

Замечание. Перечисленные результаты для трехмерного пространства были получены ранее в работе [5], а для пространства двух измерений в работе [6]. Подробный обзор этих работ можно найти в работе [7].

Отличие в доказательствах начинается с введения функции $h = \bar{\nabla}_x \frac{1}{|r|^2}$. В двумерном и трехмерном случае в этом нет необходимости, так как в них дифференциальный оператор не содержит действительной части. Тождества (21) и (22) внешне похожи на тождества, полученные ранее, но по существу они являются новыми и нуждаются в тщательном изучении. Новыми являются и спектральные свойства интегральных операторов В, С, D, F, действующих на трехмерных многообразиях в четырехмерном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Л.: Физматгиз, 1962.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. М: Наука, 1968. 575 с
3. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. С. 339.
4. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М: Наука, 1973. 144 с.
5. Кутрунов В.Н. Спектральная регуляризация интегральных уравнений упругости: Т. 2. ПММ, 1992. С. 348-350.
6. Кутрунов В.Н. Симметрия спектра потенциала двойного слоя // Труды средне-волжского математического общества. 1999. Т. 2. № 1. С. 57-65.
7. Кутрунов В.Н. Кватернионы и некоторые интегральные тождества // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. С. 76-92.

*Александр Михайлович ГОРЦЕВ —
декан факультета прикладной математики
и кибернетики, зав. кафедрой
исследования операций
Томского государственного университета,
доктор технических наук, профессор*

*Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
старший преподаватель кафедры
информационной безопасности
Института математики и компьютерных наук
Тюменского государственного университета,
аспирант кафедры исследования операций
Томского государственного университета*

УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ПОТОКА С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНИХ СОБЫТИЙ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена задача оптимальной оценки состояний дважды стохастического асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий, являющегося математической моделью информационных потоков, функционирующих в телекоммуникационных сетях.

Приведены численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

The optimal evaluation problem of states of asynchronous alternating double stochastic flow with extra event initiation, which appear to be mathematical model of informational flows circulating in telecommunication networks, was considered. The numerical results of experiments used calculation expressions and imitation modeling are given.

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) являются широко распространенной математической моделью реальных физических, технических, экономических, информационных систем и сетей. В свою очередь, случайные потоки событий как основные элементы СМО и СеМО широко применяются в качестве математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в таких системах и сетях. Развитие в последние два десятилетия различного рода сетей связи привело к созданию цифровых сетей интегрального обслуживания (Integrated Service Digital Networks — ISDN), особенностью которых является передача по единым аппаратным средствам разнообразных видов информации (речевых сигналов в цифровой форме, интерактивных данных, видеосигналов и т.п.). Оказалось, что классические математические модели входящих потоков событий являются в той или иной степени непригодными для описания информационных потоков в ISDN. Это привело к построению новых математических моделей входящих потоков событий — дважды стохастических потоков. Одними из первых работ в этом направлении были статьи [1-3]. В [1,2] введены в рассмотрение так называемые МС (Markov chain)-потоки, в [3] — MVP (Markov versatile processes)-потоки. Особенностью моделей МС-потоков является то, что их интенсивность представляет собой кусочно-постоянный процесс с конечным числом состояний. Подклассом МС-потоков являются так называемые асинхронные потоки событий [4] — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий. При определенных ограничениях [5] асинхронные потоки возможно представить в виде моделей МАР (Markovian Arrival Process)-потоков событий [6].

Условия функционирования СМО и СеМО таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно сказать, что они известны, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого во многих случаях сказать нельзя. С другой стороны, режимы функционирования СМО и СеМО непосредственно зависят от интенсивностей входящих потоков событий. Вследствие этого важной задачей является задача оценки в произвольный момент времени состояния интенсивности потока событий по наблюдениям за этим потоком. Одной из первых работ по оценке состояний МС-потоков, по-видимому, является [7], в которой рассматривается асинхронный поток.

В настоящей статье решается задача оптимальной оценки состояний асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних (дополнительных) событий, являющегося разновидностью асинхронного альтернирующего потока [8]. Находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений, и обеспечивающей минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [9].

1. **Постановка задачи.** Рассматривается асинхронный альтернирующий поток с иницированием лишних событий (далее — поток событий), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс с двумя состояниями $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = 0$. В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ . В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = 0$, поток событий отсутствует. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i = 1, 2$. Рассматриваются три варианта иницирования лишних событий: 1) при переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе (из второго в первое) иницируется лишнее событие во втором (в первом) состоянии, т.е. сначала осуществляется переход, а затем иницируется лишнее событие; 2) лишнее событие иницируется только во втором состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе; 3) лишнее событие иницируется только в первом состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое.

Очевидно, что в сделанных предположениях $\lambda(t)$ — марковский процесс. Возможная ситуация показана на рис. 1 для варианта 1.

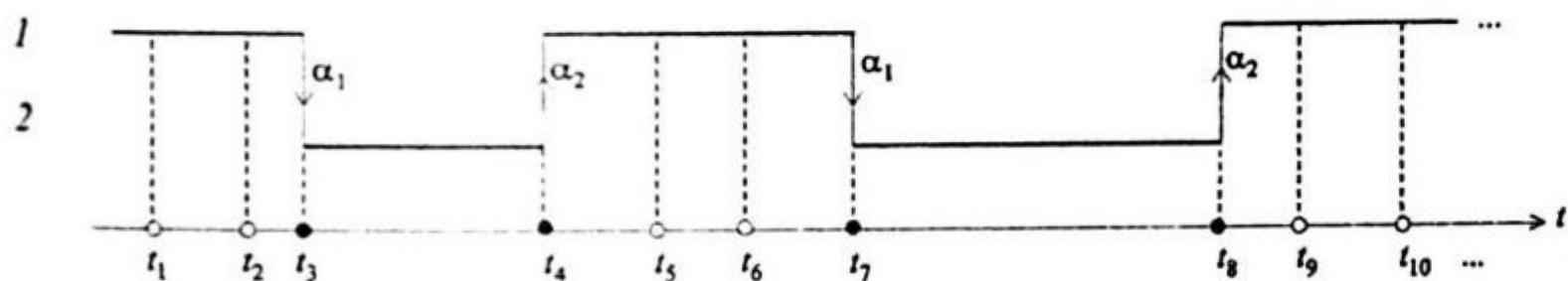


Рис. 1. Асинхронный альтернирующий поток с иницированием лишних событий:
1, 2 — состояния случайного процесса $\lambda(t)$; черные кружки — лишние события, белые кружки — события пуассоновского потока интенсивности λ ;
 t_1, t_2 — моменты наступления событий

Так как процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то различить лишние события и события пуассоновского потока интенсивности λ невозможно. Требуется по наблюдениям моментов наступления событий оценить состояние процесса $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдений. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, т.е. переходными процессами на интервале наблюдений (t_0, t) , где t_0 — начало наблюдений, t — окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (или, что то же самое, о состоянии потока событий) в момент t необходимо определить апостериорную вероятность $w(\lambda | t_1, \dots, t_m)$ того, что в момент t имеем $\lambda(t) = \lambda$ (m — количество наблюдаемых событий за время t), при этом апостериорная вероятность того, что в момент t имеем $\lambda(t) = 0$, очевидно есть $w(0 | t_1, \dots, t_m) = 1 - w(\lambda | t_1, \dots, t_m)$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda | t_1, \dots, t_m) \geq w(0 | t_1, \dots, t_m)$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda$; в противном случае $\hat{\lambda}(t) = 0$.

2. **Оптимальная оценка состояний потока (вариант 1) и численные результаты.** Вывод уравнений для $w(\lambda | t_1, \dots, t_m)$ осуществим, используя известную методику [9]: сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt , а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю. Пусть время меняется дискретно с шагом Δt : $t = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. Введем двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ — значение

процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$); $r_k = r_k(\Delta t) = r(k\Delta t) - r[(k-1)\Delta t]$ — число событий, наблюдаемых на временном интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt , $r_k = 0, 1, \dots$; $r(k\Delta t)$ — число событий, наблюдаемых за время $k\Delta t$, $r(k\Delta t) = 0, 1, \dots$. Обозначим $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ — последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в моменты $k\Delta t$, $k = \overline{0, m}$; $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ — последовательность наблюдаемых событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt , $k = \overline{0, m}$ (значение r_0 можно задавать произвольно, например $r_0 = 0$, так как промежуток $(-\Delta t, 0)$ находится за пределами интервала наблюдения $(0, m\Delta t)$).

Из исходных предпосылок и конструкции процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ следует, что он является марковским. Тогда совместная вероятность $w(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ значений $\lambda^{(m)}$ и \mathbf{r}_m представляется как произведение переходных вероятностей:

$$w(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^m p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}), \quad (1)$$

где $p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ — вероятность перехода процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ в состояние $(\lambda^{(k)}, r_k)$. Аналогично для $m+1$:

$$w(\lambda^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^{m+1} p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}). \quad (2)$$

Из сравнения (1), (2), учитывая, что $w(\lambda^{(i)} | \mathbf{r}_i) w(\lambda^{(i)}, \mathbf{r}_i) = w(\lambda^{(i)}, \mathbf{r}_i) / w(\mathbf{r}_i)$, $i = m, m+1$, находим

$$w(\lambda^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m). \quad (3)$$

Тогда искомая апостериорная вероятность того, что в момент $(m+1)\Delta t$ состояние процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda^{(m+1)}$ ($\lambda^{(m+1)} = \lambda_i$, $i = 1, 2$), запишется в виде

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \sum_{\lambda^{(0)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), после несложных преобразований получаем

$$w(\lambda^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_{m+1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m).$$

Неизвестный множитель $w(\mathbf{r}_m) / w(\mathbf{r}_{m+1})$ находится из условия нормировки:

$$\frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} = \left[\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_{m+1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) \right]^{-1}.$$

Таким образом, получаем рекуррентную формулу для апостериорной вероятности:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_{m+1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_{m+1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (5)$$

В силу исходных предпосылок и конструкции процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ переходная вероятность в (5) примет вид:

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}, r_m) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}). \quad (6)$$

Совершим предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ в (5). Имеем

$$w(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t), \\ w(\lambda^{(m)} | r_m) = w(\lambda^{(m)} | r_m(t)) = w(\lambda^{(m)} | t).$$

Отметим, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ длины Δt в силу ординарности потока событий может произойти либо ноль событий, либо одно событие (осуществление двух и более событий имеет вероятность $o(\Delta t)$).

Рассмотрим вариант, когда на интервале $(t, t + \Delta t)$ нет событий потока. Положим в (5) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 = \lambda$, $r_{m+1} = 0$ и рассмотрим числитель A в (5). Тогда, учитывая (6), получаем

$$A = \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda | \lambda^{(m)}) p(0 | \lambda^{(m)}). \quad (7)$$

Первое слагаемое в (7) для $\lambda^{(m)} = \lambda_1 = \lambda$ приобретает вид:

$$w(\lambda | t) p(\lambda | \lambda) p(0 | \lambda) = w(\lambda | t) e^{-\alpha_1 \Delta t} e^{-\lambda \Delta t} = (1 - \lambda \Delta t - \alpha_1 \Delta t) w(\lambda | t) + o(\Delta t).$$

Второе слагаемое в (7) для $\lambda^{(m)} = \lambda_2 = 0$ соответствует ситуации, когда переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое на интервале $(t, t + \Delta t)$ произошел с вероятностью $p(\lambda | 0) = 1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$, причем $p(0 | 0) = 1$. Однако при этом переходе на интервале $(t, t + \Delta t)$ инициируется в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ лишнее событие. Вследствие этого второе слагаемое не соответствует ситуации отсутствия событий потока на интервале $(t, t + \Delta t)$. Тогда (7) запишется в виде

$$A = (1 - \lambda \Delta t - \alpha_1 \Delta t) w(\lambda | t) + o(\Delta t). \quad (8)$$

Рассмотрим знаменатель B в (5). Тогда, учитывая (6), получаем

$$B = \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(0 | \lambda^{(m)}). \quad (9)$$

Аналогичные рассуждения, что и при выводе (8), приводят (9) к виду

$$B = 1 - \Delta t [(\lambda + \alpha_1) w(\lambda | t) + \alpha_2 w(0 | t)] + o(\Delta t). \quad (10)$$

Подставляя (8), (10) в (5), учитывая при этом, что $B^{-1} = 1 + \Delta t [\cdot] + o(\Delta t)$, $w(0 | t) = 1 - w(\lambda | t)$, находим с точностью до членов $o(\Delta t)$:

$$w(\lambda | t + \Delta t) - w(\lambda | t) = \Delta t (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda | t) [w(\lambda | t) - 1].$$

Деля левую и правую части последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{dw(\lambda | t)}{dt} = (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda | t) [w(\lambda | t) - 1]. \quad (11)$$

Полученное дифференциальное уравнение (11) определяет поведение апостериорной вероятности $w(\lambda | t)$ на полуинтервале $[t_{i-1}, t_i)$, т.е. между моментами наступления событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $w(\lambda | t_i - 0)$, на основе которого, как будет видно ниже, находится апосте-

риорная вероятность $w(\lambda | t_i + 0)$, являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_i, t_{i+1})$.

Рассмотрим теперь вариант, когда на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступило событие потока в момент t_i ($t < t_i < t + \Delta t$). Тогда имеем два смежных интервала (t, t_i) , $(t_i, t + \Delta t)$. Длительность первого: $t_i - t = \Delta t'$, длительность второго: $t + \Delta t - t_i = \Delta t''$. Положим в (5) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 = \lambda$. Тогда учитывая, что $w(\lambda^{(m)} | t) = w(\lambda^{(m)} | t_i - \Delta t')$, получаем

$$A = \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_i - \Delta t') p(\lambda | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}). \quad (12)$$

Первое слагаемое в (12) для $\lambda^{(m)} = \lambda_1 = \lambda$ приобретает вид:

$$w(\lambda^{(m)} | t_i - \Delta t') p(\lambda | \lambda) p(1 | \lambda) = w(\lambda | t_i - \Delta t') e^{-\alpha_1 \Delta t'} (\lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t'}) = \lambda \Delta t w(\lambda | t_i - \Delta t') + o(\Delta t).$$

Второе слагаемое в (12) для $\lambda^{(m)} = \lambda_2 = 0$ также соответствует ситуации, когда на интервале $(t, t_i + \Delta t)$ есть событие потока, так как при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется в первом состоянии лишнее событие. Тогда имеем

$$w(0 | t_i - \Delta t') p(\lambda | 0) p(0 | 0) = w(0 | t_i - \Delta t'') (1 - e^{-\alpha_2 \Delta t'}) = \alpha_2 \Delta t w(0 | t_i - \Delta t') + o(\Delta t).$$

Таким образом, с учетом того, что $w(0 | t_i - \Delta t') = 1 - w(\lambda | t_i - \Delta t')$, (12) примет вид:

$$A = \Delta t [\alpha_2 + (\lambda - \alpha_2) w(\lambda | t_i - \Delta t')] + o(\Delta t). \quad (13)$$

Аналогичные рассуждения приводят к формуле для знаменателя В в (5):

$$B = \Delta t [\alpha_2 + (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda | t_i - \Delta t')] + o(\Delta t). \quad (14)$$

Подставляя (13), (14) в (5), учитывая при этом, что $w(\lambda | r_{m+1}) = w(\lambda | t_i + \Delta t'')$, и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю), находим

$$w(\lambda | t_i + 0) = \frac{\alpha_2 + (\lambda - \alpha_2) w(\lambda | t_i - 0)}{\alpha_2 + (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda | t_i - 0)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Таким образом, в точке t_i (момент наблюдения события) апостериорная вероятность $w(\lambda | t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок).

Решая с учетом (15) уравнение (11), получаем

$$w(\lambda | t) = w(\lambda | t_i + 0) \left\{ w(\lambda | t_i + 0) + [1 - w(\lambda | t_i + 0)] e^{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)} \right\}^{-1}, \quad (16)$$

$$t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

В качестве начального значения $w(\lambda | t_0 + 0) = w(\lambda | t_0 = 0)$ для вычисления $w(\lambda | t)$ на полуинтервале $[t_0, t_1)$ можно выбрать априорную финальную вероятность π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$, которая находится из системы уравнений для априорных финальных вероятностей: $\alpha_1 \pi_1 = \alpha_2 \pi_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$, т.е. $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Формулы (15), (16) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda | t)$ в любой момент времени t :

1) в момент $t_0 = 0$ задается $w(\lambda | t_0 + 0) = \pi_1$;

2) по формуле (16) рассчитывается $w(\lambda | t)$ в любой момент t ($0 \leq t < t_1$), где t_1 — момент наблюдения первого события потока;

3) по формуле (16) рассчитывается $w(\lambda | t)$ в момент t_1 ($w(\lambda | t_1) = w(\lambda | t_1 - 0)$), затем по формуле (15) производится пересчет апостериорной вероятности в точ-

ке $t=t_1$, при этом $w(\lambda|t_1+0)$ является начальным значением для $w(\lambda|t)$ на следующем шаге алгоритма;

4) по формуле (16) рассчитывается $w(\lambda|t)$ для любого t ($t_1 \leq t < t_2$), где t_2 — момент наблюдения второго события потока и т.д.

Подчеркнем, что из (15), (16) следует, что рассматриваемый поток является коррелированным. Для частного случая $\lambda + \alpha_1 = \alpha_2$ можно показать, что поток вырождается в простейший с параметром α_2 .

В силу коррелированности потока получить формулу для безусловной (полной) вероятности ошибки вынесения решения не представляется возможным. Найдем условную вероятность ошибки. Так как t — момент окончания наблюдений (момент вынесения решения), то $t > t_i$ (t_i — момент наблюдения i -го события, $i=1, 2, \dots$). Введем в (16) $\tau_i = t - t_i$ ($\tau_i \geq 0$). Очевидно, что при $\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ ($\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 < 0$) функция $w(\lambda|\tau_i)$ — убывающая (возрастающая) функция переменной τ_i . Тогда условная вероятность ошибки для $\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ и $w(\lambda|t_i+0) \geq w(0|t_i+0)$ запишется в виде

$$P_0(w(\lambda|t_i+0), \tau_i) = \begin{cases} w(0|\tau_i), & 0 \leq \tau_i < \tau_i^0, \\ w(\lambda|\tau_i), & \tau_i \geq \tau_i^0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\tau_i^0 = \frac{1}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{w(\lambda|t_i+0)}{w(0|t_i+0)},$$

где τ_i^0 — корень уравнения $w(\lambda|\tau_i) = w(0|\tau_i)$. Для $\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ и $w(\lambda|t_i+0) \leq w(0|t_i+0)$ имеем

$$P_0(w(\lambda|t_i+0), \tau_i) = w(\lambda|\tau_i), \quad \tau_i \geq 0.$$

Подобные формулы выписываются и для $\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 < 0$.

Алгоритм расчета условной вероятности ошибки реализуется «параллельно» с расчетом оценки $\hat{\lambda}(\tau_i)$ состояния процесса $\lambda(\tau_i)$ в момент τ_i . Например, в условиях формулы (17) алгоритм расчета $\hat{\lambda}(\tau_i)$ примет вид:

$$1) \hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda, \quad 0 \leq \tau_i \leq \tau_i^0;$$

$$2) \hat{\lambda}(\tau_i) = 0, \quad \tau_i > \tau_i^0.$$

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$ по формулам (15), (16). Программа расчета реализована на языке Pascal в среде Delphi 7. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Вторым этапом расчета — непосредственное вычисление $w(0|t_i+0)$, $w(\lambda|t)$ по формулам (15), (16) и определение оценки $\hat{\lambda}(\tau_i)$. Расчеты произведены для следующих значений параметров: $\lambda=1$, $\alpha_1=0,01$, $\alpha_2=0,02$. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория (нижняя часть рисунка) процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования, и траектория (верхняя часть рисунка) оценки $\hat{\lambda}(\tau_i)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t=0,1$. На рис. 2 штриховкой обозначены области ошибочных решений. На рис. 3 приведена траектория апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$, соответствующая траектории процесса $\lambda(t)$.

С целью определения частоты ошибочных решений проведен статистический эксперимент. Для каждого значения длительности времени моделирования потока t ($t=10, 20, \dots, 50$) единиц времени при одних и тех же значениях параметров (что и на рис. 2, 3) имитировалось $N=1000$ реализаций потока. Для каждой реализации в момент t рассчитывались апостериорные вероятности $w(\lambda|t)$, $w(0|t)$ и по критерию максимума апостериорной вероятности выносилось решение о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент t . После этого проводилось сравнение полученного решения с истинным состоянием процесса $\lambda(t)$ в момент t , известным из результата имитационного моделирования.

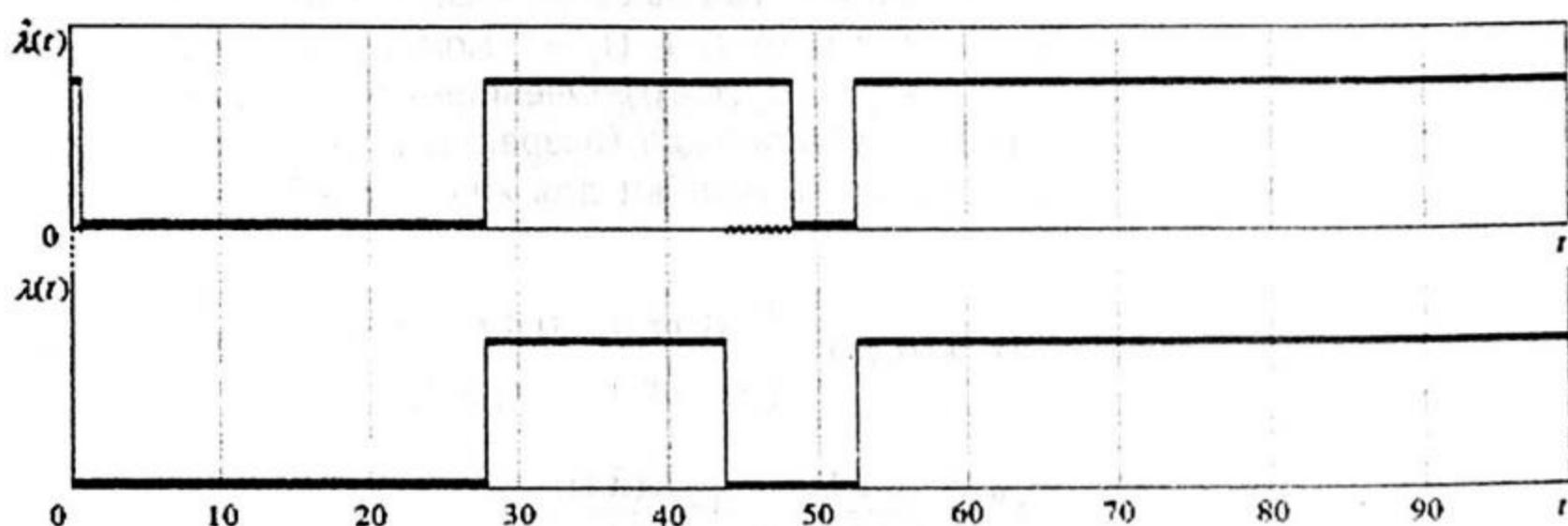


Рис. 2. Траектории процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

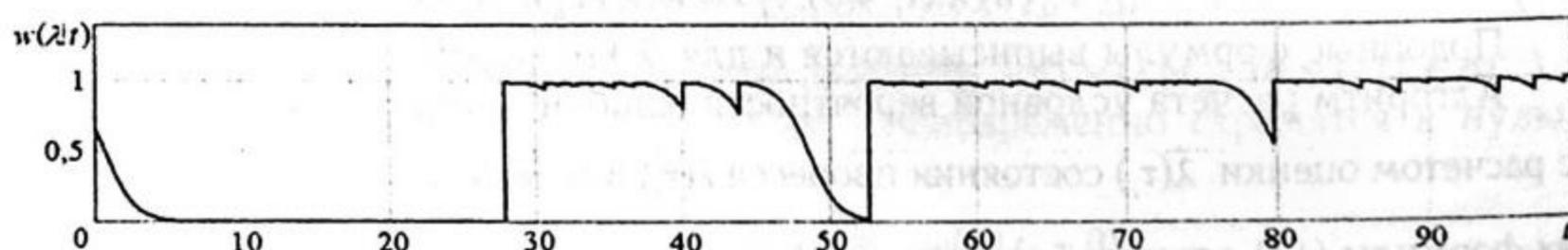


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$

Затем подсчитывалась частота ошибочных решений по всем реализациям:

$\hat{P}_1 = \hat{P}(\lambda(t)=0 | \lambda(t)=\lambda) = n_2 / N_1$; $\hat{P}_2 = \hat{P}(\lambda(t)=\lambda | \lambda(t)=0) = n_1 / N_2$, где N_i — число реализаций, для которых истинное состояние процесса $\lambda(t)$ в момент t равно λ_i ($\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=0$); $N=N_1+N_2$; n_2 — число ошибочных решений о первом состоянии процесса $\lambda(t)$ (в момент времени t имеет место состояние процесса $\lambda(t)=\lambda$, но выносится решение $\lambda(t)=0$). Аналогично определяется n_1 . Оценка полной вероятности ошибочного решения подсчитывается по формуле $\hat{P}_0 = (N_1 / N) \hat{P}_1 + (N_2 / N) \hat{P}_2$. Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1-3. В первой строке всех таблиц указано время моделирования потока t ($t=10, 20, \dots, 50$ единиц времени). Во второй и четвертой строках всех таблиц для каждого времени моделирования t указана верхняя \bar{D} и нижняя \underline{D} границы доверительного интервала для вероятностей ошибочных решений P_1, P_2, P_0 . При построении доверительных интервалов применялась методика с использованием нормального распределения для оценок вероятностей ошибочных решений $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_0$ (число реализаций N достаточно велико) с доверительной вероятностью 0,95. В третьей

строке всех таблиц приведены оценки вероятностей $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_0$ для каждого времени моделирования t .

Таблица 1

Оценка вероятности ошибки P_1

t	10	20	30	40	50
\bar{D}	0,3465	0,1466	0,0699	0,0733	0,0595
\hat{P}_1	0,3068	0,1175	0,0493	0,0529	0,0411
\underline{D}	0,2699	0,0936	0,0346	0,0379	0,0282

Таблица 2

Оценка вероятности ошибки P_2

t	10	20	30	40	50
\bar{D}	0,1259	0,1644	0,2047	0,2041	0,1914
\hat{P}_2	0,0943	0,1343	0,1743	0,1746	0,1628
\underline{D}	0,0700	0,1089	0,1476	0,1485	0,1377

Таблица 3

Оценка вероятности ошибки P_0

t	10	20	30	40	50
\bar{D}	0,2363	0,1682	0,1703	0,1819	0,1671
\hat{P}_0	0,2100	0,1450	0,1470	0,1580	0,1440
\underline{D}	0,1859	0,1245	0,1264	0,1367	0,1236

Анализ результатов показывает, что при заданных значениях параметров потока наибольшая частота ошибочных решений присуща времени моделирования $t=10$ единиц времени, что является естественным. Достаточная стабильность оценок (независимость от времени моделирования) наступает при времени моделирования $t > 40$ единиц времени, что связано с достаточно большим количеством реализаций ($N=1000$). Подчеркнем, что обеспечить меньшую вероятность ошибочного решения невозможно.

3. Вероятность ошибки вынесения решения (вариант 2). Рассмотрим вариант 2 описанного в разделе 1 потока событий: последовательные переходы из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе инициируют наступление лишнего события во втором состоянии в момент перехода. Аналитические выкладки по выводу апостериорной вероятности $w(\lambda | t)$ в основном совпадают с выкладками раздела 2, поэтому здесь приведем конечные формулы. Имеем

$$w(\lambda | t_i + 0) = \lambda / (\lambda + \alpha_1), \quad i = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$w(\lambda | t) = \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} [1 - w(\lambda | t_i + 0)] - \left[\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - w(\lambda | t_i + 0) \right] e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}{1 - w(\lambda | t_i + 0) - \left[\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - w(\lambda | t_i + 0) \right] e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}, \quad (19)$$

$$t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Из (18) вытекает, что величина скачка функции $w(\lambda | t)$ в момент t_i не зависит от i . Последнее означает, что для варианта 2 поток событий является потоком с ограниченным последствием (или рекуррентным [10]). При этом в каче-

стве начального значения $w(\lambda | t_0+0) = w(\lambda | t_0=0)$ можно выбрать (18) для $i=0$. Подставляя (18) в (19), получаем

$$w(\lambda | t) = \frac{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - [\alpha_2 - \lambda] e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}{\alpha_1 - (\alpha_2 - \lambda) e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}, \quad t_i \leq t < t_{i+1},$$

$$w(\lambda | t_i) = w(\lambda | t_i+0) = \lambda / (\lambda + \alpha_1), \quad i = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Формула (20) позволяет рассчитать $w(\lambda | t)$ в любой момент t . Для частного случая $\lambda + \alpha_1 = \alpha_2$ можно показать, что

$$w(\lambda | t) = \frac{\lambda + \alpha_1 \alpha_2 (t - t_i)}{\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 (t - t_i)}, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad w(\lambda | t_i) = w(\lambda | t_i+0) = \lambda / (\lambda + \alpha_1), \quad i = 0, 1, \dots$$

Для частного случая $\lambda = \alpha_2$ можно показать, что поток вырождается в простейший с параметром α_2 .

Получим формулу для безусловной вероятности ошибки вынесения решения P_0 . Момент вынесения решения t можно трактовать как некоторую точку, случайным образом «падающую» на временную ось ($t_i < t < t_{i+1}$) и не связанную с потоком событий. Так как поток рекуррентный, то пусть $p(\tau)$ — плотность вероятностей длительности интервала между двумя соседними событиями потока. Тогда плотность вероятностей длительности интервала, в который попала точка t , примет вид [11]:

$$w(\tau) = \tau p(\tau) / E(\tau), \quad E(\tau) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Плотность $p(\tau)$ при этом определится в виде [12]

$$p(\tau) = \gamma (\lambda + \alpha_1) e^{-(\lambda + \alpha_1)(\tau - T)} + (1 - \gamma) \alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau - T)}, \quad \tau \geq T, \quad \gamma = \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), находим

$$w(\tau) = \frac{\alpha_2 (\lambda + \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\gamma (\lambda + \alpha_1) \tau e^{-(\lambda + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma) \alpha_2 \tau e^{-\alpha_2 \tau} \right], \quad \tau \geq 0. \quad (23)$$

Введем в (20) $\tau = t - t_i$ ($\tau \geq 0$). Здесь индекс i у τ опущен, так как для любых i имеет место (18). Вид формул для P_0 будет зависеть от соотношения параметров λ , α_1 , α_2 . Рассмотрим, например, ситуацию, когда $\alpha_2 / (\lambda + \alpha_1) < 1/2 < \lambda / (\lambda + \alpha_1)$. Тогда функция (20) будет убывающей по τ и условная вероятность ошибки примет вид:

$$P_0(\tau) = \begin{cases} w(0 | \tau), & 0 \leq \tau \leq \tau^0, \\ w(\lambda | \tau), & \tau > \tau^0, \end{cases} \quad \tau^0 = \frac{1}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{(\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)}{\alpha_1(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)},$$

где τ^0 — корень уравнения $w(\lambda | t) = w(0 | t)$. Безусловная вероятность ошибки при этом запишется в виде

$$P_0 = \int_0^{\tau^0} w(0 | \tau) w(\tau) d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\lambda | \tau) w(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Подставляя (20), (23) в (24), находим

$$P_0 = 1 - C - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)} \left[\int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau \right],$$

$$C = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\frac{\alpha_1(\lambda + \alpha_1 - 2\alpha_2)}{(\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)} \right]^{\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}} \left[1 + \frac{2\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} + \frac{2\alpha_2}{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)} \ln \frac{(\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)}{\alpha_1(\lambda + \alpha_1 - 2\alpha_2)} \right],$$

$$f(\tau) = \frac{\tau \left[\alpha_1 \alpha_2 e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} + (\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) e^{\alpha_2 \tau} \right]^2}{e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} e^{\alpha_2 \tau} \left[\alpha_1 e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} + (\lambda - \alpha_2) e^{\alpha_2 \tau} \right]} \quad (25)$$

Аналогичным образом находятся формулы, подобные (25), для других вариантов соотношения параметров $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$ (всего 17 вариантов, кроме рассмотренного). В табл. 4 приведены численные значения вероятности ошибки P_0 , рассчитанные по формуле (25), в зависимости от $\lambda (\lambda = 1, 10)$ при фиксированных значениях $\alpha_1 = 0,01, \alpha_2 = 0,02$. Значения интегралов вычислены с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Таблица 4

Значения вероятности ошибки P_0 (вариант 2)

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_0	0,0588	0,0397	0,0310	0,0257	0,0223	0,0198	0,0178	0,0162	0,0148	0,0136

Для заданных значений параметров алгоритм оценивания обеспечивает, как видно из табл. 4, приемлемые значения вероятности ошибки P_0 , при этом P_0 уменьшается с увеличением λ , что является естественным.

4. Аналитические и численные результаты (вариант 3). Рассмотрим вариант 3 описанного в разделе 1 потока событий: последовательные переходы из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое инициируют наступление лишнего события в первом состоянии в момент перехода. Аналитические выкладки по выводу $w(\lambda | t)$ и P_0 в основном совпадают с выкладками раздела 2 и раздела 3, поэтому здесь приведем конечные формулы и численные результаты. Имеем

$$w(\lambda | t_i + 0) = 1, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (26)$$

$$w(\lambda | t) = \frac{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda | t_i + 0) e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2 - (\lambda - \alpha_2) w(\lambda | t_i + 0) [1 - e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}]},$$

$$t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Из (26) вытекает, что для варианта 3 поток событий является рекуррентным. В качестве начального значения $w(\lambda | t_0 + 0) = w(\lambda | t_0 = 0)$ можно выбрать (26) для $i = 0$. Подставляя (26) в (27), получаем

$$w(\lambda | t) = \frac{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}{\lambda - \alpha_2 + \alpha_1 e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - t_i)}}, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad w(\lambda | t_i) = w(\lambda | t_i + 0), \quad i = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Формула (28) позволяет рассчитать $w(\lambda | t)$ в любой момент t .

Для частного случая $\lambda + \alpha_1 = \alpha_2$ можно показать, что

$$w(\lambda | t) = [1 + \alpha_1(t - t_i)]^{-1}, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad w(\lambda | t_i) = w(\lambda | t_i + 0), \quad i = 0, 1, \dots$$

Для частного случая $\lambda = \alpha_2$ можно показать, что поток вырождается в простейший с параметром α_2 .

Введем в (28) $\tau = t - t_i (\tau \geq 0)$. Плотность $p(\tau)$ для варианта 3 определяется по-прежнему формулой (22) [13]. Тогда $w(\tau)$ определяется выражением (23). Вид формул для P_0 , как и в случае варианта 2, будет зависеть от соотношения параметров $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$. Рассмотрим, например, ситуацию, когда $\alpha_2 / (\lambda + \alpha_1) < 1$.

Тогда функция (28) будет убывающей по τ , и условная вероятность ошибки примет вид:

$$P_0(\tau) = \begin{cases} w(0|\tau), & 0 \leq \tau \leq \tau^0 \\ w(\lambda|\tau), & \tau > \tau^0 \end{cases}, \quad \tau^0 = \frac{1}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\lambda + 2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}, \quad (29)$$

где τ^0 — по-прежнему корень уравнения $w(\lambda|t) = w(0|t)$. Безусловная вероятность ошибки P_0 при этом запишется в виде (24), где τ^0 определено в (29). Подставляя (23), (28) в (24), находим

$$P_0 = 1 - B - \frac{\alpha_2(\lambda + \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\int_0^{\tau^0} \varphi(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \right],$$

$$B = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\frac{\alpha_1}{\lambda + 2\alpha_1 - \alpha_2} \right]^{\lambda + \alpha_2} \left[\lambda + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{2\alpha_2(\lambda + \alpha_1)}{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)} \ln \frac{\lambda + 2\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} \right],$$

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau \left[\alpha_1 \alpha_2 e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} + (\lambda + \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) e^{\alpha_2 \tau} \right]^2}{e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} \left[\alpha_1 e^{(\lambda + \alpha_1)\tau} + (\lambda - \alpha_2) e^{\alpha_2 \tau} \right]}. \quad (30)$$

Аналогичным образом находятся формулы, подобные (30), для других вариантов соотношения параметров $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$ (всего 5 вариантов, кроме рассмотренного). В табл. 5 приведены численные значения вероятности ошибки P_0 , рассчитанные по формуле (30), в зависимости от λ ($\lambda = 1, 10$) при фиксированных значениях $\alpha_1 = 0,01, \alpha_2 = 0,02$.

Таблица 5

Значения вероятности ошибки P_0 (вариант 3)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0707	0,0459	0,0353	0,0289	0,0249	0,0219	0,0196	0,0178	0,0163	0,0149

Как и в разделе 3, вероятность ошибки P_0 уменьшается с увеличением λ ; сами значения P_0 являются приемлемыми при оценивании состояний процесса $\lambda(t)$.

Заключение. Полученные результаты показывают возможность оптимального оценивания состояний асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий по результатам текущих наблюдений за моментами наступления событий.

Для коррелированного потока (вариант 1) получить безусловную вероятность ошибки не представляется возможным. Однако условная вероятность ошибки рассчитывается алгоритмически «параллельно» с расчетом оценки состояния потока. Для рекуррентных потоков событий (варианты 2,3) безусловная вероятность ошибки получается в виде замкнутых формул, легко поддающихся расчету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92-99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55-61.

3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. of Applied Probability. 1979. Vol. 16. P. 764-779.
4. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69-79.
5. Василевская Т.П., Завгородняя М.Е., Шмырин И.С. О соотношении МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий // Вестник Томского гос. ун-та. 2004. №9(II). С. 138-144.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. Vol. 7. P. 1-46.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потокком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20-32.
8. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т.10. № 3. С. 273-280.
9. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
10. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.
11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.
12. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35-49.
13. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского гос. ун-та. 2004. № 284. С. 137-145.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
профессор кафедры математического моделирования
Института математики и компьютерных наук

Ирина Викторовна СЛЕЗКО —
старший преподаватель кафедры
математического моделирования
Института математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 539.382.2

ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела на примере плоской задачи асимметричной теории упругости об одноосном растяжении пластины, ослабленной квадратным отверстием. Проводится сравнительный анализ полученного решения с классическим.

The two-dimensional model of the deformation of asymmetrical elastic solid by flat asymmetrical elasticity's problem about one-axes stretching of the plate which is weakening by square hole is considered in this article. Comparative analysis of the received solution with classical were given.