

Заключение. Предложенный способ оценки глобальной ошибки не приводит к увеличению вычислительных затрат. Результаты расчетов подтверждают надежность оценки ошибки. Построенный алгоритм интегрирования с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы можно применять для решения нежестких задач, а также задач средней жесткости. В случае умеренной жесткости задачи алгоритм на основе явной численной формулы может конкурировать с алгоритмами на основе неявных численных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Хайер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
3. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 197 с.
4. Кнауб Л.В., Лаевский Ю.М., Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага на основе явного двухстадийного метода Рунге-Кутты // СибЖВМ. 2007. Т. 10. № 2. С. 177-185.
5. <http://www.netlib.org/odepack/index.html>.
6. Mazzia F., Iavernaro F. Test Set for Initial Value Problem Solvers // Department of Mathematics, University of Bari. August 2003. Available at <http://www.dm.uniba.it/testset>.
7. <http://pitagora.dm.uniba.it/testset/src/problems/medakzo.f>.

*Александр Григорьевич ИВАШКО —
профессор кафедры информационных систем
Института математики и компьютерных наук,
доктор технических наук*

*Мария Сергеевна ЦЫГАНОВА —
доцент кафедры компьютерных технологий
Института математики и компьютерных наук,
кандидат технических наук*

*Игорь Николаевич ПОЛИЩУК —
аспирант кафедры информационных систем
Института математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет*

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ФАЗ В ПРОЦЕССЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

УДК 669.017.03; 51-72

АННОТАЦИЯ. Для определения режимов термической обработки стали необходимы термокинетические диаграммы распада аустенита. Построение этих диаграмм экспериментальным путем является сложным и крайне трудоемким процессом. В данной работе предлагается методика компьютерного моделирования процесса фазовых превращений, позволяющая определить кинетические параметры распада аустенита и рассчитать термокинетическую диаграмму на основе кинетических кривых изотермического превращения.

Continuous cooling transformation diagrams of dissolving of an austenitic are necessary for definition of regimes of a thermal treatment. Building-up of these diagrams by experience is difficult and very labour-intensive process. In the given work the procedure of computer modeling of process of phase transformations is offered, allowing to define the kinetic parameters of dissolving of an austenitic and to construct the continuous cooling transformation diagram on the basis of the kinetic curves of isothermal transformations.

Определение научно обоснованных режимов термической обработки порошковых сталей требует точных количественных данных о кинетике фазовых превращений. Для получения таких данных необходимо построение диаграмм распада аустенита для различных марок сталей, имеющих всевозможные значения пористости, что является сложным и крайне трудоемким процессом. Поэтому очень важной является задача построения диаграмм фазовых превращений расчетным путем.

В работе [1] была представлена разработанная нами векторная имитационная модель фазовых превращений. Применимость этой модели к описанию кинетики распада аустенита порошковых сталей проверялась нами на примере изотермического превращения стали ПК40Н2М.

Сначала исследовалась модель стационарного зарождения. Кинетические параметры процесса (скорость зарождения центров новой фазы λ и линейная скорость роста l) подбирались так, чтобы кривые распада, полученные методом компьютерного моделирования, наилучшим образом описывали данные реального эксперимента [2]. С этой целью для каждого значения температуры T изотермической выдержки рассматривалась функция

$$Vm_T(\lambda, l) = \sum_{i=1}^{n_T} (y(\lambda, l, t_i) - y_i)^2, \quad (1)$$

где (t_i, y_i) — точки кинетической кривой, полученной в ходе реального эксперимента,

$y(\lambda, l, t_i)$ — доля аустенита, распавшегося к моменту времени t_i , по данным компьютерного моделирования,

n_T — число экспериментальных точек для температуры T .

Расчеты выполнялись следующим образом. Для текущих значений λ и l производился компьютерный эксперимент [1], моделирующий фазовое превращение, в ходе которого определялись значения функции $y(\lambda, l, t_i)$ в моменты возникновения событий в рассматриваемой системе. Затем с помощью линейной интерполяции на соответствующих отрезках вычислялись значения $y(\lambda, l, t_i)$ для заданных t_i .

Для определения оптимальных значений кинетических параметров в соответствии с методом наименьших квадратов ставилась задача

$$Vm_T(\lambda, l) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Важно отметить, что задача (2) имеет следующие особенности.

Во-первых, минимизируемая функция $Vm_T(\lambda, l)$ не задана аналитически. Поэтому классические методы нахождения экстремума функции нескольких переменных, подобные методу Ньютона и его модификациям, использующие как саму функцию, так и ее частные производные первого и второго порядков, неприменимы к данной задаче. В связи с этим для решения задачи (2) был выбран метод Хука-Дживса, который относится к методам прямого поиска и использует только значения функции [3]. Согласно этому методу, поиск минимума функции m

переменных состоит из последовательности шагов исследующего поиска вокруг базисной точки в направлении изменения одной из переменных, а затем, в случае успеха, следует поиск по образцу.

Во-вторых, учитывая стохастическую природу рассматриваемого процесса, следует иметь в виду, что при заданных λ , l и T значение функции $Vm_T(\lambda, l)$ представляет собой случайную величину (оно зависит от того, как именно распределяются зародыши новой фазы в исследуемой области). Это обстоятельство затрудняет применение методов оптимизации (включая и метод Хука-Дживса), так как изменение значения функции, которое ожидается в связи с изменением значения одного из параметров на каждом шаге процесса оптимизации, может не выходить за пределы интервала возможных значений случайной величины $Vm_T(\lambda, l)$ при данных λ , l и T .

Для получения корректных результатов оптимизации функции, определяемой в процессе имитационного моделирования, необходимо при проверке неравенств вида $Vm_T(\lambda_1, l_1) < Vm_T(\lambda_2, l_2)$ применять статистические критерии. В случае задачи (2) нами использовался следующий подход.

Для нескольких значений температуры изотермической выдержки T при одних и тех же значениях параметров λ и l , соответствующих каждой температуре, производилась серия компьютерных экспериментов, моделирующих фазовое превращение (не менее 100), в результате которых определялась серия значений $Vm_T^{(i)}(\lambda, l)$, $i = 1, 2, \dots, N$, где N — число экспериментов в серии. После этого по

данным полученной выборки оценивалось среднее значение $\overline{Vm_T}(\lambda, l)$, а также среднее квадратическое отклонение, и проверялась гипотеза о нормальном распределении случайной величины $Vm_T(\lambda, l)$. Проверка гипотезы выполнялась с помощью критерия Пирсона (критерий χ^2) [4, 5] при уровне значимости $\alpha = 0,05$. После проведения необходимых расчетов для большинства выборок следовало сделать вывод о том, что гипотеза о нормальном распределении не противоречит опытным данным.

В соответствии с известным эмпирическим правилом [5], t -критерий, используемый при сравнении средних, считается относительно нечувствительным к отклонениям исследуемой случайной величины от нормального закона, особенно в случае больших выборок. Поэтому мы посчитали возможным использовать этот критерий в процессе минимизации функции $Vm_T(\lambda, l)$.

Алгоритм, реализующий минимизацию функции $Vm_T(\lambda, l)$ по методу Хука-Дживса с учетом стохастической природы процесса, описываемого этой функцией, состоит в следующем.

1. Выбирается начальная базисная точка $a_0 = (\lambda_0, l_0)$ и длина шага h_j для каждой из переменных, $j = 1, 2$.

2. Исследуется локальное поведение функции $Vm_T(a) = Vm_T(\lambda, l)$ в точке a_0 . Для этого:

2.1. Производится серия компьютерных экспериментов (N экспериментов в серии), по результатам которой вычисляется выборочная средняя

$$\overline{Vm_T}(a_0) = \overline{Vm_T}(\lambda_0, l_0).$$

2.2. Значение первой переменной увеличивается на длину шага. Проводится новая серия экспериментов и вычисляется значение $\overline{Vm_T}(\lambda_0 + h_1, l_0)$. Если $\overline{Vm_T}(\lambda_0 + h_1, l_0) < \overline{Vm_T}(\lambda_0, l_0)$, то выдвигается гипотеза $H_0 : M(Vm_T(\lambda_0 + h_1, l_0)) <$

$\bar{v} < M(Vm_T(\lambda_0, l_0))$, для проверки которой используется t -критерий [5] при уровне значимости $\alpha=0,05$. Средние квадратические отклонения $\sigma(Vm_T(\lambda_0 + h_1, l_0))$ и $\sigma(Vm_T(\lambda_0, l_0))$ неизвестны (имеются только их оценки, найденные по выборке); кроме того, в общем случае нет оснований предполагать $\sigma(Vm_T(\lambda_0 + h_1, l_0)) = \sigma(Vm_T(\lambda_0, l_0))$. В то же время, выборки имеют достаточно большой объем (N не менее 100), поэтому можно считать выборочные СКО достаточно хорошими оценками генеральных СКО, и, следовательно, считать СКО известными приближенно. Учитывая сказанное, для проверки гипотезы можно использовать статистику [5]

$$u' = \frac{(\overline{Vm_T}(\lambda_0, l_0) - \overline{Vm_T}(\lambda_0 + h_1, l_0))\sqrt{N}}{\sqrt{\sigma^2(Vm_T(\lambda_0, l_0)) + \sigma^2(Vm_T(\lambda_0 + h_1, l_0))}}, \quad (3)$$

где N — объем каждой из выборок.

Наблюдаемое значение u' (вычисленное по данным выборки) сравнивается с табулированным значением $u_{1-\alpha}$. При $u' > u_{1-\alpha}$ гипотеза принимается, в противном случае — отвергается.

В случае принятия гипотезы H_0 в качестве новой базисной точки берется $a_1 = (\lambda_0 + h_1, l_0)$; в противном случае значение первой переменной уменьшается на длину шага, проводится еще одна серия экспериментов и вычисляется значение $\overline{Vm_T}(\lambda_0 - h_1, l_0)$. Если $\overline{Vm_T}(\lambda_0 - h_1, l_0) < \overline{Vm_T}(\lambda_0, l_0)$, то выдвигается гипотеза $H_0 : M(Vm_T(\lambda_0 - h_1, l_0)) < M(Vm_T(\lambda_0, l_0))$, которая проверяется по t -критерию как описано выше. В случае принятия гипотезы в качестве новой базисной точки a_1 берется $a_1 = (\lambda_0 - h_1, l_0)$.

Если ни один из перечисленных шагов не приводит к уменьшению среднего значения функции, то точка a_0 остается неизменной, и изменению подвергается значение второй переменной. Вычисляются значения $\overline{Vm_T}(\lambda_0, l_0 \pm h_2)$ и выполняется проверка соответствующих гипотез. В результате появляется базисная точка a_1 .

2.3. Если $a_0 = a_1$, т. е. уменьшение функции не было достигнуто, то исследование повторяется вокруг той же базисной точки a_0 , но с уменьшенной длиной шага.

2.4. Если $a_0 \neq a_1$, то производится поиск по образцу.

3. Поиск по образцу производится следующим образом.

3.1. Из базисной точки a_1 делается шаг в направлении $a_1 - a_0$, поскольку поиск в этом направлении уже привел к уменьшению значения функции. Вычисляется значение $\overline{Vm_T}(a_0 + 2 \cdot (a_1 - a_0))$.

3.2. Исследование продолжается вокруг точки $a_0 + 2 \cdot (a_1 - a_0)$. Если наименьшее из средних значений на шаге 2.2 меньше значения $\overline{Vm_T}(a_1)$ и t -критерий предписывает принять соответствующую гипотезу, то получаем новую базисную точку a_2 , после чего повторяется шаг 2.1. В противном случае производится не поиск по образцу из точки a_1 , а продолжается исследование в этой точке.

4. Процесс завершается, когда длины шагов будут уменьшены до заданного значения.

Для реализации описанной выше методики нами было разработано программное обеспечение и проведены соответствующие расчеты.

На рис. 1 представлены результаты компьютерного моделирования процесса распада аустенита и данные реального эксперимента [2] для стали ПК40Н2М при температуре изотермической выдержки $T=380^{\circ}\text{C}$. На рис. 2 и 3 показана зависимость кинетических параметров превращения от температуры изотермической выдержки.

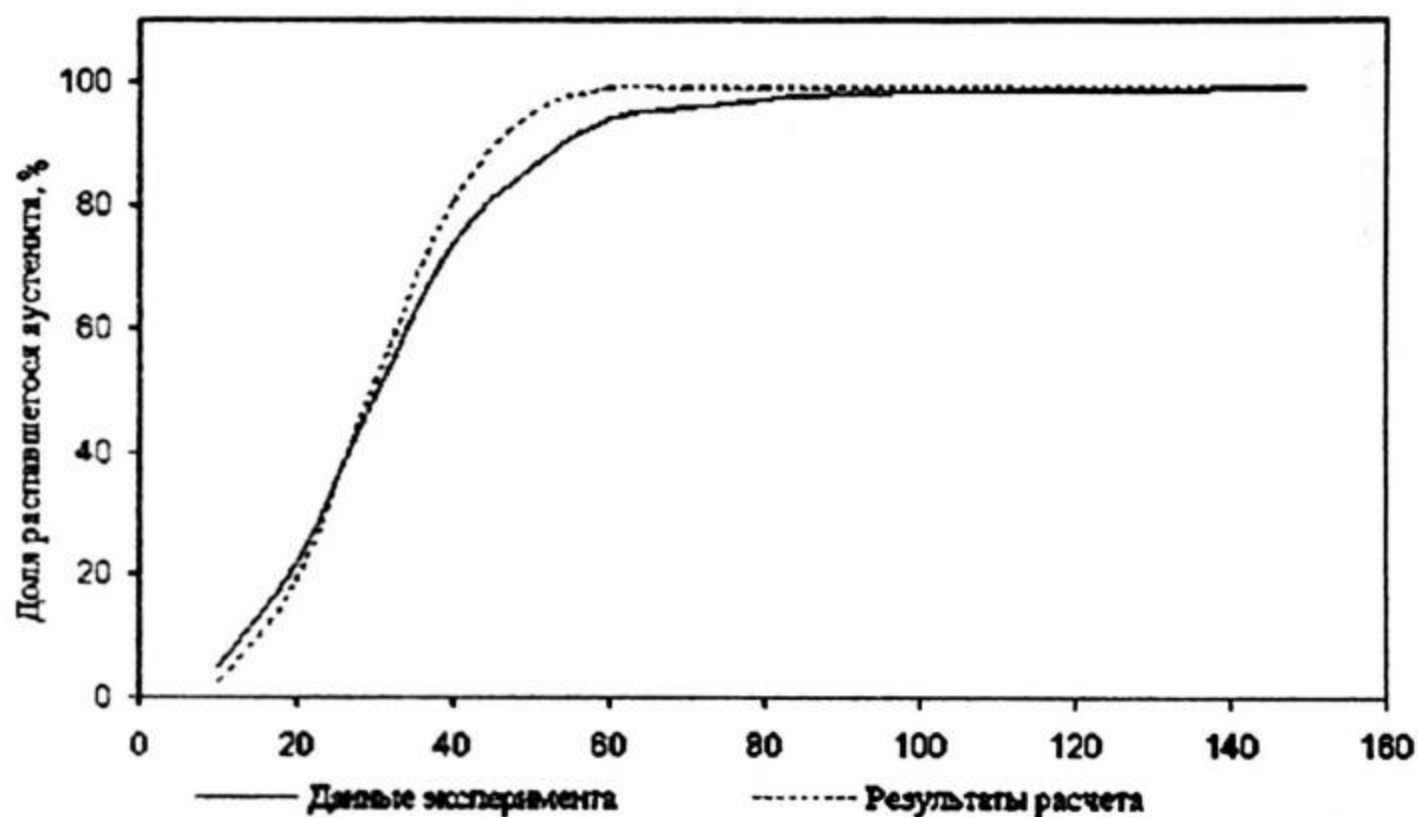


Рис. 1. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при температуре 380°C : данные эксперимента и расчет согласно модели стационарного зарождения

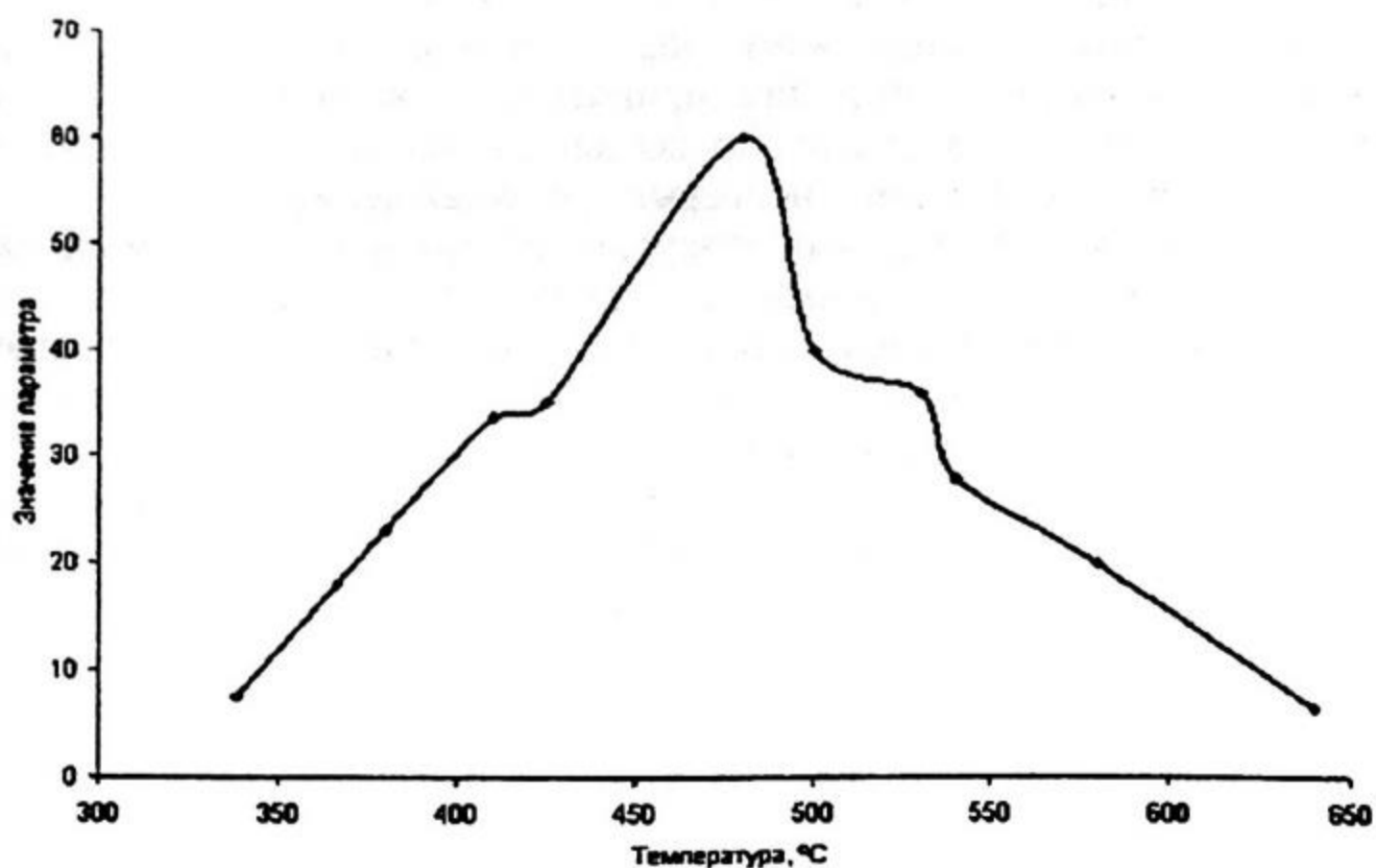


Рис. 2. Зависимость скорости зарождения центров новой фазы от температуры изотермической выдержки

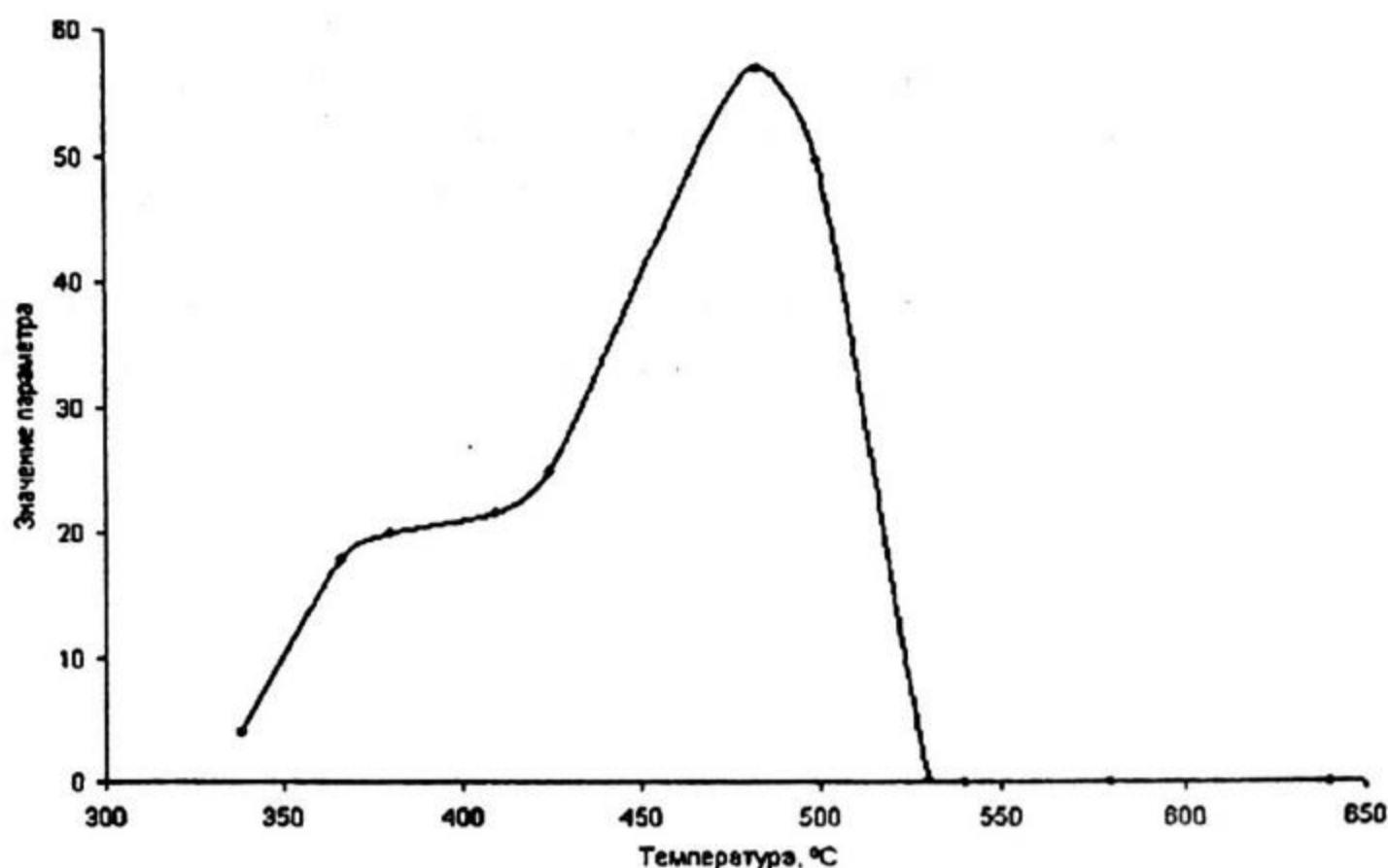


Рис. 3. Зависимость линейной скорости роста от температуры изотермической выдержки

Анализируя полученные результаты, нужно отметить следующее. С одной стороны, разработанная модель при правильном выборе кинетических параметров позволяет адекватно описывать рассматриваемый процесс фазовых превращений. С другой стороны, характер зависимости кинетических параметров превращения, полученных в результате оптимизации, от температуры хорошо согласуется с известными положениями теории термической обработки стали.

С учетом сказанного нами была предпринята попытка использовать результаты, полученные для изотермических процессов, в качестве основы для моделирования фазовых превращений при непрерывном охлаждении.

Чтобы построить модель фазовых превращений при непрерывном охлаждении, необходимо для каждого режима охлаждения описать зависимость температуры от времени, а также зависимость кинетических параметров превращения от температуры (для конкретного режима охлаждения — от времени) и при проведении расчетов учитывать эти зависимости.

За основу были взяты кривые охлаждения, полученные экспериментально для стали ПК40Н2М [2]: для каждого режима охлаждения имелась серия значений $T_i = T(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_k$. Эти значения аппроксимировались многочленами вида

$$T(t) = \sum_{j=0}^5 \beta_j \cdot t^j, \quad (4)$$

причем при всех режимах охлаждения полагалось $T(0) = 820^\circ\text{C}$ (температура аустенитизации, от которой начиналось охлаждение).

Для каждого режима охлаждения определялся момент времени t_{727} , для которого $T(t_{727}) = 727^\circ\text{C}$. Уравнение

$$\sum_{j=0}^5 \beta_j \cdot t^j = 727 \quad (5)$$

решалось приближенно, методом половинного деления [6] с точностью до 0,01 с. При $t \in [0, t_{727}]$ температура охлаждаемого образца остается выше критической, и исследуемый образец находится в области устойчивости аустенита, поэтому никакие фазовые превращения происходить не могут. Начиная с момента времени $t = t_{727}$ (т. е. в области температур ниже 727°C) становится возможным распад аустенита, что и учитывает предлагаемая ниже модель.

Аналогичным образом для каждого режима охлаждения определялся момент $t = t_{M_H}$, где M_H — температура начала мартенситного превращения (для рассматриваемой стали ПК40Н2М пористости 3% эта температура составляла $M_H = 301^\circ\text{C}$). При достижении исследуемым образцом температуры M_H скорость диффузии становится недостаточной для того, чтобы могло происходить фазовое превращение рассматриваемого типа, поэтому в рамках данной модели предполагалось, что в момент времени $t = t_{M_H}$ распад аустенита по немартенситному механизму заканчивается.

Таким образом, временные границы моделируемого фазового превращения для каждого режима охлаждения определялись отрезком $[t_{727}, t_{M_H}]$.

Зависимость кинетических параметров превращения от времени учитывалась следующим образом. Сначала определялась зависимость этих параметров от температуры (эта зависимость имеет вид общей закономерности, не зависящей от скорости охлаждения — см. рис. 2, 3). Предполагалось, что при $T = 727^\circ\text{C}$ и скорость зарождения, и скорость роста зародышей новой фазы равны нулю (температура термодинамического равновесия двух фаз), то же самое — при $T = M_H$ (температура критического замедления скорости диффузии). Для построения аналитической зависимости $\lambda = \lambda(T)$ и $l = l(T)$ на отрезке $[M_H, 727]$ использовались значения кинетических параметров, полученные в результате оптимизации на этапе моделирования изотермического превращения. Применялась линейная интерполяция указанных значений, в результате чего были получены кусочно-линейные функции $\lambda(T)$ и $l(T)$, выражающие зависимость кинетических параметров превращения от температуры.

Далее для каждого режима охлаждения определялись моменты времени $t = t_{T_k}$, $k = 1, 2, \dots, 11$, в которые достигались значения температуры, соответствующие узлам интерполяции. На промежутках $[t_{727}, t_{T_1}]$, $[t_{T_1}, t_{T_2}]$, ..., $[t_{T_{10}}, t_{T_{11}}]$, $[t_{T_{11}}, t_{M_H}]$ функции $\lambda = \lambda(t)$ и $l = l(t)$ получались подстановкой в соотношения $\lambda = \lambda(T)$ и $l = l(T)$ вместо T выражений вида (4) со значениями коэффициентов β_j , соответствующими данному режиму охлаждения.

Можно считать, что поток τ_j моментов поступления в систему заявок на возникновение объектов (зародышей новой фазы), как и в случае изотермического превращения, обладает свойствами ординарности и отсутствия последействия, однако интенсивность этого потока $\lambda = \lambda(t)$ при непрерывном охлаждении меняется со временем. Учитывая сказанное, для определения промежутков времени t_j между поступлениями заявок в систему нельзя применять алгоритм, приведенный в [1]; этот алгоритм следует модифицировать.

В случае нестационарного пуассоновского потока, как показано, например, в [7], последовательность $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ промежутков времени между поступлениями заявок может быть сгенерирована, исходя из равенства

$$\int_0^{t+t_k} \lambda(z) dz = -\ln R_k, \quad (6)$$

где R_k — случайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$.

Поэтому для каждого режима охлаждения необходимо выполнить следующее. Полагая в равенстве (6) $t=0$, получить уравнение для определения t_1 :

$$\int_0^{t_1} \lambda(z) dz = -\ln R_1. \quad (7)$$

Учитывая, что функция $\lambda(t)$ является кусочно-полиномиальной, вычисление интеграла не представляет каких-либо проблем, и уравнение (7) сводится к алгебраическому уравнению шестой степени. С точки зрения решаемой задачи достаточно получить приближенное решение уравнения с точностью до 0,01 с.

Чтобы найти t_2 , следует в уравнении (6) положить $t=t_1$, найденное на предыдущем шаге, и решить относительно t_2 уравнение

$$\int_{t_1}^{t_1+t_2} \lambda(z) dz = -\ln R_2; \quad (8)$$

на $k+1$ -м шаге $t = \sum_{j=1}^k t_j$ и t_{k+1} определяется из уравнения

$$\int_{\sum_{j=1}^k t_j}^{\sum_{j=1}^k t_j + t_{k+1}} \lambda(z) dz = -\ln R_{k+1}. \quad (9)$$

Получив последовательность $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, для каждого режима охлаждения, можно определить моменты τ_j поступления заявок на возникновение центров новой фазы в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_1 \\ \tau_2 &= t_1 + t_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_k &= t_1 + t_2 + \dots + t_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения объема, занятого новой фазой, при непрерывном охлаждении так же, как и в случае изотермической выдержки, может применяться метод Монте-Карло, как это описано в [1]. Однако следует учитывать, что и скорость роста вновь образованных зародышей не является постоянной, а зависит от времени. Поэтому при проверке выполнения неравенства

$$(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \leq r_i^2 \quad (11)$$

(принадлежность случайной точки к данному шару) в момент времени t под величиной r_i в правой части неравенства следует понимать

$$r_i = r_0 + \int_{\tau_i}^t l(z) dz, \quad (12)$$

где зависимость $l(t)$ предварительно определена для каждого режима охлаждения по описанной ранее методике.

Нами было разработано программное обеспечение, реализующее расчеты в соответствии с рассмотренным алгоритмом.

На рис. 4 представлены результаты компьютерного моделирования распада аустенита и данные реального эксперимента [2] для стали ПК40Н2М при охлаждении со скоростью $2,5^\circ\text{C}/\text{сек}$.

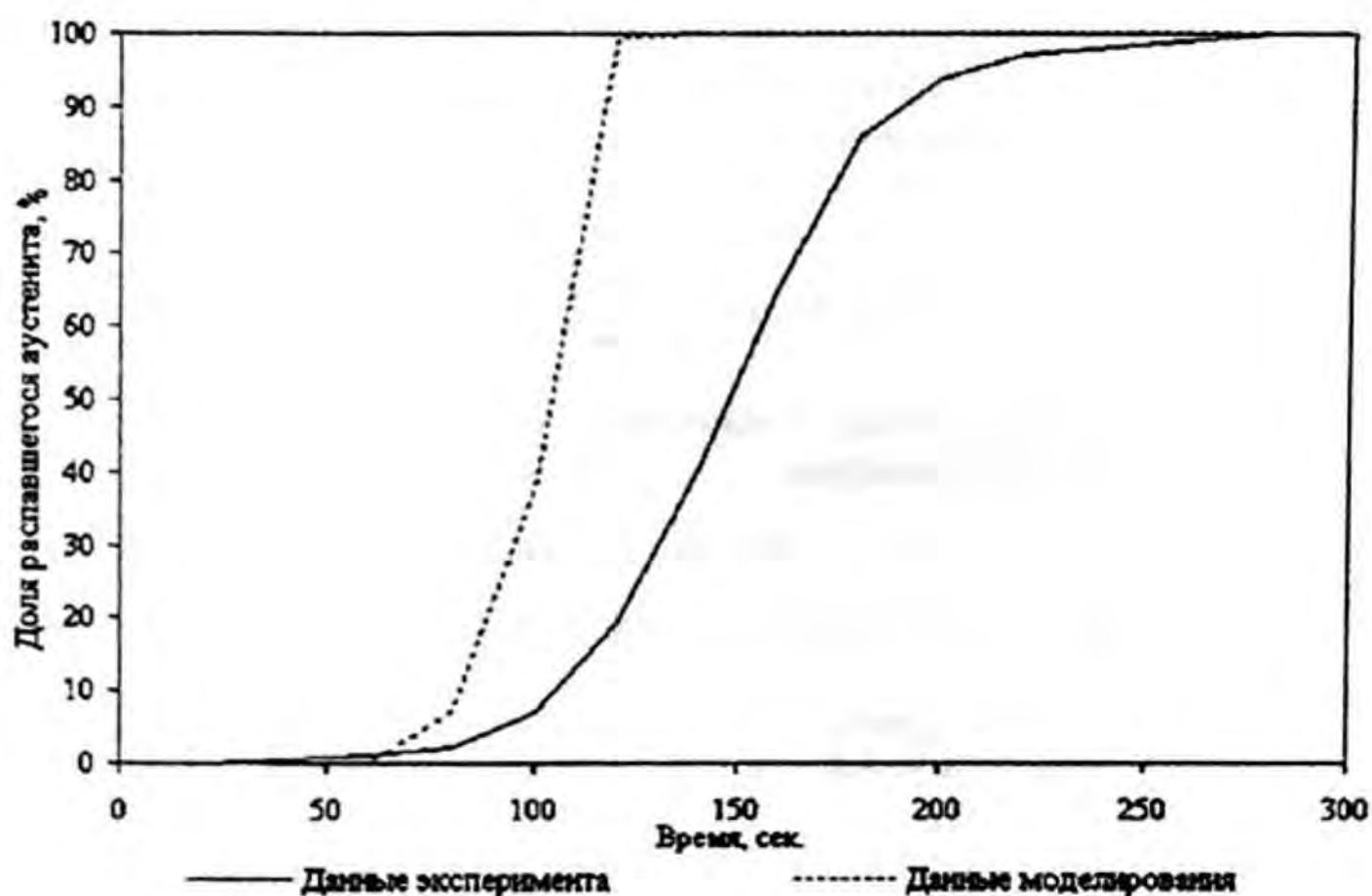


Рис. 4. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при охлаждении со скоростью $2,5^\circ\text{C}/\text{сек}$: данные эксперимента и расчет согласно модели стационарного зарождения

Как видно из графиков, расчет дает сильно завышенную скорость распада аустенита при непрерывном охлаждении по сравнению с данными эксперимента. По нашему мнению, это обстоятельство может иметь следующее объяснение.

Модель стационарного зарождения предполагает, что превращение в полном объеме начинается сразу же после достижения образцом заданного значения температуры и не учитывает наличие так называемого периода нестационарности на начальном этапе превращения. На существование такого периода указывают многие исследователи [8]. В течение периода нестационарности кинетические параметры превращения и особенно вероятность образования зародышей новой фазы еще не приняли своих значений, характерных для данной температуры (значение вероятности изменяется от нуля до некоторого постоянного значения). Многие исследователи связывают это с тем, что зародыши новой фазы, не достигшие критического для данной температуры размера, могут как расти, так и распадаться с определенной вероятностью.

Как показывают проведенные нами расчеты, указанный недостаток модели стационарного зарождения в случае изотермического превращения «исправляется» путем корректировки получаемого значения скорости зарождения. Однако при непрерывном охлаждении система находится в нестационарном состоянии не в течение относительно короткого промежутка времени, а постоянно, и пренебрегать возможностью самоуничтожения зародышей становится невозможно.

В связи с указанными обстоятельствами был сделан вывод: для моделирования фазовых превращений при непрерывном охлаждении следует использовать модель нестационарного зарождения [1], которая учитывает как поток заявок на возникновение зародышей новой фазы (интенсивность потока λ), так и поток заявок на их уничтожение (интенсивность потока μ).

Описание фазовых превращений как при постоянной температуре, так и при непрерывном охлаждении с помощью модели нестационарного зарождения в целом производится по аналогии с рассмотренными выше алгоритмами. Отличие сводится к учету во всех соотношениях дополнительного параметра μ . Так, для определения оптимальных значений кинетических параметров превращения в случае изотермической выдержки вместо функции (1) следует рассматривать функцию

$$Vm_T(\lambda, \mu, l) = \sum_{i=1}^{n_T} (y(\lambda, \mu, l, t_i) - y_i)^2, \quad (13)$$

где μ — интенсивность потока заявок на уничтожение зародышей, а вместо задачи (2) — задачу оптимизации

$$Vm_T(\lambda, \mu, l) \rightarrow \min. \quad (14)$$

Подобная корректировка была нами применена ко всем рассмотренным выше алгоритмам.

Результаты расчетов, проведенных с использованием нестационарной модели, а также данные реальных экспериментов для стали ПК40Н2М представлены на рис. 5-8. Анализируя эти результаты, можно отметить, что данная модель позволяет адекватно описывать процесс фазовых превращений как при постоянной температуре, так и при непрерывном охлаждении.

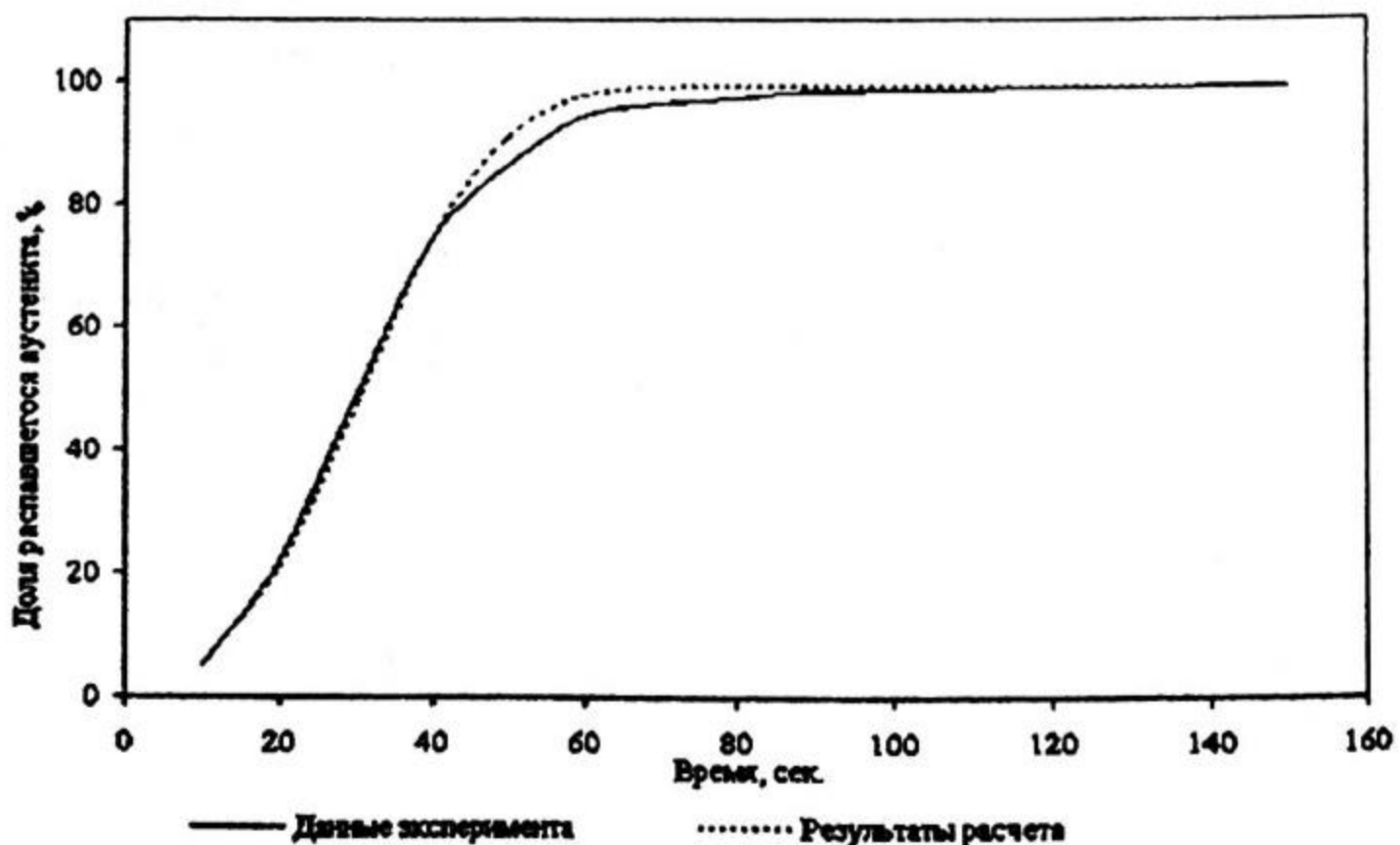


Рис. 5. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при температуре 380°C: данные эксперимента и расчет согласно модели нестационарного зарождения

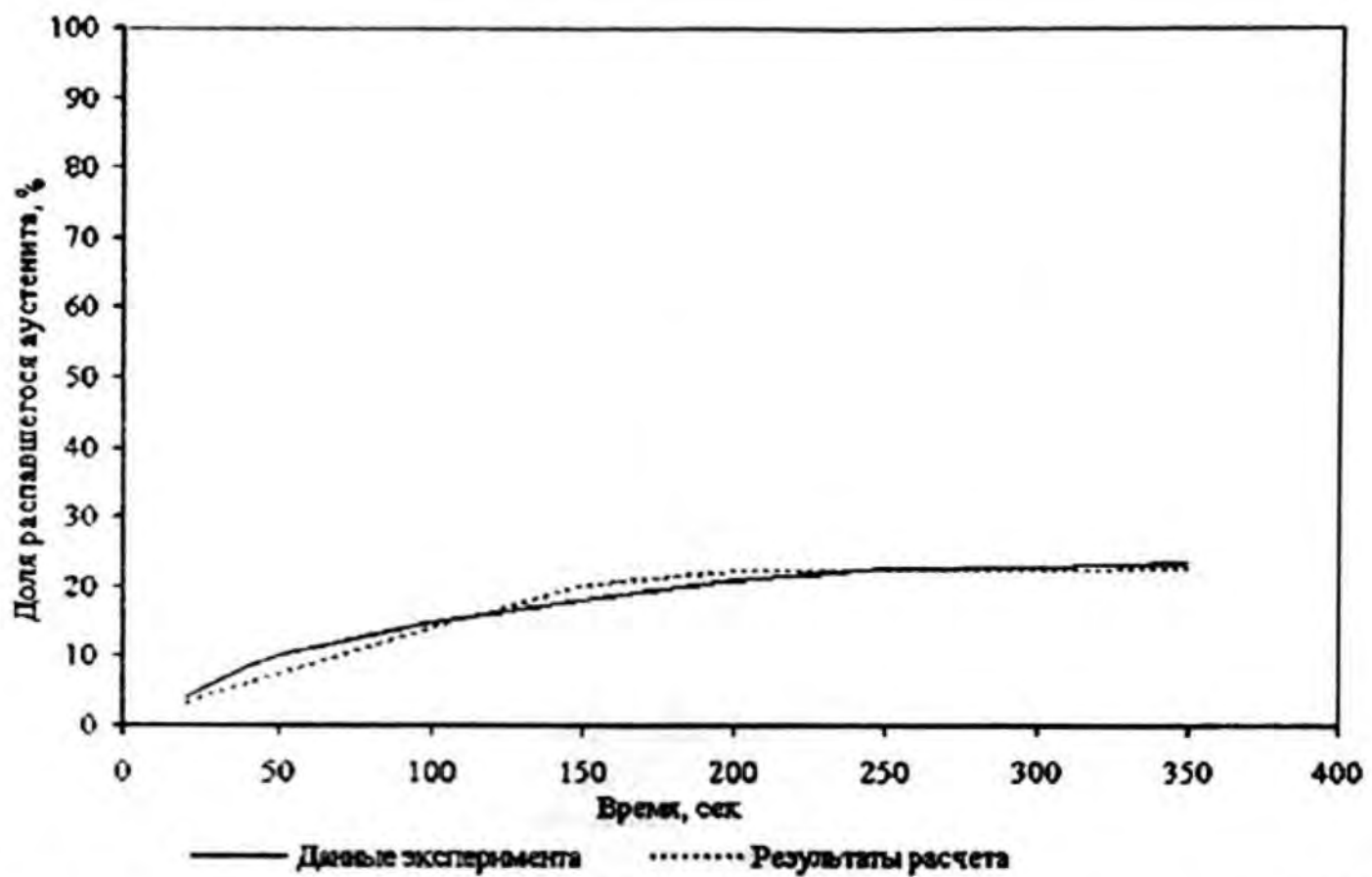


Рис. 6. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при температуре 580°C: данные эксперимента и расчет согласно модели нестационарного зарождения

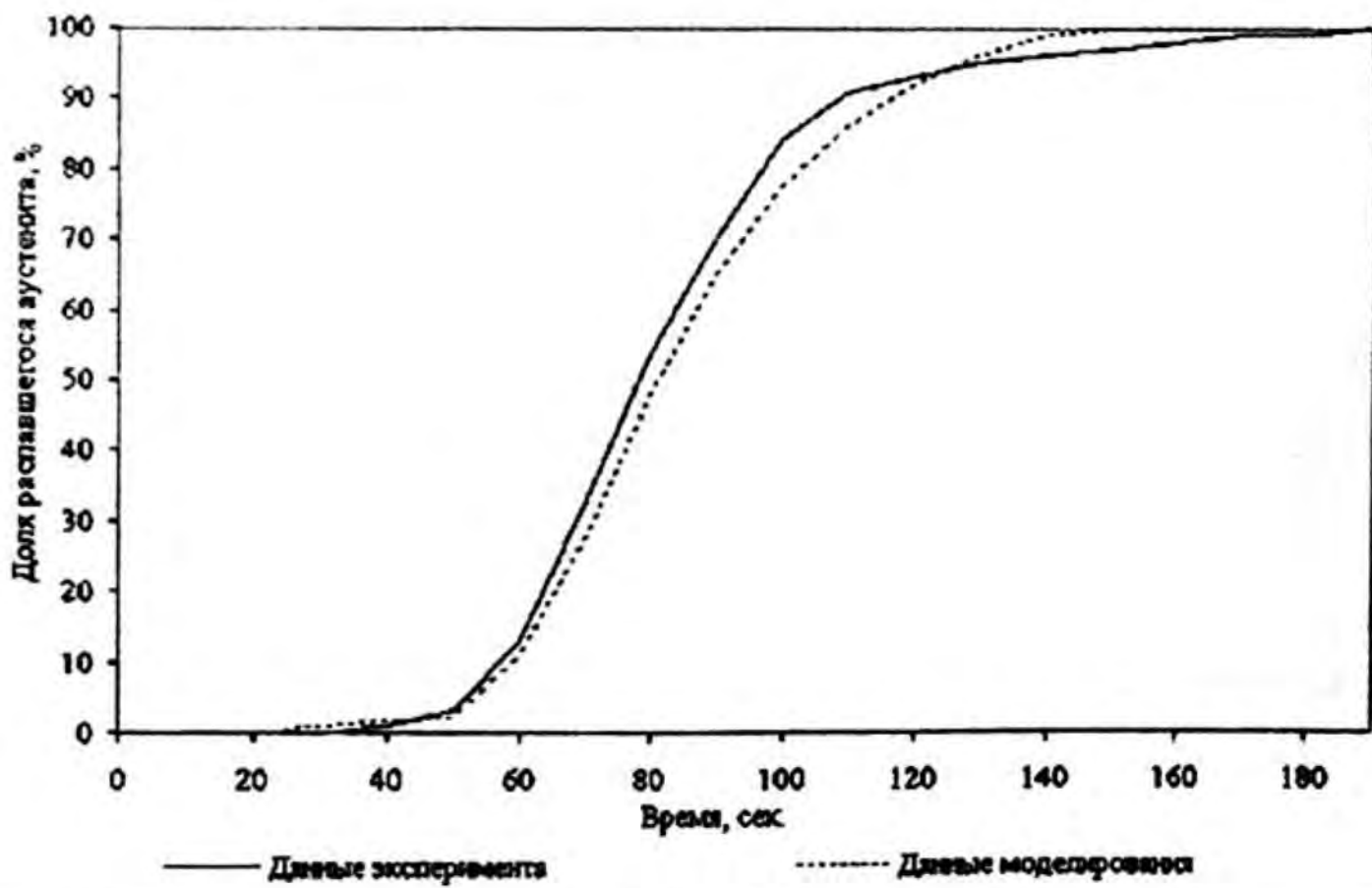


Рис. 7. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при охлаждении со скоростью 7°C/сек: данные эксперимента и расчет согласно модели нестационарного зарождения

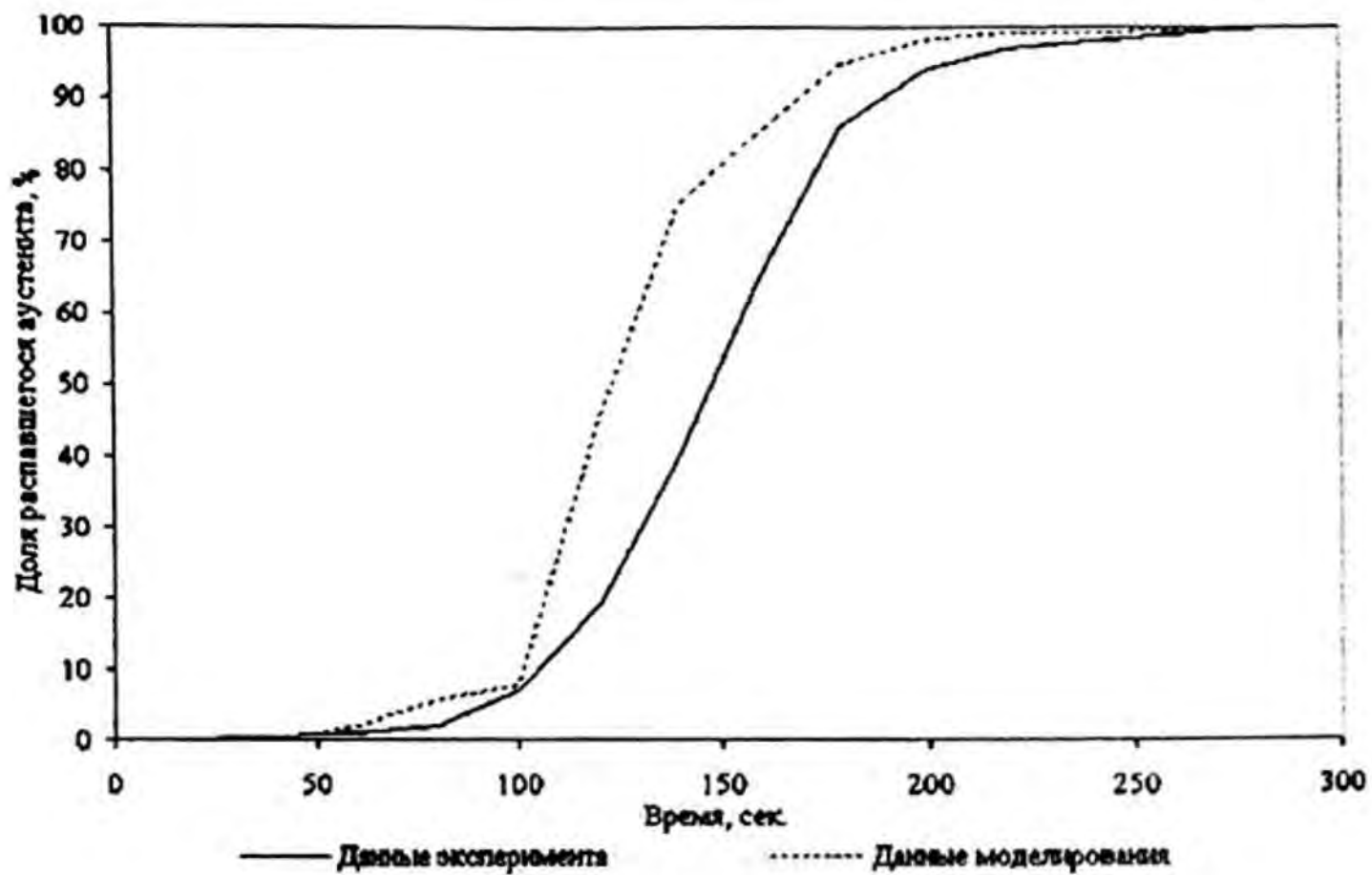


Рис. 8. Распад аустенита стали ПК40Н2М пористости 3% при охлаждении со скоростью 2,5°C/сек: данные эксперимента и расчет согласно модели нестационарного зарождения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивашко А.Г., Цыганова М.С., Полищук И.Н. Имитационное моделирование фазовых превращений при термической обработке порошковых сталей // Вестник ТюмГУ. 2007. № 5.
2. Гуревич Ю.Г., Ивашко А.Г. Кинетика распада переохлажденного аустенита порошковых сталей. Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 1998.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: «Радио и связь», 1988.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Издательский центр «Академия», 2005.
5. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М.: Наука, 1978.
8. Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. Ч. 1. М.: Мир, 1978.