected with integral type of Cauchy, are studied.

Определение 1. Кватернионами называются числа вида $z=a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — действительные числа, а i, j, k — мнимые единицы, которые обладают свойствами

$$\begin{array}{lll} i^2=-1, & j^2=-1, & k^2=-1, \\ ij=k, & jk=i, & ik=-j, \\ ji=-k, & kj=-i, & ki=j. \end{array} \tag{1}$$

Действия над кватернионами определяются через действия над мнимыми единицами. Если ввести в четырехмерном пространстве аналог векторного произведения с использованием мнимых единиц, то операция умножения может быть записана в виде скалярного и векторного произведения в виде:

$ab=(a_0+\vec{a})(b_0+\vec{b})=a_0b_0-\vec{a}\bullet\vec{b}+a_0\vec{b}+b_0\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}$. Произведение кватернионов некоммутативно, верен сочетательный закон.

Пусть $z(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — произвольная кватернионная функция. Введем в рассмотрение дифференциальный оператор Гамильтона: $\nabla=\sum_{i=0}^{3} e_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ и сопряженный ему оператор $\bar{\nabla}=\sum_{i=0}^{3}\bar{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, которые порождают четырехмерный оператор Лапласа $\Delta=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, т.е. $\bar{\nabla}\nabla=\bar{\nabla}\nabla=\Delta$

Определение 2. Функцию z назовем кватернионной аналитической (К-аналитической) функцией, если она удовлетворяет соотношению $\nabla z=0$.

Пусть S — замкнутая кусочно-ляпуновская поверхность, D^+ — внутренняя область, ограниченная поверхностью S, D^- — внешняя область, n — нормальный вектор к поверхности S.

Теорема 1. Пусть z, q — произвольные, дифференцируемые в D^+ кватернионные функции четырех переменных, n — кватернион вида $n(x)=\cos(n, e_i)e_i$, $\cos(n, e_i) i=0...3$, тогда имеет место равенство

$$\int_S z(x)n(x)q(x)d_x S = \int_{D^+} z(x)\nabla q(x)d_x D^+ + \int_{D^+} \overline{\overline{q}(x)\,\overline{\nabla}\,\overline{z}(x)}\, d_x D^+ \qquad (2)$$

(черта обозначает операцию сопряжения (перед мнимыми единицами знак меняется на противоположный)). Теорема доказывается с помощью формулы Остроградского, связывающей поверхностный и криволинейный интегралы.

Введем обозначение $h=\overline{\nabla}_x \frac{1}{|r|^2}$, где $|r|=|x-y|$, $x, y \in D$.

Теорема 2. Пусть $q(x)$ $(x\in D^+)$ — произвольный кватернион, непрерывный вплоть до границы и имеющий в D^+ ограниченные производные. Тогда

$$\int_S \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2} nq(x)d_x S - \int_{D^+} \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2}\nabla q(x)d_x D^+ = \begin{cases} 0, & y\in D^- \\ 4\pi^2 q(y), & y\in D^+ \end{cases}. \qquad (3)$$

Данная теорема доказывается подстановкой в равенство (2) кватерниона z=h. Если точка $y \in D^+$, то необходимо выбросить из области D^+ окрестность точки y радиуса ε, записать равенство (2) и устремить ε к нулю. Следует учесть,

$\Delta_x \frac{1}{|x-y|^2} = 0$ всюду, за исключением точки $x=y$.

Теорема 3. Пусть q(x) $(x \in D^-)$ — произвольный кватернион, непрерывный вплоть до границы и имеющий в D^- ограниченные производные и исчезающий на бесконечности, т.е. $\lim\limits_{|x|\to\infty} q(x)=0$. Тогда имеет место равенство

$$-\int_S \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2} nq(x)d_x S - \int_{D^-} \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2}\nabla q(x)d_x D^+ = \begin{cases} 0, & y\in D^+ \\ 4\pi^2 q(y), & y\in D^- \end{cases}. \qquad (4)$$

Теорема 4 (аналог интеграла Гаусса в поле кватернионов в четырехмерном случае). Для кусочно-ляпуновской поверхности имеет место кватернионная формула

$$I(y)=\int_S \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2} n d_x S = \begin{cases} 0, & y\in D^- \\ \omega, & y\in S \\ 4\pi^2, & y\in D^+ \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\overline{\nabla}$, n — кватернионы, перемножаемые в смысле кватернионов, в случае $y \in S$ интеграл понимается в смысле главного значения, ω — телесный угол, под которым видна внутренность области D^+ из точки y.

Если $y \in S$ и в окрестности этой точки поверхность S гладкая, то $\omega=2\pi^2$ [2].

Определение 3. Аналогом потенциала двойного слоя (или аналогом интеграла Коши) в четырехмерном случае называется интеграл

$$Q(y)=\int_S \overline{\nabla}\frac{1}{|r|^2} nq(x)d_x S, \quad y\in D^{\pm}. \qquad (6)$$

Здесь q(x) — произвольный кватернион, и если $y \in S$, то интеграл является сингулярным.

Отметим, что если в равенстве (5) выделить отдельно действительную и мнимую части, то действительная часть приводит к

$$\int_S [\nabla_0 \frac{1}{|r|^2} n_0 + \vec{\nabla} \frac{1}{|r|^2} \cdot \vec{n}] d_x S = \int_S n_x \cdot \nabla \frac{1}{|r|^2} d_x S = \begin{cases} 4\pi,^2 & y \in D^+ \\ 2\pi^2, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases},$$

а мнимая часть к равенству

$$\int_S [\nabla_0 \frac{1}{|r|^2} \vec{n} - \vec{\nabla}_0 \frac{1}{|r|^2} n_0 - \vec{\nabla} \frac{1}{|r|^2} \times n] d_x S = \begin{cases} 0, & y \in D^+ \\ 0, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases}.$$

Последний интеграл непрерывен при переходе через границу, а прямое его значение является сингулярным. Первый же интеграл, напротив, при переходе через границу терпит разрыв, а на границе в случае ляпуновской поверхности, является несобственным интегралом.

Теорема 5. Пусть $q(y)$, $y \in D^+$, К — аналитическая функция и S — поверхность Ляпунова, тогда имеет место представление:

$$\int_S \bar{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n q(x) d_x S = \begin{cases} 0, y \in D^- \\ 2\pi^2 q(y), y \in S \\ 4\pi^2 q(y), y \in D^+ \end{cases}. \tag{7}$$

Теорема 6. Пусть $q(y)$, $y \in D^-$, К — аналитическая функция, исчезающая на бесконечности и S — поверхность Ляпунова, тогда имеет место представление:

$$\int_S \bar{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n q(x) d_x S = \begin{cases} -4\pi^2 q(y), y \in D^- \\ -2\pi^2 q(y), y \in S \\ 0, y \in D^+ \end{cases}, \tag{8}$$

где n, q, $\bar{\nabla}$ — кватернионы, $n = \cos(n, e_i) e_i$, где $\cos(n, e_i)$ — направляющие косинусы нормали в точке $x \in S$, внешней по отношению к области D^+, $r = |x - y|$, оператор $\bar{\nabla}$ действует на переменную x.

Отметим, что для $y \in S$ интегралы в последних теоремах понимаются в смысле главного значения по Коши. Для существования таких интегралов на функцию $q(y)$ накладывается дополнительное ограничение, она должна удовлетворять условию Гельдера. Формулы (7) и (8) позволяют представить К-аналитические функции, заданные в области D^+ или D^- через их граничные значения:

$$q(y) = \pm \frac{1}{4\pi^2} \int_S \bar{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n q(x) d_X S, \quad y \in D^{\pm}.$$

Здесь q(x) — предельное граничное значение К-аналитической функции $q(y)$, заданной в области D^+ или D^-. По своему смыслу этот интеграл аналогичен интегралу Коши представления аналитической функции $q(y)$, $y \in D^{\pm}$ через ее граничное значение $q(x)$, $x \in S$ в теории функций комплексного переменного. Однако он более сложен из-за того, что в нем использованы кватернионы и кватернионные операции умножения.

Теорема 7. Пусть $q(x)$, $x \in S$ произвольный кватернион, ограниченный и интегрируемый на S, тогда кватернион $Q(y)$, $y \notin S$, вычисляемый по формуле (6), является кватернионной аналитической функцией как в области D^+, так и в области D^-.

Кроме того, если граница S является ляпуновской поверхностью, и на ней функция $q(x)$ удовлетворяет условию Гельдера, то предельные граничные значения $Q^{\pm}$ выражаются через прямое значение интеграла типа Коши:

$$Q^{\pm}(y) = \pm 2\pi^2 q(y) + \int_S \overline{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n q(x) d_x S, \quad y \in S. \tag{9}$$

Интеграл, входящий в это равенство, называется прямым значением интеграла типа Коши и является сингулярным. При указанных в теореме условиях он существует только в смысле главного значения по Коши.

Предельные граничные значения $Q^{\pm}(y)$, будучи граничными значениями К-аналитической функции, должны удовлетворять соотношениям:

$$\int_S \overline{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n Q^+(x) d_x S = 2\pi^2 Q^+(y), y \in S, \tag{10}$$

$$\int_S \overline{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n Q^-(x) d_x S = -2\pi^2 Q^-(y), y \in S \tag{11}$$

и, учитывая вид оператора A

$$Aq = \frac{1}{2\pi^2} \int_S \overline{\nabla} \frac{1}{|r|^2} n q(x) d_x S, \tag{12}$$

формулы (10) и (11) запишем в виде

$$AQ^+ = Q^+, \quad AQ^- = -Q^-. \tag{13}$$

С помощью оператора A граничные значения $Q^{\pm}$, вычисляемые по формуле (9), запишем в виде

$$Q^{\pm} = \pm 2\pi^2 q + 2\pi^2 Aq.$$

Подставляя эти значения в граничный интеграл Коши (7) или (8) (средняя формула) и проводя необходимые сокращения, получим

$$A^2 q = q. \tag{14}$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 8. Пусть S — ляпуновская поверхность и $q(x)$ — произвольный кватернион, удовлетворяющий условию Гельдера на поверхности S, тогда отображение, задаваемое интегральным оператором A (12), является отображением инволюции, т.е. на этом множестве выполняется

$$A^2 \equiv I. \tag{15}$$

Равенство (14) — это фундаментальное тождество кватернионной теории потенциала. Следует отметить также, что интегральный оператор A можно рассматривать как оператор, переводящий четырехмерный вектор с компонентами, являющимися компонентами кватерниона в новый четырехмерный вектор.

Если обозначить $Ap=q$, то из (14) получается пара преобразований:

$$Aq=p,\ Ap=q. \tag{16}$$

Пусть p_0, p, q_0, q — действительные и мнимые части кватернионов p и q. Пользуясь векторно-скалярной интерпретацией умножения кватернионов и разделением мнимой и действительной частей, можно перейти к векторной форме записи соотношений (16).

Введем операторы

$$\begin{aligned}
Bp_0 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_S \nabla\,\frac{1}{|r|^2}\cdot np_0 d_x S,\\
Cp_0 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_S [\nabla_0 \frac{1}{|r|^2}\vec{n} - \vec{\nabla}\frac{1}{|r|^2}n_0 - \vec{\nabla}\frac{1}{|r|^2}\times n]p_0 d_x S,\\
Fp &= \frac{1}{2\pi^2}\int_S \left(\nabla_0 \frac{1}{|r|^2}\vec{n} - \vec{\nabla}\,\frac{1}{|r|^2}n_0 - \vec{\nabla}\frac{1}{|r|^2}\times\vec{n}\right)\cdot pd_x S,\\
Dp &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_S (\nabla_0\frac{1}{|r|^2}n_0 + \vec{\nabla}_0\frac{1}{|r|^2}\cdot\vec{n})p + (\nabla_0\frac{1}{|r|^2}\vec{n} - \vec{\nabla}\frac{1}{|r|^2}n_0 - \vec{\nabla}\frac{1}{|r|^2}\times n)\times pd_x S.
\end{aligned} \tag{17}$$

Тогда равенства (16) примут вид

$$\begin{aligned} Bp_0 - Fp &= q_0,\\ Cp_0 - Dp &= q, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Bq_0 - Fq &= p_0,\\ Cq_0 - Dq &= p, \end{aligned} \tag{19}$$

Подставим q и q_0 из (18) в (19)

$$\begin{aligned} B[Bp_0 - Fp] - F(Cp_0 - Dp) &= p_0,\\ C[Bp_0 - Fp] - D(Cp_0 - Dp) &= p. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть p — произвольный кватернион. Тогда произвольны его скалярная и векторная части. Полагая равными нулю последовательно действительную и мнимую части кватерниона p, получим

$$\begin{cases} B^2 p_0 - FCp_0 = p_0\\ CBp_0 - DCp_0 = 0 \end{cases}, \tag{21}$$

$$\begin{cases} -BFp + FDp = 0\\ -CFp + D^2 p = p \end{cases}. \tag{22}$$

Получены интегральные тождества для скалярной функции p_0 (21) и векторной функции p (22), которые могут быть полезными для различных теоретических исследований. Конечно, эти тождества являются векторным представлением кватернионного тождества (14).

Исследуем спектры операторов, входящих в тождества (21) и (22). Оператор B известен как потенциал двойного слоя.

Теорема 9. За исключением точек $\lambda=\pm 1$, спектры операторов B и D совпадают, собственные числа имеют одинаковую кратность, а собственные функции взаимно выражаются с помощью квадратур.

Доказательство. Известно, что спектр оператора потенциала двойного слоя B дискретен, собственные числа $\{\lambda\}$ имеют конечную кратность, могут сгущаться к точке $\lambda=0$, $\{\lambda\}\in(-1;1]$, $[1, 2]$. Покажем, что если исключить $\lambda=\pm 1$, то спектры операторов B и D тождественно совпадут.

Пусть $Bp=\lambda p$ и $\lambda\neq 1$. Обозначим $Cp=\psi$. Подставляя в тождества (21) вместо p_0 величину p и учитывая введенные обозначения, найдем:

$$D\psi=\lambda\psi,\ F\psi=(\lambda^2-1)p.$$

Следовательно, собственные числа оператора B являются собственными числами оператора D. Всякой собственной функции p оператора B соответствует собственная функция ψ оператора D, и они взаимно пересчитываются с помощью операторов C и F. То есть имеем цепочку равенств:

$$\begin{gathered} Bp=\lambda p,\\ Cp=\psi,\\ D\psi=\lambda\psi,\\ F\psi=(\lambda^2-1)p. \end{gathered} \tag{23}$$

Используя тождества (22), аналогично доказывается обратное утверждение. Всякой собственной функции оператора D соответствует собственная функция оператора B. Цепочка равенств типа (23) получается из равенств (22), если предположить, что изучаются функции χ и числа β, удовлетворяющие равенству $D\chi=\beta\chi$. Из взаимно однозначного соответствия собственных функций операторов B и D следует равная конечная кратность собственных чисел этих операторов и наличие одной возможной точки сгущения $\lambda=0$. Следовательно, доказано совпадение спектров операторов B, D и возможность взаимного пересчета собственных функций.

Заметим также, что цепочка пересчета позволяет сделать некоторые выводы о спектре операторов, получающихся суперпозицией операторов, непосредственно участвующих в этом пересчете. Действительно, из второго и четвертого равенств цепочки следует:

$$\begin{gathered} FCp=(\lambda^2-1)p,\\ CFp=(\lambda^2-1)p. \end{gathered} \tag{24}$$

То есть собственные числа операторов FC, CF совпадают, а собственные функции р, ψ являются собственными функциями соответственно операторов B, D. Отметим также, что спектры этих операторов расположены на интервале $(-1, 0)$. Из рассмотрения исключен пока случай $\lambda^2-1=0$, получающийся для $\lambda=\pm 1$.

Теорема 10. Точки $\lambda=\pm 1$ являются точками непрерывного спектра оператора бесконечной кратности.

Доказательство. По определению число λ будет точкой непрерывного спектра оператора D, если найдется некомпактная последовательность p_n, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(D-\lambda I)p_n=0$ [3]. Пусть такая последовательность уже найдена. Подставляя ее в тождества (22) и переходя к пределу, найдем

$$\lim_{n\to\infty}(BFp_n-\lambda Fp_n)=0;\qquad \lim_{n\to\infty}\left[CFp_n+\left(1-\lambda^2\right)p_n\right]=0.$$

Так как оператор B, являющийся оператором потенциала двойного слоя, не имеет точек непрерывного спектра, то из первого равенства следует, что либо последовательность Fp компактна, либо все ее элементы нулевые. Тогда из второго равенства следует два случая.

Случай 1: Cp_n сходится, причем из-за некомпактности последовательности p_n эта сходимость возможна только к нулю, и в этом случае $\lambda=\pm1$.

Случай 2: $Cp_n\equiv0$ для любого n, и приходим к предыдущему выводу. Следовательно, можно предполагать, что только в двух дискретных точках $\lambda=\pm1$ спектр может оказаться непрерывным.

Для доказательства, во-первых, отметим, что эти точки не могут быть точками сгущения дискретного спектра. Действительно, дискретный спектр оператора D совпадает с дискретным спектром оператора B, а у последнего точкой сгущения может быть только точка 0. Остается показать, что эти точки являются точками спектра оператора D бесконечной кратности. Действительно, введем в рассмотрение кватернион $p=\varphi_0+\psi$, где $\varphi_0=0, \psi=\nabla w$, w — произвольная гармоническая функция в области D^+ или D^-, а ∇ — кватернионный оператор Гамильтона. Кватернионные вычисления дают, что $\bar{\nabla}p=0$. Отсюда следует, что кватернион p — К-аналитическая функция в области гармоничности функции w. Ранее было показано, что в зависимости от принадлежности функции к области D^+ или D^- для граничных значений К-аналитической функции p верно равенство $Ap=\pm p$ (аналог интеграла Коши для кватернионных аналитических функций).

Если раскрыть это кватернионное равенство, воспользовавшись представлением оператора А через операторы B, C, F, D, раскрытие приводит к следующему результату: $A\varphi=-D\psi+F\psi=\pm\psi$. Отделяя действительную и мнимую части, получим $D\psi=\pm\psi$, $F\psi=0$. Следовательно, точки $\lambda=\pm1$ являются собственными числами оператора D, а из произвольности гармонической функции w следует, что функций $\psi=\nabla w$ будет бесконечно много. Таким образом, оператор D имеет три точки непрерывного спектра: одна точка сгущения спектра $\lambda=0$, общая с оператором В потенциала двойного слоя, и две точки бесконечной кратности $\lambda=\pm1$. Собственными функциями оператора D будут, в частности, предельные граничные значения градиентов гармонических функций w: $\psi=\nabla w$. Для конечной области, ограниченной поверхностью S, собственные функции вычисляются по правилу $\psi(x)=\lim\limits_{y\in D^+\to x\in S}\nabla w(y)$, где w — гармоническая функция в области D^+. Аналогичное утверждение имеет место для области D^-.

Эта теорема позволяет дополнить информацию о спектрах суперпозиций операторов CF и FC. Действительно, если ψ — граничное значение градиента произвольной гармонической функции, то оно является собственной функцией оператора D, следовательно, $\lambda=\pm1$ и $CF\psi=0$, и оператор CF имеет точку 0 точкой спектра бесконечной кратности. У оператора FC точка 0 является точкой спектра кратности 1, так как оператор потенциала двойного слоя имеет эту точку собственным числом кратности 1. Соответствующая собственная функция оператора B является константой.

Таким образом, кватернионное тождество $A^2q=q$, записанное в координатной форме в виде тождеств (21), (22), позволило детально изучить спектр оператора D. Исходя из спектральных свойств операторов, можно заключить, что суперпозиция CF не является вполне непрерывным оператором, так как его спектр содержит одну точку бесконечной кратности, а оператор FC является вполне непрерывным, так как его спектр является дискретным и конечной кратности. Этот вывод следует из кватернионных тождеств (21)-(22): суперпозиция FC может быть заменена на суперпозицию, содержащую вполне непрерывный оператор B.

Замечание. Перечисленные результаты для трехмерного пространства были получены ранее в работе [5], а для пространства двух измерений в работе [6]. Подробный обзор этих работ можно найти в работе [7].

Отличие в доказательствах начинается с введения функции $h = \overline{\nabla}_x \dfrac{1}{|r|^2}$. В двумерном и трехмерном случае в этом нет необходимости, так как в них дифференциальный оператор не содержит действительной части. Тождества (21) и (22) внешне похожи на тождества, полученные ранее, но по существу они являются новыми и нуждаются в тщательном изучении. Новыми являются и спектральные свойства интегральных операторов B, C, D, F, действующих на трехмерных многообразиях в четырехмерном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Л.: Физматгиз, 1962.

2. Михлин С.Г. Курс математической физики. М: Наука, 1968. 575 с

3. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. С. 339.

4. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М: Наука, 1973. 144 с.

5. Кутрунов В.Н. Спектральная регуляризация интегральных уравнений упругости: Т. 2. ПММ, 1992. С. 348-350.

6. Кутрунов В.Н. Симметрия спектра потенциала двойного слоя // Труды средневолжского математического общества. 1999. Т. 2. № 1. С. 57-65.

7. Кутрунов В.Н. Кватернионы и некоторые интегральные тождества // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. С. 76-92.

Александр Михайлович ГОРЦЕВ —
декан факультета прикладной математики и кибернетики, зав. кафедрой исследования операций Томского государственного университета, доктор технических наук, профессор

Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
старший преподаватель кафедры информационной безопасности Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, аспирант кафедры исследования операций Томского государственного университета

УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ПОТОКА С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена задача оптимальной оценки состояний дважды стохастического асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий, являющегося математической моделью информационных потоков, функционирующих в телекоммуникационных сетях.