

Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ —
доцент кафедры математического
анализа и теории функций

Института математики и компьютерных наук,
кандидат физико-математических наук

Наталья Александровна СПИРИДОНОВА —
ст. преподаватель кафедры
математического моделирования

Института математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 539.4.014.11

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

АННОТАЦИЯ. В статье представлены результаты исследования распределения нормальных усилий вдоль геодезических линий и линий кривизны круговой конической и эллиптической оболочек. Кроме того, проведено сравнение результатов для выяснения, насколько форма ортогонального сечения оболочки может влиять на полученное распределение усилий.

In the article the results of research of distributing are presented normal efforts along geodesic lines and lines of curvature of circle conical and elliptic shells. In addition, comparison of results is conducted for finding out as far as the form of orthogonal section of shell can influence on the got distributing of efforts.

Задача о распределении усилий вдоль различных линий на конической оболочке найдет свое применение при проектировании и строительстве зданий, резервуаров и других объектов, где используются оболочечные конструкции данного вида. Решение ищется в рамках теории Киргоффа—Лява первого приближения. Состояние безмоментное. Оболочка имеет шарнирно опертый неподвижный край по линии $r = \text{const}$.

Рассмотрим коническую оболочку, в поперечном сечении которой — эллипс (см. рис. 1), где γ_0 — угол между образующей и высотой конуса в сечении, проходящем через большую полуось основания. Соотнесем поверхность с ортогональной сетью координат: r — расстояние, отсчитываемое от вершины конуса вдоль образующей, φ — угол поворота плоскости, проходящей через высоту и образующую конуса, отсчитываемый от аналогичной плоскости, проходящей через высоту и большую полуось основания.

Уравнение равновесия эллиптической конической оболочки с учетом равенства нулю перерезывающих усилий и моментов запишем в виде [1]:

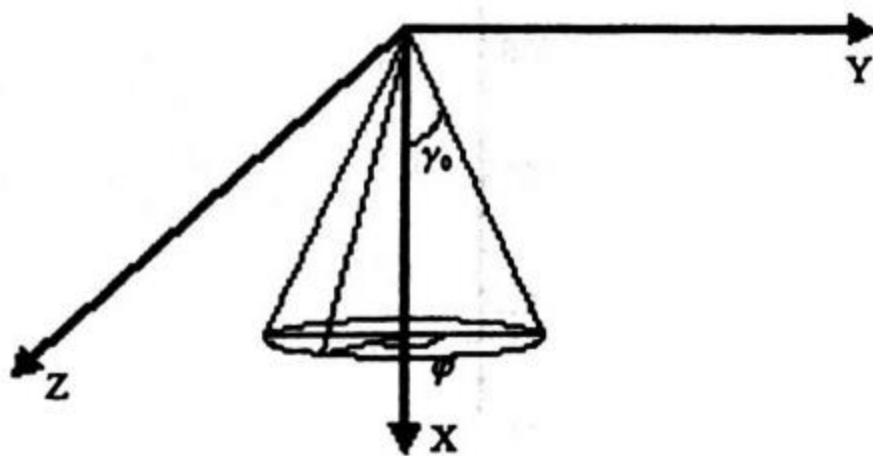


Рис. 1

$$\begin{cases} \frac{\partial(N_r \cdot r)}{\partial r} - N_\varphi + \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + r \cdot p_1 = 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot S)}{\partial r} + r \cdot p_2 = 0, \\ -\frac{\psi_1(\varphi)}{\operatorname{tg}(\gamma_0)} N_\varphi + r \cdot p_3 = 0 \end{cases}$$

где N_r, N_φ — нормальные усилия на гранях $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ соответственно, $\partial \varphi_1 = \sin(\gamma_0) \cdot f(\varphi) \cdot \partial \varphi$, S — сдвигающее усилие, p_i — проекции внешней нагрузки на оси декартовой системы координат, $\psi_1(\varphi), f(\varphi)$ — функции, характеризующие ортогональное сечение конуса, в частности, если в сечении — окружность, то $\psi_1(\varphi) = f(\varphi) = 1$. Разложим внешнюю нагрузку в ряд Фурье следующим образом [1]:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n} \cdot \cos(n\varphi), p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \cdot \sin(n\varphi), p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{3n} \cdot \cos(n\varphi),$$

p_{1n}, p_{2n}, p_{3n} — зависят только от r . В дальнейшем не будем записывать знак суммы и рассмотрим только лишь один член ряда. Полученные результаты от разных членов ряда будем суммировать в конце расчета.

Из третьего уравнения системы для n -го члена ряда всегда следует

$$N_\varphi = \frac{r \cdot \operatorname{tg}(\gamma_0) \cdot p_{3n} \cdot \cos(n\varphi)}{\psi_1(\varphi)}. \quad (1)$$

Величина нормального усилия на грани $\varphi = \text{const}$ (N_φ), как видно из уравнения (1), зависит только от формы поперечного сечения и вида внешней нагрузки. На рис. 2 показано распределение данного усилия для кругового (показано сплошной линией) и эллиптического (показано точками) конусов под действием одного и того же вида нагрузки.

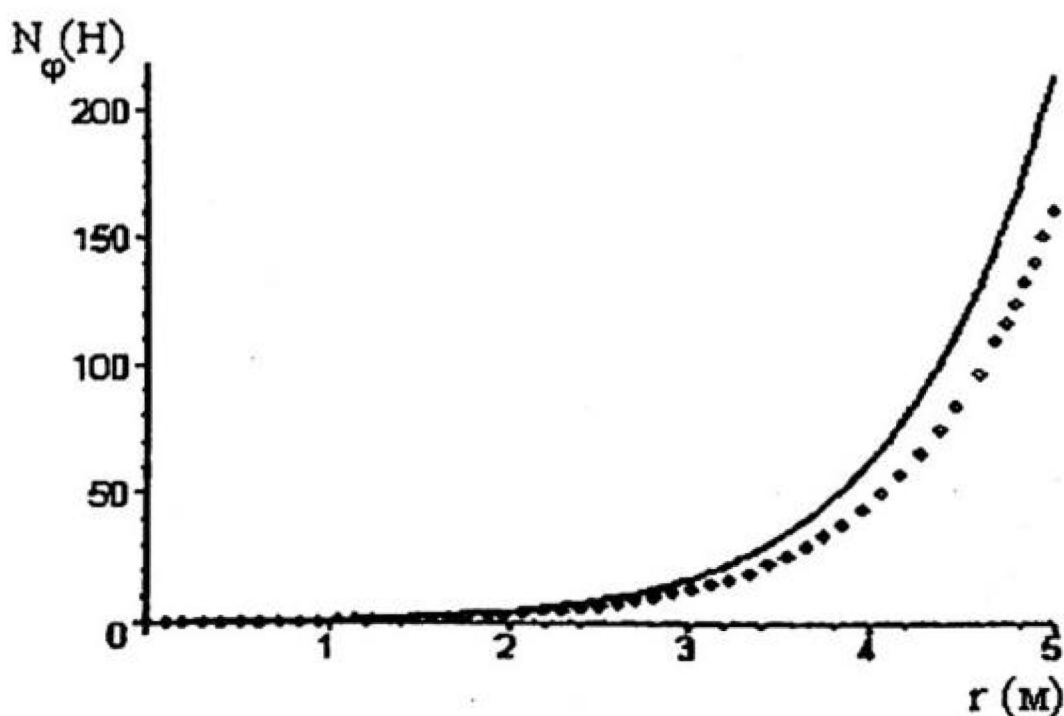


Рис. 2

Основываясь на полученных результатах, можно сделать следующий вывод: усилие на грани $\varphi = \text{const}$ при значениях $r \geq 3$ для кругового конуса возрастает

быстрее, чем для эллиптического. Таким образом, уменьшить данное усилие можно за счет изменения формы конуса.

Выясним вопрос зависимости N_r — нормального усилия на грани $r=const$ и S — сдвигающего усилия от линии, вдоль которой исследуется усилие. В качестве таких линий возьмем линии кривизны конуса и геодезические линии.

При $\varphi=const$ получим образующие конуса, которые являются линиями кривизны независимо от формы поперечного сечения. Из исходной системы для случая $\psi_1(\varphi)=f(\varphi)=1$ и $p_{1n}=p_{2n}=p_{3n}=e^r$, имеем:

$$S = \frac{(3r^2 - 6r + 6 + 2n\sqrt{3}r - 2n\sqrt{3}) \cdot e^r \cdot \sin(n\varphi)}{3r^2},$$

$$N_r = \frac{\cos(n\varphi) \cdot e^r}{3r^2} (\sqrt{3}r^2 - r\sqrt{3} + 3nr - 3r^2 + 3r - 6n + 2n^2\sqrt{3}).$$

При интегрировании уравнений вдоль линии $r=const$ — для кругового конуса эти линии представляют собой окружности — имеем:

$$S = \left(\frac{n \cdot p_{3n}}{2r \cdot \operatorname{tg}(\gamma_0) \cdot \sin(\gamma_0)} - \frac{r \cdot p_{2n}}{2} \right) \cdot \sin(n\varphi),$$

$$N_r = \left\{ \frac{p_{3n}}{r \cdot \operatorname{tg}(\gamma_0)} - p_{1n} \cdot r - \frac{n}{\sin(\gamma_0)} \cdot \left(\frac{n \cdot p_{3n}}{2r \cdot \operatorname{tg}(\gamma_0) \cdot \sin(\gamma_0)} - \frac{r \cdot p_{2n}}{2} \right) \right\} \cdot \cos(n\varphi)$$

Используем дифференциальное уравнение, определяющее геодезическую линию поверхности [2]:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\partial_v E}{2G} \cdot \left(\frac{du}{dv} \right)^3 + \left(\frac{\partial_u E}{2E} - \frac{\partial_u G}{G} \right) \cdot \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + \left(\frac{\partial_v E}{E} - \frac{\partial_v G}{2G} \right) \cdot \left(\frac{du}{dv} \right) - \frac{\partial_u G}{2E} = 0, \quad (2)$$

где u, v — координаты ортогональной системы координат; E, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Получим следующее уравнение геодезических линий кругового конуса:

$$r = \frac{\sin(\gamma_0)}{C'_1 \cdot \sin(\sin(\gamma_0) \cdot \varphi) - C'_2 \cdot \cos(\sin(\gamma_0) \cdot \varphi)}$$

Найдем выражения для усилий вдоль геодезической линии, соответствующей конкретным начальным условиям на круговом конусе:

$$S = r^2 \cdot (10,81\varphi^2 - 79,18\varphi^3 + 1186,94\varphi^4 - 14708,69\varphi^5 + 160539,26\varphi^6)$$

$$N_r = r^{-1} \cdot (25,51\varphi - 3063,42\varphi^2 - 17490,97\varphi^3 - 215122,17\varphi^4 + 296210,28\varphi^5 + 769542,52\varphi^6)$$

На рис. 3 приведен график распределения нормального усилия N_r вдоль геодезической линии на круговом конусе.

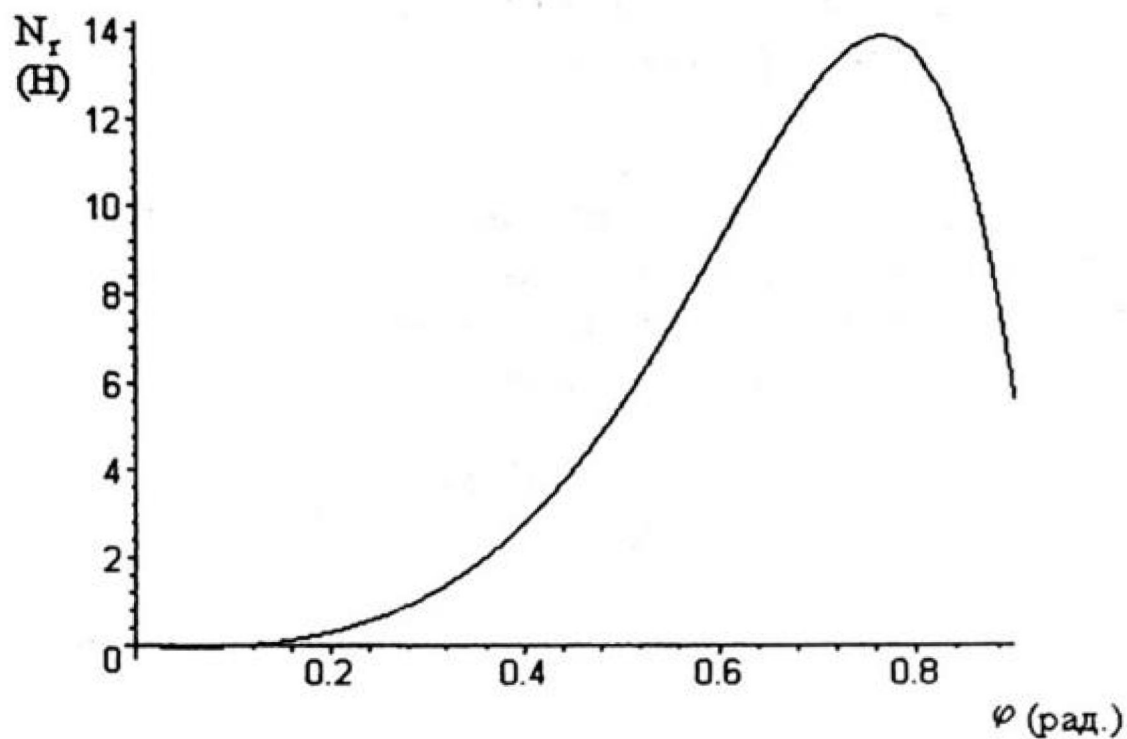


Рис. 3.

График распределения нормального усилия на грани $r=const$ вдоль окружности и геодезической (изображено точками) на круговом конусе показан на рис. 4.

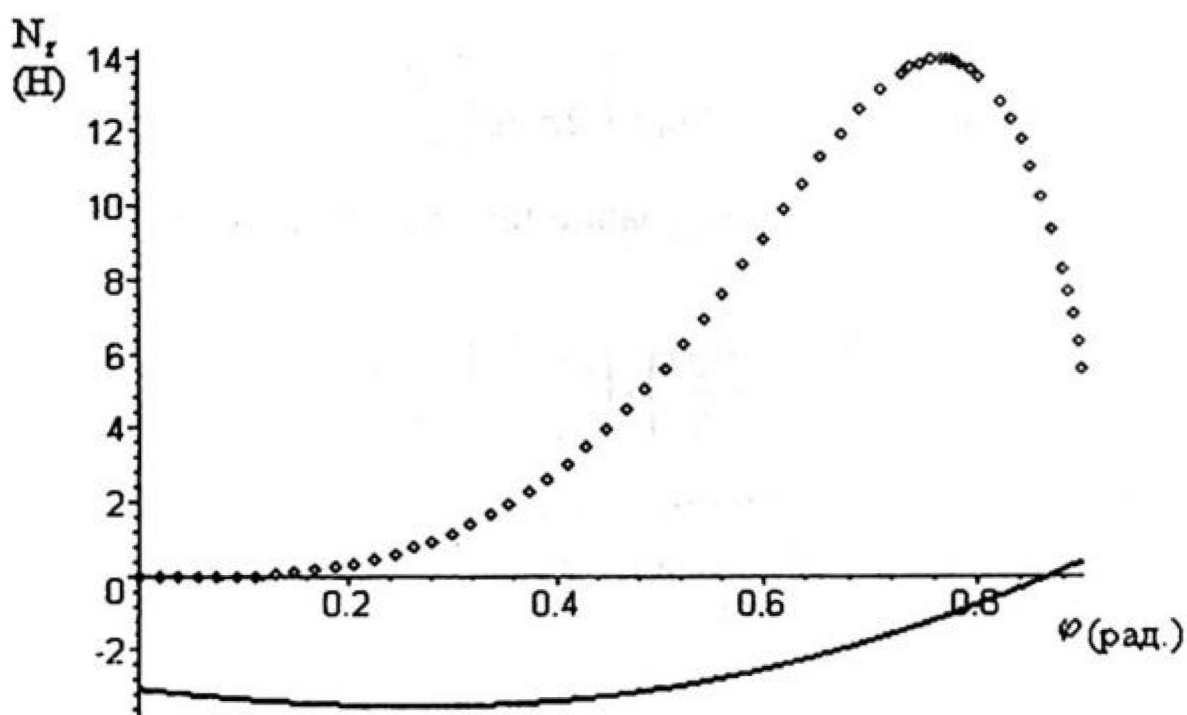


Рис. 4

Для кругового конуса усилие на грани $r=const$ вдоль геодезической значительно превышает аналогичные усилия вдоль линий кривизны. Применить данный результат можно для усиления конструкций данных форм путем расположения подкрепляющих ребер вдоль геодезических линий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1972. 196 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2005. 432 с.
3. Аладьев В.З., Богдявичус М.А. Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 824 с.