

3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. of Applied Probability. 1979. Vol. 16. P. 764-779.
4. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69-79.
5. Василевская Т.П., Завгородняя М.Е., Шмырин И.С. О соотношении МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий // Вестник Томского гос. ун-та. 2004. №9(II). С. 138-144.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. Vol. 7. P. 1-46.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потокком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20-32.
8. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т.10. № 3. С. 273-280.
9. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
10. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.
11. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.
12. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35-49.
13. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского гос. ун-та. 2004. № 284. С. 137-145.

Владислав Олегович БЫТЕВ —
профессор кафедры математического моделирования
Института математики и компьютерных наук

Ирина Викторовна СЛЕЗКО —
старший преподаватель кафедры
математического моделирования
Института математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 539.382.2

ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается двумерная модель деформации асимметрично-упругого тела на примере плоской задачи асимметричной теории упругости об одноосном растяжении пластины, ослабленной квадратным отверстием. Проводится сравнительный анализ полученного решения с классическим.

The two-dimensional model of the deformation of asymmetrical elastic solid by flat asymmetrical elasticity's problem about one-axes stretching of the plate which is weakening by square hole is considered in this article. Comparative analysis of the received solution with classical were given.

Наряду с развитием классической математической теории упругости в последнее время начинает развиваться асимметричная упругость. Согласно новой теории, симметричные тензоры напряжений и деформаций связаны несимметричным тензором преобразования. Возникает необходимость сравнения двух моделей и обоснования их применения при решении задач теории упругости.

Как известно, классическая двумерная модель деформации упругого тела предполагает выражение компонент напряжений и вектора смещения через функции напряжений Эри $\varphi(z)$, $\psi(z)$ [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi'(z) + \psi''(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma$, λ, μ — коэффициенты Ламе, σ — коэффициент Пуассона.

Далее будет рассматриваться неклассическая двумерная модель асимметрично-упругого тела. Структура преобразующего тензора установлена В.О. Бытевым посредством группового анализа законов сохранения механики сплошных сред [2]. Согласно модели В.О. Бытева, комплексное представление компонент напряжений совпадает с классическим, а вектор смещений имеет вид:

$$2\kappa_0^2(u + iv) = \left(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa}_0\right)\varphi(z) - \kappa_0 z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \kappa_0 \bar{\psi}(\bar{z}),\quad (2)$$

где $\kappa_0 = \mu + i\mu_0$. Уравнение вектора смещений содержит три кинетических параметра — λ_0, μ_0, μ . Причем $\lambda_0 > 0, \mu > 0$, а параметр μ_0 может иметь любое вещественное значение (далее условимся называть параметр μ_0 модулем Бытева). Заметим, что замена $\lambda_0 = \lambda + \mu$ при $\mu_0 = 0$ сводит (2) к классическому уравнению (1) с параметрами λ и μ [1].

Пусть заданы две комплексные плоскости Z, G и определено конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ области $S \subset Z$ на область $\Sigma \subset G$. Введем на плоскости G полярные координаты (ρ, ϑ) , так что $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$. Полярное представление вектора смещений (u_ρ, u_ϑ) на плоскости G имеет вид:

$$2\kappa_0^2[u_\rho + iu_\vartheta] = e^{-i\vartheta} \left(\left(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa}_0\right)\varphi(\zeta) - \kappa_0 \zeta \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - \kappa_0 \bar{\psi}(\bar{\zeta}) \right).\quad (3)$$

Рассмотрим одноосное растяжение пластины, ослабленной квадратным отверстием. Растяжение осуществляется под углом к оси Ox силой, величина которой равна p .

Отобразим внешность криволинейного квадратного отверстия на внутренность круга единичного радиуса. Заметим, что радиус закругления углов квадрата зависит от количества удерживаемых в отображающей функции членов.

Возьмем отображающую функцию, удерживая в ней два члена:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} \right).$$

Здесь R выражается через длину стороны квадратного отверстия: $R = 3a/5$, где a — длина стороны криволинейного квадрата, измеряемая по оси Ox или Oy . Радиус закругления углов $r = R/10 = 3a/50$.

Выделим в функции $\omega(\zeta)$ действительную и мнимую части:

$$x = \frac{R}{6\rho} (6 \cos \vartheta - \rho^4 \cos 3\vartheta),$$

$$y = -\frac{R}{6\rho} (6 \sin \vartheta + \rho^4 \sin 3\vartheta),$$

где (ρ, θ) — полярные координаты.

Отверстие, соответствующее значениям $R=1, \rho=1$, представлено на рис. 1.

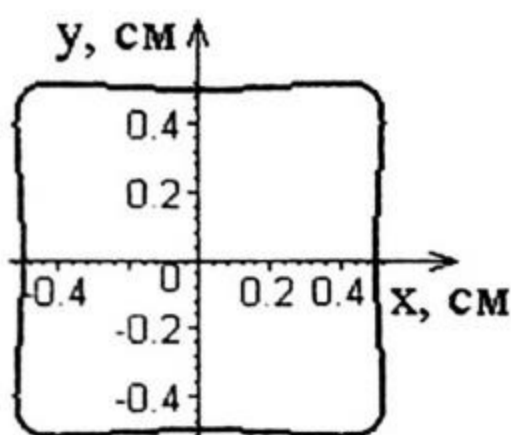


Рис. 1. Квадратное отверстие до деформации

Согласно [3], функции напряжений берем в виде:

$$\varphi(\zeta) = pR \left(\frac{\zeta}{4} + \frac{3}{7}\zeta + \frac{\zeta^3}{24} \right), \quad \psi(\zeta) = pR \left[\frac{1}{2\zeta} + \frac{91}{84} \frac{\zeta - 78\zeta^3}{2 + \zeta^4} \right].$$

Для данной задачи получено поле напряжений в общем виде (для любого α). Также получены выражения для компонент вектора смещения u_ρ, u_θ для любого α , из которых при $\mu_0=0$ получается классическое решение $u_\rho^{cl}, u_\theta^{cl}$ в аналитическом виде.

Исследуем, как изменится форма отверстия под действием нагрузки.

Пусть имеем пластину из оргстекла. Характеристики материала: $\sigma=0.3$, $E=32.36 \cdot 10^7$ Н/м². Размер отверстия: $R=0.6 \cdot 10^{-2}$ м ($a \approx 0.01$ м). Пусть растягивающее усилие $p=3.6$ кН приложено вдоль оси Ox ($\alpha=0$).

На рис. 2 представлены годографы вектора смещения для каждой из моделей. Толстой линии соответствует годограф вектора смещений классической модели, тонкой — асимметричной модели при $\mu_0=49 \cdot 10^7$ Н/м².

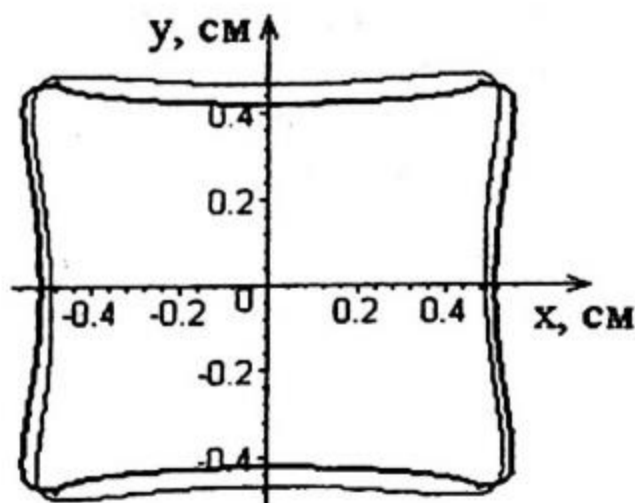


Рис. 2. Годографы вектора смещения

Видно, что при заданной нагрузке в углах квадрата наметились петли, что не может быть физически реальным. При увеличении нагрузки отверстие принимает еще более неправдоподобную форму.

Для асимметричной модели получаем решение, которому соответствует физически реальная картина. Отметим, что с помощью модуля Бытева удается «регулировать» решение увеличивая нагрузку.

Диапазон «влияния» μ_0 зависит от начальных условий: от характеристик материала, из которого изготовлена пластина; от величины приложенного усилия; от размеров отверстия.

Также получены решения и для других форм отверстий с удержанием в отображающей функции двух и трех членов.

Авторами статьи готовится серия экспериментов, в результате которых ожидается установление соответствий или, напротив, несоответствий различных моделей экспериментальным данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 1933. Ленинград: Изд-во академии наук. 1933. 381 с.
2. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.

*Евгений Александрович НОВИКОВ —
главный научный сотрудник
Института вычислительного
моделирования СО РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
г. Красноярск*

УДК 519.622

ОЦЕНКА ГЛОБАЛЬНОЙ ОШИБКИ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ

АННОТАЦИЯ. Предложен и обоснован способ оценки глобальной ошибки явных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен явный метод типа Рунге-Кутты второго порядка с неравенством для контроля точности вычислений. Приведены результаты расчетов, подтверждающие надежность и эффективность оценки ошибки.

A method of global error estimation of explicit Runge-Kutta methods method of solution Cauchy problem for ordinary differential equations is proposed and proved. Explicit Runge-Kutta method of second order is stated with inequality for accuracy control. Results of computation verifying reliability and efficiency are produced.

Введение. Одной из основных проблем при численном интегрировании задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений является вопрос о точности получаемых на компьютере численных результатов. В после-