Видно, что при заданной нагрузке в углах квадрата наметились петли, что не может быть физически реальным. При увеличении нагрузки отверстие принимает еще более неправдоподобную форму.

Для асимметричной модели получаем решение, которому соответствует физически реальная картина. Отметим, что с помощью модуля Бытева удается «регулировать» решение увеличивая нагрузку.

Диапазон «влияния» $\mu_0$ зависит от начальных условий: от характеристик материала, из которого изготовлена пластина; от величины приложенного усилия; от размеров отверстия.

Также получены решения и для других форм отверстий с удержанием в отображающей функции двух и трех членов.

Авторами статьи готовится серия экспериментов, в результате которых ожидается установление соответствий или, напротив, несоответствий различных моделей экспериментальным данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 1933. Ленинград: Изд-во академии наук. 1933. 381 с.

2. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства урав-нений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.

3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.

***Евгений Александрович НОВИКОВ —***
***главный научный сотрудник***
***Института вычислительного***
***моделирования СО РАН,***
***доктор физико-математических наук, профессор***
***г. Красноярск***

**УДК 519.622**

## *ОЦЕНКА ГЛОБАЛЬНОЙ ОШИБКИ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ*

*АННОТАЦИЯ. Предложен и обоснован способ оценки глобальной ошибки явных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен явный метод типа Рунге-Кутты второго порядка с неравенством для контроля точности вычислений. Приведены результаты расчетов, подтверждающие надежность и эффективность оценки ошибки.*

*A method of global error estimation of explicit Runge-Kutta methods method of solution Cauchy problem for ordinary differential equations is proposed and proved. Explicit Runge-Kutta method of second order is stated with inequality for accuracy control. Results of computation verifying reliability and efficiency are produced.*

**Введение.** Одной из основных проблем при численном интегрировании задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений является вопрос о точности получаемых на компьютере численных результатов. В последнее время при получении неравенства для контроля точности одношаговых методов применяется в основном оценка главного члена глобальной ошибки, вычисленная тем или иным способом [1-3]. По сравнению с использованием локальной ошибки это позволяет повысить надежность расчетов. Здесь предложен способ оценки аналога глобальной ошибки явных методов, который, как правило, фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Приведен пример метода с неравенством для контроля точности на основе такой оценки.

***Контроль точности вычислений.*** Рассмотрим задачу Коши для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(t, y), \; y(t_0) = y_0, \; t_0 \le t \le t_k, \tag{1}$$

где $y$ и $f$ — гладкие вещественные $N$-мерные вектор-функции, $t$ — независимая переменная, изменяющаяся на заданном интервале $[t_0, t_k]$. Предположение о гладкости правой части системы (1) влечет выполнение условий локальной теоремы Коши-Пикара, откуда, в свою очередь, следует существование единственного решения задачи (1), $[t_0, t_k]$ — область определения решения.

Для решения (1) рассмотрим одношаговые безытерационные методы, которые в векторной форме можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi_f(t_n, y_n, h), \; n=0, 1, 2 \ldots \tag{2}$$

с заданным начальным условием $y_0$. Здесь $h$ — шаг интегрирования, $\varphi_f$ — заданная гладкая $N$-мерная вектор-функция, зависящая от правой части задачи (1). В форме (2) можно представить явные методы типа Рунге-Кутта, а также неявные и полуявные методы типа Рунге-Кутта с фиксированным итерационным процессом, в котором число итераций не зависит от номера шага интегрирования. Здесь и ниже будут рассматриваться оценки локальной и глобальной ошибок в смысле главного члена, то есть далее будет оцениваться только первый член при разложении соответствующих ошибок в ряды Тейлора по степеням $h$.

Итак, пусть для решения задачи (1) имеется метод вида (2) $p$-го порядка точности и пусть его локальная ошибка $\delta_{n,p}$ представима в виде

$$\delta_{n,p} = h^{p+1}\varphi(t_n) + O(h^{p+2}), \tag{3}$$

где $\varphi$ есть некоторая функция, не зависящая от размера шага интегрирования. Для записи (3) требуется определенная гладкость правой части дифференциальной задачи, которая предполагается выполненной. Известно, что при условии (3) глобальную ошибку $\varepsilon_{n,p}$ можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_{n,p} = h^p x(t_n) + O(h^{p+1}), \tag{4}$$

где $x(t)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$x'(t) - f'(t, y(t))x(t) = -\varphi(t), \qquad x(t_0) = 0, \tag{5}$$

где $f'(t, y(t))$ — матрица Якоби системы (1). Непосредственное использование оценки (4) в неравенстве для контроля точности вычислений может приводить к значительному увеличению вычислительных затрат. Дело в том, что для определения $\varepsilon_{n,p}$ требуется оценка локальной ошибки (3), что, как правило, означает дополнительные вычисления правой части задачи (1) плюс затраты на интегрирование (5). Докажем теорему, которая позволяет избежать интегрирования задачи Коши (5).

**Теорема 1.** *Пусть для решения скалярной задачи* (1) *имеется метод* (2) *p-го порядка точности, локальная ошибка которого имеет вид*

$$\delta_{n,p} = c_p h^{p+1} f'(t_n, y(t_n))\psi_p(t_n) + O(h^{p+2}).$$

*Тогда выполняется неравенство*

$$\| x(t) \| \le | c_p | \cdot \| \psi_p(t) \|,$$

*где* $\| x(t) \| = \max\limits_{t_0 \le z \le t} | x(z) |$, $\| \psi_p(t) \| = \max\limits_{t_0 \le z \le t} | \psi_p(z) |$, *а* $x(t)$ *есть решение задачи Коши:*

$$x'(t) - f'(t, y(t))x(t) = -c_p f'(t, y(t))\psi_p(t), \; x(t_0) = 0.$$

Для доказательства введем обозначение

$$F = \int_{t_0}^{t} f'(z, y(z))dz.$$

В силу знакопостоянства $f'(t, y(t))$ для скалярного уравнения вида (1) с использованием теоремы о среднем можно записать

$$\| x(t) \| = \| c_p e^F \int_{t_0}^{t} e^{-F} f'(z, y(z))\psi_p(z)dz \| \le,$$

$$\le | c_p | \cdot | \psi_p(z_0) | \cdot \| e^F \int_{t_0}^{t} e^{-F} dF \| \le | c_p | \cdot \| \psi_p(z_0) \|,$$

где точка $z_0$ существует, причем $z_0 \in [t_0, t_k]$.

Используя это соображение при $N > 1$, будем предполагать выполнение неравенства $\max\limits_{1 \le i \le N} \| x_i(t) \| \le | c_p | \cdot \max\limits_{1 \le i \le N} \| \psi_{pi}(t) \|$, то есть в качестве оценки ошибки $\varepsilon_{n,p}$ будем использовать следующую:

$$\varepsilon_{n,p} \approx c_p h^p \psi_p(t_n). \tag{6}$$

Далее, как уже отмечалось выше, использование (4) связано с необходимостью оценки локальной ошибки, что, как правило, приводит к дополнительным вычислениям правой части задачи (1) и, как следствие, к увеличению вычислительных затрат. При использовании (6) требуется оценить функцию $\psi_p(t)$, что в ряде случаев удается осуществить бесплатно. Ниже при оценке $\psi_p(t)$ будем поступать следующим образом.

Пусть для решения задачи (1) имеются два метода вида (2) $(p-1)$-го и $p$-го порядков точности. Обозначим через $y_{n,p-1}$ и $y_{n,p}$ соответствующие приближения к решению, а через $\delta_{n,p-1}$ и $\delta_{n,p}$ их локальные ошибки. Выберем параметры методов такими, чтобы локальные ошибки были согласованы следующим образом:

$$\begin{gathered} \delta_{n,p-1} = c_{p-1} h^p \psi_p(t_n) + O(h^{p+1}), \\ \delta_{n,p} = c_p h^{p+1} f'(t_n, y(t_n))\psi_p(t_n) + O(h^{p+2}), \end{gathered} \tag{7}$$

где $c_{p-1}$ и $c_p$ — некоторые вычисляемые постоянные, а функция $\psi_p(t)$ не зависит от размера шага интегрирования. Вычисления предполагается проводить по методу $p$-го порядка, для определения глобальной ошибки которого требуется оценка функции $\psi_p(t) = c_p \psi_p(t)$. Отметим, что требование (7) принципиально возможно, так как в разложении ошибки в ряд Тейлора можно оставить только те члены, которые получаются на линейной задаче. Ясно также, что (7) означает некоторые дополнительные соотношения на коэффициенты схемы (2). Однако для выполнения условий (7) во многих случаях могут быть использованы те коэффициенты, которые остаются свободными после удовлетворения требованиям аппроксимации. Класс методов (2) с условиями (7) не пуст, ниже будет приведен такой метод. Теперь докажем утверждение, с использованием которого далее будет определяться оценка функции $\psi_p(t)$.

**Теорема 2.** *Пусть для решения задачи* (1) *имеется два метода вида* (2) $(p-1)$*-го и* $p$*-го порядков точности, и пусть их локальные ошибки удовлетворяют требованиям* (7). *Тогда выполняется следующее соотношение:*

$$\psi_p(t_n)-c_{p-1}^{-1}h^{-p}(y_{n,p}-y_{n,p-1})=O(h). \tag{8}$$

Для доказательства предположим, что приближение к решению $y_n$ в точке $t_n$ вычислено методом $p$-го порядка, то есть выполнено равенство

$$y_n=y(t_n)+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n=O(h^p).$$

Тогда приближенное решение $y_{n+1,p}$ в точке $t_{n+1}$, вычисленное методом $p$-го порядка, можно представить в виде

$$y_{n+1,p}=y_n+h\varphi_f(t_n,y_n,h)=y(t_n)+\varepsilon_n+h\varphi_f(t_n,y(t_n)+\varepsilon_n,h).$$

Разлагая функцию $\varphi_f(t_n,y(t_n)+\varepsilon_n,h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $y(t_n)$ и используя очевидное равенство

$$\frac{\partial\varphi_f(t_n,y(t_n),h)}{\partial y}-\frac{\partial f(t_n,y(t_n))}{\partial y}=O(h),$$

получим

$$y_{n+1,p}=y(t_n)+\varepsilon_n+h\varphi_f(t_n,y(t_n),h)+hf'(t_n,y(t_n))\varepsilon_n+O(h^{p+2}).$$

Добавляя разность $y(t_{n+1})-y(t_{n+1})$ в правую часть полученного соотношения и учитывая определение погрешности аппроксимации, будем иметь

$$y_{n+1,p}=y(t_{n+1})-\delta_{n+1,p}+\varepsilon_n+hf'(t_n,y(t_n))\varepsilon_n+O(h^{p+2}). \tag{9}$$

Проводя аналогичные рассуждения для метода $(p-1)$-го порядка точности, можно записать

$$y_{n+1,p-1}=y(t_{n+1})-\delta_{n+1,p-1}+\varepsilon_n+hf'(t_n,y(t_n))\varepsilon_n+O(h^{p+2}). \tag{10}$$

Учитывая $\delta_{n,p}=O(h^{p-1})$, $\delta_{n,p-1}=O(h^p)$ и вычитая из (9) соотношение (10), имеем

$$\delta_{n+1,p-1}=y_{n+1,p}-y_{n+1,p-1}+O(h^{p+1}),$$

откуда, с учетом (7), следует (8).

Учитывая **теорему 2**, оценку ошибки можно записать в виде

$$\varepsilon_{n,p}\approx c_pc_{p-1}^{-1}(y_{n,p}-y_{n,p-1}). \tag{11}$$

Теперь для контроля точности вычислений и при выборе величины шага интегрирования можно использовать неравенство

$$\|\varepsilon_{n,p}\|\le\varepsilon, \tag{12}$$

где $\varepsilon$ — требуемая точность интегрирования, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $R^N$.

Обычно в расчетах левая часть неравенства (12) определяется по формуле

$$\|\varepsilon_{n,p}\| = \max_{1\le i\le N}[|\varepsilon^i_{n,p}|/(|y^i_n|+r)], \tag{13}$$

где $i$ — номер компоненты, $r$ — положительный параметр. Если по $i$-й компоненте решения выполняется неравенство $y^i_n<r$, то контролируется абсолютная ошибка $\varepsilon r$, в противном случае — относительная ошибка $\varepsilon$.

***Пример метода с неравенством для контроля точности вычислений.*** Для решения задачи Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'=f(y),\ y(t_0)=y_0,\ t_0\le t\le t_k \tag{14}$$

рассмотрим явный двухстадийный метод типа Рунге-Кутта [4]:

$$y_{n+1}=y_n+p_1k_1+p_2k_2,\ \ k_1=hf(y_n),\ \ k_2=hf(y_n+\beta k_1). \tag{15}$$

В случае неавтономной системы схема (15) записывается в виде

$$y_{n+1}=y_n+p_1k_1+p_2k_2,\ \ k_1=hf(t_n,y_n),\ \ k_2=hf(t_n+\beta h,y_n+\beta k_1).$$

Ниже для сокращения выкладок будем рассматривать задачу (14). Однако построенный метод можно применять для решения неавтономных задач. Получим соотношения на коэффициенты метода (15) второго порядка точности. Для этого разложим стадии $k_1$ и $k_2$ в ряды Тейлора по степеням $h$ до членов с $h^3$ включительно и подставим в первую формулу (15). Получим

$$y_{n+1}=y_n+(p_1+p_2)hf_n+\beta p_2h^2f'_nf_n+0.5\beta^2p_2h^3f''_nf_n^2+O(h^4), \tag{16}$$

где элементарные дифференциалы $f_n$, $f_n'f_n$ и $f_n'f^2_n$ вычислены на приближенном решении $y_n$. Представление точного решения $y(t_{n+1})$ в виде ряда Тейлора по степеням $h$ в окрестности точки $t_n$ имеет вид:

$$y_{n+1}=y_n+hf+0.5h^2f'f+(h^3/6)[f'^2f+f''f^2]+O(h^4), \tag{17}$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$. Сравнивая (16) и (17) до членов с $h^2$ включительно при условии $y_n=y(t_n)$, запишем условия второго порядка точности схемы (15), которые имеют вид $p_1+p_2=1$ и $\beta p_2=0.5$. При данных соотношениях локальную ошибку $\delta_n$ схемы (15) можно записать следующим образом:

$$\delta_n=h^3\left(\frac{1}{6}f'^2f+\frac{2-3\beta}{12}f''f^2\right)+O(h^4).$$

Положим $\beta=2/3$, потому что в этом случае локальная ошибка имеет вид (7). В этом случае коэффициенты схемы (15) определяются однозначно $\beta=2/3$, $p_1=0.25$ и $p_2=0.75$. Рассмотрим вспомогательную схему $y_{n+1,1}=y_n+k_1$ первого порядка точности, локальная ошибка $\delta_{n,1}$ которой имеет вид

$$\delta_{n,1}=0.5h^2f'^2f+O(h^3).$$

Теперь в соотношениях (7) имеет место $c_1=0.5$ и $c_2=1/6$. Тогда из (11) следует, что оценку глобальной ошибки $\varepsilon_{n,2}$ метода (15) второго порядка точности можно вычислить по формуле $\varepsilon_{n,2}=0.25(k_2-k_1)$, а неравенство для контроля точности имеет вид $0.25\|k_2-k_1\|\le\varepsilon$ или $\|k_2-k_1\|\le 4\varepsilon$.

***Алгоритм интегрирования с контролем точности и устойчивости.*** Явные методы можно применять для решения задач средней жесткости, если наряду с точностью вычислений контролировать устойчивость численной схемы [3]. Построим неравенство для контроля устойчивости (15) предложенным в [3] способом. Для этого рассмотрим вспомогательную стадию $k_3=hf(y_{n+1})$. Заметим, что $k_3$ совпадает со стадией $k_1$, которая применяется на следующем шаге интегрирования, и поэтому ее использование не приводит к дополнительным вычислениям правой части системы (1). Запишем стадии $k_1$, $k_2$ и $k_3$ применительно к задаче $y'=Ay$, где $A$ есть матрица с постоянными коэффициентами. В результате получим

$$k_1=Xy_n, \qquad k_2=(X+X^2)y_n, \qquad k_3=(X+X^2+0.5X^3)y_n,$$

где $X=hA$. Легко видеть, что

$$k_2-k_1=X^2y_n, \qquad 2(k_2-k_1)=X^3y_n.$$

Тогда согласно [3] оценку максимального собственного числа $w_{n,2}=h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить по формуле

$$w_{n,2}=2\max_{1\le i\le N}(|k_3^i-k_2^i|/|k_2^i-k_1^i|). \tag{18}$$

Интервал устойчивости схемы (15) второго порядка точности приблизительно равен двум. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,2}\le 2$. В случае применения данного неравенства для выбора шага следует учитывать грубость оценки (18), потому что: 1) вовсе не обязательно, что максимальное собственное число сильно отделено от остальных, 2) в степенном методе применяется мало итераций, 3) дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг $h_{n+1}$ будем вычислять следующим образом. Новый шаг $h^{ac}$ по точности определим по формуле $h^{ac}=q_1h_n$, где $h_n$ есть последний успешный шаг интегрирования, а $q_1$, учитывая соотношение $k_2-k_1=O(h^2_n)$, задается уравнением $q_1^2||k_2-k_1||=4\varepsilon$. Шаг $h^{st}$ по устойчивости зададим формулой $h^{st}=q_2h_n$, где $q_2$, учитывая соотношение $w_{n,2}=O(h_n)$, определяется из равенства $q_2w_{n,2}=2$. Тогда прогнозируемый шаг $h_{n+1}$ вычисляется по формуле

$$h_{n+1}=\max[h_n,\min(h^{ac},h^{st})]. \tag{19}$$

Заметим, что формула (19) применяется для прогноза величины шага интегрирования $h_{n+1}$ после успешного вычисления решения с предыдущим шагом $h_n$ и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг $h_n$. В результате для выбора шага и предлагается формула (19). Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Собственно говоря, именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.

***Результаты расчетов.*** Расчеты проводились на *IBM PC Athlon XP* 2000 с точностью $\varepsilon=10^{-2}$. Это связано с тем, что в построенном алгоритме применяется схема низкого порядка точности, и поэтому данным методом осуществлять расчеты с более высокой точностью нецелесообразно. Сравнение эффективности проводилось с известным методом Гира в реализации А. Хиндмарша DLSODE из коллекции ODEPACK [5]. Ниже через *ifu* и *ija* обозначены, соответственно, суммарное число вычислений правой части и количество обращений матрицы Якоби задачи (1), которые позволяют объективно оценить эффективность алгоритма интегрирования.

Пример описывается системой двух дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями. Лаборатория Akzo Nobel Central Research сформулировала задачу проникновения помеченных радиоактивной меткой антител в пораженную опухолью ткань живого организма [6]. Исследование проводилось в диагностических и терапевтических целях. Рассматривается система одномерных уравнений реакции-диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-kuv, \quad \frac{\partial v}{\partial t}=-kuv, \tag{20}$$

которые возникают из химической реакции A+B→C с константой скорости реакции $k$, где $A$ — антитело с радиоактивной меткой, реагирующее с субстратом $B$ — тканью, пораженной опухолью. Концентрации $A$ и $B$ обозначены через $u$ и $v$ соответственно. При выводе уравнений (20) предполагалось, что кинетика реакции описывается законом действующих масс, причем реагент $A$ подвижен, тогда как реагент $B$ неподвижен. Изучается полубесконечная пластина, внутри которой субстрат $B$ равномерно распределен. Реагент $A$, попадая на поверхность пластины, начинает в нее проникать. После дискретизации по пространственной переменной получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y), \quad y(0)=g, \quad y\in R^{2N}, \quad 0\le t\le 20, \tag{21}$$

где $N$ — задаваемый пользователем параметр, а функция $f$ определяется формулами

$$f_{2j-1}=\alpha_j\frac{y_{2j+1}-y_{2j-3}}{2\Delta\zeta}+\beta_j\frac{y_{2j-3}-2y_{2j-1}+y_{2j+1}}{(\Delta\zeta)^2}-ky_{2j-1}y_{2j},$$

$$f_{2j}=-ky_{2j}y_{2j-1},$$

где $\alpha_j=2(j\Delta\zeta-1)^3c^2, \quad \beta_j=(j\Delta\zeta-1)^4c^2, \quad 1\le j\le N,$

$\Delta\zeta=1/N, \quad y_{-1}(t)=\Phi(t), \quad y_{2,N+1}=y_{2,N-1},$

$g\in R^{2N}, \quad g=(0,v_0,0,v_0, \quad \dots,0,v_0)^T.$

Функция $\Phi(t)=2$ при $0<t\le5$ и $\Phi(t)=0$ при $5<t\le20$, то есть $\Phi(t)$ имеет разрыв первого рода в точке $t=5$. Согласно [6], подходящими значениями для параметров $k$, $v_0$ и c являются $k=100$, $v_0=1$ и $c=4$. В [7] приведены подпрограммы на фортране для вычисления правой части и матрицы Якоби задачи (21). Там же приведены результаты расчетов с высокой точностью. Здесь расчеты проводились при $N=200$, то есть система (21) состоит из 400 уравнений. Задача о нахождении разрыва функции $\Phi(t)$ при $t=5$ возлагалась на алгоритм управления шагом. Решение данной задачи построенным алгоритмом вычислено с затратами $ifu=178\,088$. При расчетах программой DLSODE требуемая точность $10^{-2}$ достигается при задаваемой точности $10^{-3}$ с затратами $ifu=25\,358$ и $ija=62$. Отметим, что алгоритм на основе явной схемы с контролем точности и устойчивости по времени счета более чем в 1.5 раза эффективнее программы DLSODE. Это естественно, потому что в явном методе нет необходимости обращать матрицу Якоби достаточно большой размерности. С ростом $N$ преимущество явного метода по времени расчетов возрастает.

*Заключение.* Предложенный способ оценки глобальной ошибки не приводит к увеличению вычислительных затрат. Результаты расчетов подтверждают надежность оценки ошибки. Построенный алгоритм интегрирования с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы можно применять для решения нежестких задач, а также задач средней жесткости. В случае умеренной жесткости задачи алгоритм на основе явной численной формулы может конкурировать с алгоритмами на основе неявных численных схем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

3. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 197 с.

4. Кнауб Л.В., Лаевский Ю.М., Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага на основе явного двухстадийного метода Рунге-Кутты // СибЖВМ. 2007. Т. 10. № 2. С. 177-185.

5. http://www.netlib.org/odepack/index.html.

6. Mazzia F., Iavernaro F. Test Set for Initial Value Problem Solvers // Department of Mathematics, University of Bari, August 2003. Available at http://www.dm.uniba.it/ testset.

7. http://pitagora.dm.uniba.it/ testset/src/problems/medakzo.f.

***Александр Григорьевич ИВАШКО —***
***профессор кафедры информационных систем***
***Института математики и компьютерных наук,***
***доктор технических наук***

***Мария Сергеевна ЦЫГАНОВА —***
***доцент кафедры компьютерных технологий***
***Института математики и компьютерных наук,***
***кандидат технических наук***

***Игорь Николаевич ПОЛИЩУК —***
***аспирант кафедры информационных систем***
***Института математики и компьютерных наук***

***Тюменский государственный университет***

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ФАЗ В ПРОЦЕССЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

**УДК 669.017.03; 51-72**

*АННОТАЦИЯ. Для определения режимов термической обработки стали необходимы термокинетические диаграммы распада аустенита. Построение этих диаграмм экспериментальным путем является сложным и крайне трудоемким процессом. В данной работе предлагается методика компьютерного моделирования процесса фазовых превращений, позволяющая определить кинетические параметры распада аустенита и рассчитать термокинетическую диаграмму на основе кинетических кривых изотермического превращения.*