

*Александр Борисович ШАБАРОВ –
заведующий кафедрой механики
многофазных систем физического
факультета, доктор технических наук,
профессор, заслуженный деятель
науки России,
Андрей Николаевич СИДОРОВ –
заведующий отделением Моделирования
геологических объектов и процессов
Центра рационального
недропользования ХМАО, кандидат
геолого-минералогических наук,
Сергей Викторович СТЕПАНОВ –
аспирант кафедры механики
многофазных систем физического
факультета*

УДК 519.2.001.57:553.98

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОДОРАСТВОРЕННЫХ
УГЛЕВОДОРОДОВ**

АННОТАЦИЯ. Рассмотрено применение метода контрольного объема для численного моделирования двумерных задач распространения водорастворенных углеводородов.

The control volume method application is considered for 2D numerical modeling of watersolution hydrocarbons spreading problems.

Природные резервуары обладают рядом особенностей, которые необходимо учитывать при математическом моделировании генезиса углеводородов, особенно процессов миграции. К таким особенностям прежде всего стоит отнести геометрическую сложность коллекторов как на внешнем (конфигурация кровли и подошвы, слоистость, стратификация в разрезе) (рис. 1), так и на внутреннем (форма и размер пор, трещин и т.д.) уровнях. Все это заставляет разрабатывать и применять самые современные методы численного моделирования, среди которых в последнее время большое внимание уделяется развитию балансных методов, основанных на применении интегральных законов сохранения [3, 6]. К таковым относится метод контрольного объема (МКО), и аппроксимационные схемы, построенные с использованием этого метода, почти всегда консервативны [1], причем данное свойство имеет место как локально, так и интегрально, т. е. для всей расчетной области [2].



Рис. 1. Пример природного резервуара в разрезе

Характерной особенностью метода является то, что такой подход позволяет обойти трудности, возникающие при построении конечно-разностного аналога старших производных, что немаловажно при математическом моделировании с использованием криволинейных расчетных сеток, необходимость применения которых возникает при решении задач по разрезу резервуара.

Выделим два класса двумерных задач о распространении растворенной в движущейся воде примеси (в данном случае — углеводородов): первый класс — рассматривается движение в разрезе резервуара, второй — рассматривается движение по латерали.

Поскольку для двумерного случая выбор координатных осей принципиально не имеет значения, будем пользоваться правой декартовой прямоугольной системой координат Oxy .

Распространение растворенного вещества в фильтрационном потоке несжимаемой жидкости описывается уравнением фильтрационно-конвективной диффузии, которое в интегральной форме выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} C d\Omega = \oint_{\sigma} (D \vec{\nabla} C - C \vec{v}, \vec{n}) d\sigma, \quad (1)$$

где C — концентрация углеводородов, D — эффективный коэффициент диффузии, \vec{v} — скорость фильтрации. Уравнение (1) содержит пространственные производные первого порядка.

Конечно-разностный аналог (1), полученный с использованием МКО, может быть записан следующим образом:

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \Omega_{i,j} = \sum_{k=1}^4 [D(\vec{\nabla}_k C_k^n, \vec{n}_k) - C_k^n \vec{v}_k, \vec{n}_k] \sigma_k,$$

где $\Omega_{i,j}$ (в рассматриваемом двумерном случае) — площадь контрольного объема (прямоугольника), содержащего точку (i,j) , σ_k и \vec{n}_k — соответственно длина грани и внешняя нормаль. Индексы k показывают, что соответствующая величина относится к одной из четырех граней контрольного объема.

Для задачи перемещения флюида в моделируемом разрезе очевидно использовать расчетные сетки, адаптированные к конфигурации поверхностей, ограничивающих различные по своим фильтрационным свойствам породы резервуара. Поэтому для этого класса задач ограничимся описанием способа вычисления частных производных при использовании криволинейных сеток.

Выберем среди множества точек двумерной криволинейной расчетной сетки некоторую точку $k_0(i,j)$, принадлежащую контрольному объему, имеющему фор-

му четырехугольника с вершинами k_a, k_b, k_c, k_d (рис. 2А). Соседними для k_0 будут точки k_1, k_2, k_3, k_4 . Для аппроксимации частных производных воспользуемся определением полного дифференциала и составим систему уравнений для выделенных стрелками направлений:

$$\begin{cases} df|_k \rightarrow f_{k_c} - f_{k_b} = \frac{\partial f}{\partial x}|_k \Delta x_{cb} + \frac{\partial f}{\partial y}|_k \Delta y_{cb} \equiv a \\ df|_k \rightarrow f_{k_1} - f_{k_0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_k \Delta x_{10} + \frac{\partial f}{\partial y}|_k \Delta y_{10} \equiv b, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Delta x_{10} = x_{k_1} - x_{k_0}$, $\Delta y_{10} = y_{k_1} - y_{k_0}$, $\Delta x_{cb} = x_{k_c} - x_{k_b}$, $\Delta y_{cb} = y_{k_c} - y_{k_b}$.

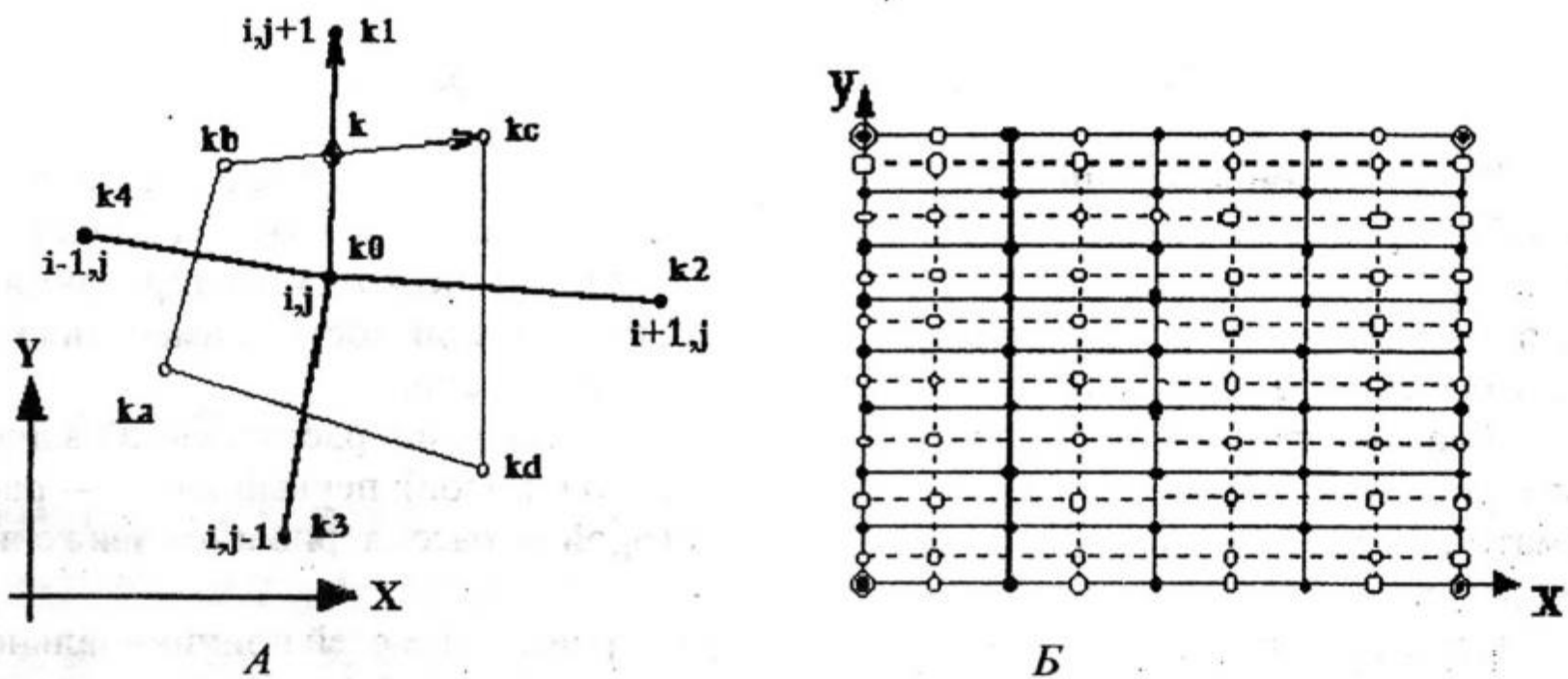


Рис. 2А. Контрольный объем в случае криволинейной сетки
Б. Расчетная сетка и сетка контрольных объемов

Решая систему (2), получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_k = \frac{\Delta y_{10} a - \Delta y_{cb} b}{\Delta x_{cb} \Delta y_{10} - \Delta x_{10} \Delta y_{cb}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_k = \frac{\Delta x_{10} a - \Delta x_{cb} b}{\Delta x_{10} \Delta y_{cb} - \Delta x_{cb} \Delta y_{10}}. \quad (4)$$

В случае равномерной прямоугольной расчетной сетки

$$\Delta x_{10} = x_{k_1} - x_{k_0} = 0, \quad \Delta y_{10} = y_{k_1} - y_{k_0} = \Delta y$$

$$\Delta x_{cb} = x_{k_c} - x_{k_b} = \Delta x, \quad \Delta y_{cb} = y_{k_c} - y_{k_b} = 0,$$

и, следовательно, (3) и (4) будут выглядеть соответственно как:

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_k = \frac{\Delta y \cdot a}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{a}{\Delta x} = \frac{f_{k_c} - f_{k_b}}{\Delta x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_k = \frac{-\Delta x \cdot b}{-\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{b}{\Delta y} = \frac{f_{k_1} - f_{k_0}}{\Delta y}. \quad (6)$$

Таким образом, (5) и (6) есть ни что иное, как обычные центрально-разностные аппроксимации пространственных производных в точке k .

Из рис. 2А и соотношений (2) видно, что для вычисления частных производных необходимо иметь значения сеточной функции f не только в узлах расчетной сетки, но и в вершинах контрольного объема. Поэтому, наряду с обычной расчетной сеткой, которую назовем *сеткой 1*, должна существовать еще одна — сетка контрольных объемов. Назовем ее *сеткой 2*. Для прямоугольной области эти две сетки будут выглядеть следующим образом (рис. 2Б, светлые точки — для сетки 2, темные — для сетки 1):

Как видно из рис. 2Б, сетка 1 также образует сетку контрольных объемов относительно сетки 2, поэтому в расчетной схеме этот факт использовался следующим образом: для нового временного слоя $(n+1)$ вычисления идут сначала для сетки 2 в контрольных объемах сетки 1 на промежуточном временном слое $(n+1/2)$, а затем для сетки 1 в контрольных объемах сетки 2.

При использовании потоковых методов существенное значение имеет аппроксимация конвективного члена

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^4 C_k^n [(v_x n_x)_k + (v_y n_y)_k] \sigma_k,$$

и этот факт необходимо учитывать при конструировании разностной схемы [2]. Опытным путем удалось установить, что для потока, распространяющегося в направлении оси абсцисс, наиболее подходящей интерполяцией (среди программно-рассмотренных) конвективной составляющей $C_k^n \bar{v}_k$ является следующая:

$$\begin{aligned} k=1: & C_1^n \bar{v}_1 = 0.25[C_{k1}^n + C_{k0}^n][\bar{v}_{k1} + \bar{v}_{k0}], \\ k=2: & C_2^n \bar{v}_2 = 0.25[C_{kc}^{n+1/2} + C_{kd}^{n+1/2}][\bar{v}_{kc} + \bar{v}_{kd}], \\ k=3: & C_3^n \bar{v}_3 = 0.25[C_{k3}^n + C_{k0}^n][\bar{v}_{k3} + \bar{v}_{k0}], \\ k=4: & C_4^n \bar{v}_4 = 0.25[C_{ka}^{n+1/2} + C_{kb}^{n+1/2}][\bar{v}_{ka} + \bar{v}_{kb}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тестовый расчет проводился при условии квазиодномерности течения $v_x \neq 0, v_y = 0$ на прямоугольной равномерной расчетной сетке и сравнивался с аналитическим решением уравнения (1) в виде

$$C = \frac{C_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{x - vt}{2\sqrt{Dt}} \right] \right),$$

а также с численными решениями при аппроксимации на обычной явной схеме с разностями вперед по времени и с разностями назад по пространству (ВВНП), с одной стороны, и с использованием метода Мак-Кормака [1] — с другой. Следует отметить, что для всех использованных численных методов применялись одинаковые шаги по времени Δt и по пространству $\Delta h = \{\Delta x, \Delta y\}$, причем поскольку при использовании описанного выше метода «работают» две сетки, то в качестве Δh для схемы ВВНП и схемы Мак-Кормака бралась половина расстояния между ближайшими узлами сетки 1 (рис. 3). Результаты расчетов, приведены на рис. 3.



Рис. 3. Тестовый расчет

Появление осцилляций численного решения есть важная, но не фатальная характеристика конечно-разностных схем, применяемых для решения уравнения Бюргера (к которому относится уравнение фильтрационно-конвективной диффузии, записанное в дифференциальной форме) [1] и дающих наиболее близкое к аналитическому положение фронта решения по сравнению со схемами с ВВНП.

Применение плоских расчетных сеток при моделировании латерального течения может привести к эффектам, значительно загромождающим решение вследствие несовпадения реального протяжения коллектора с его «плоской» моделью. Использование аппарата дифференциальной геометрии при построении разностной схемы позволяет избежать подобного источника неточностей. В этом случае решение задачи происходит с использованием плоских сеток в расчетной области, являющихся «проекциями» сеток, «натянутых» на опорную поверхность (рис. 4), и закон сохранения формулируется для некоторого контрольного объема в физической области, а переход в вычислительную область осуществляется с использованием законов преобразования соответствующих типов тензоров.

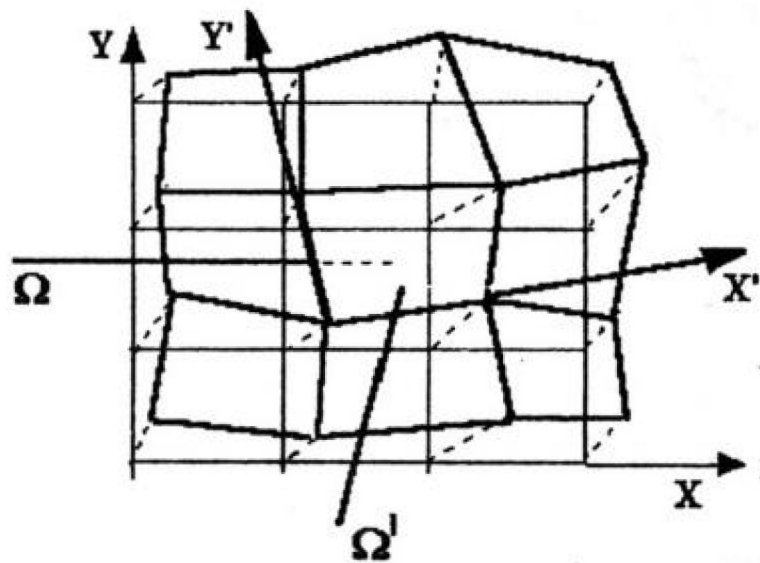


Рис. 4. Сетка, «натянутая» на опорную поверхность, и сетка в вычислительной области

Детально механизм использования элементов дифференциальной геометрии относительно интегральных законов сохранения и преобразования тензоров описан, например, в [5], поэтому ограничимся приведением результатов численного решения уравнения (1).

Считая давления постоянными во времени, поле фильтрационных скоростей \bar{v} находим из закона Дарси, записываемого в следующей форме:

$$v_i = -\frac{k}{\mu} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j}$$

(g^{ij} — метрический тензор, заданный на опорной поверхности), при граничных условиях, соответствующих открытой по периметру области.

Мощность коллектора во всей области его распространения предполагалась постоянной, поэтому в качестве опорных поверхностей выбирались кровли.

В данной латеральной задаче дискретный аналог конвективного члена задавался следующими выражениями:

$$\begin{aligned} k=1: & C_1^n \bar{v}_1 = 0.125 [C_{k1}^n + C_{k0}^n + C_{kb}^{n+1/2} + C_{kc}^{n+1/2}] [\bar{v}_{k1} + \bar{v}_{k0} + \bar{v}_{kb} + \bar{v}_{kc}], \\ k=2: & C_2^n \bar{v}_2 = 0.125 [C_{k2}^n + C_{k0}^n + C_{kc}^{n+1/2} + C_{kd}^{n+1/2}] [\bar{v}_{k2} + \bar{v}_{k0} + \bar{v}_{kc} + \bar{v}_{kd}], \\ k=3: & C_3^n \bar{v}_3 = 0.125 [C_{k3}^n + C_{k0}^n + C_{kd}^{n+1/2} + C_{ka}^{n+1/2}] [\bar{v}_{k3} + \bar{v}_{k0} + \bar{v}_{kd} + \bar{v}_{ka}], \\ k=4: & C_4^n \bar{v}_4 = 0.125 [C_{k4}^n + C_{k0}^n + C_{ka}^{n+1/2} + C_{kb}^{n+1/2}] [\bar{v}_{k4} + \bar{v}_{k0} + \bar{v}_{ka} + \bar{v}_{kb}]. \end{aligned}$$

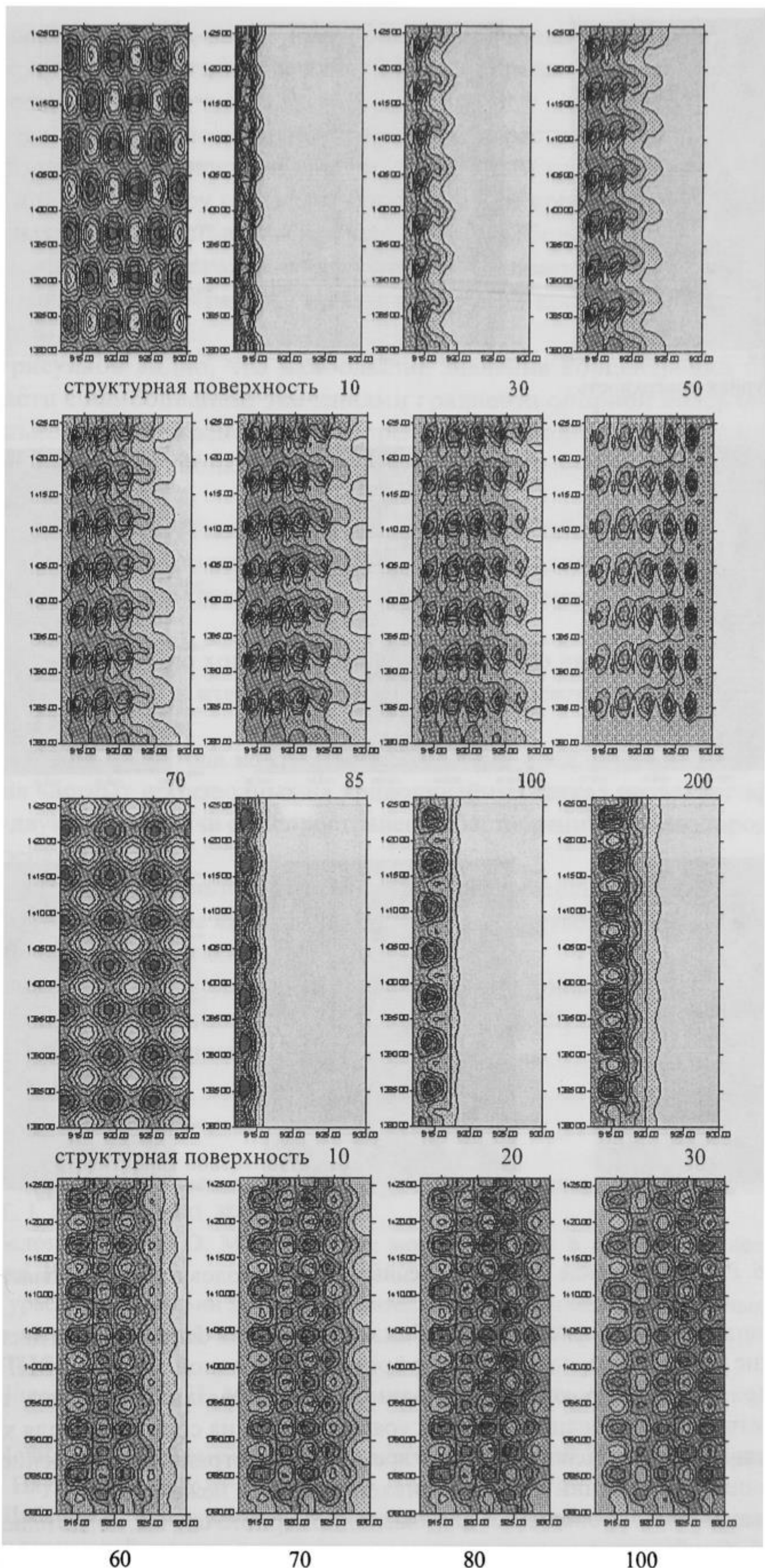


Рис. 5. Распространение водорастворенных углеводородов в пластах с поверхностями кровли, задаваемыми тригонометрическими функциями

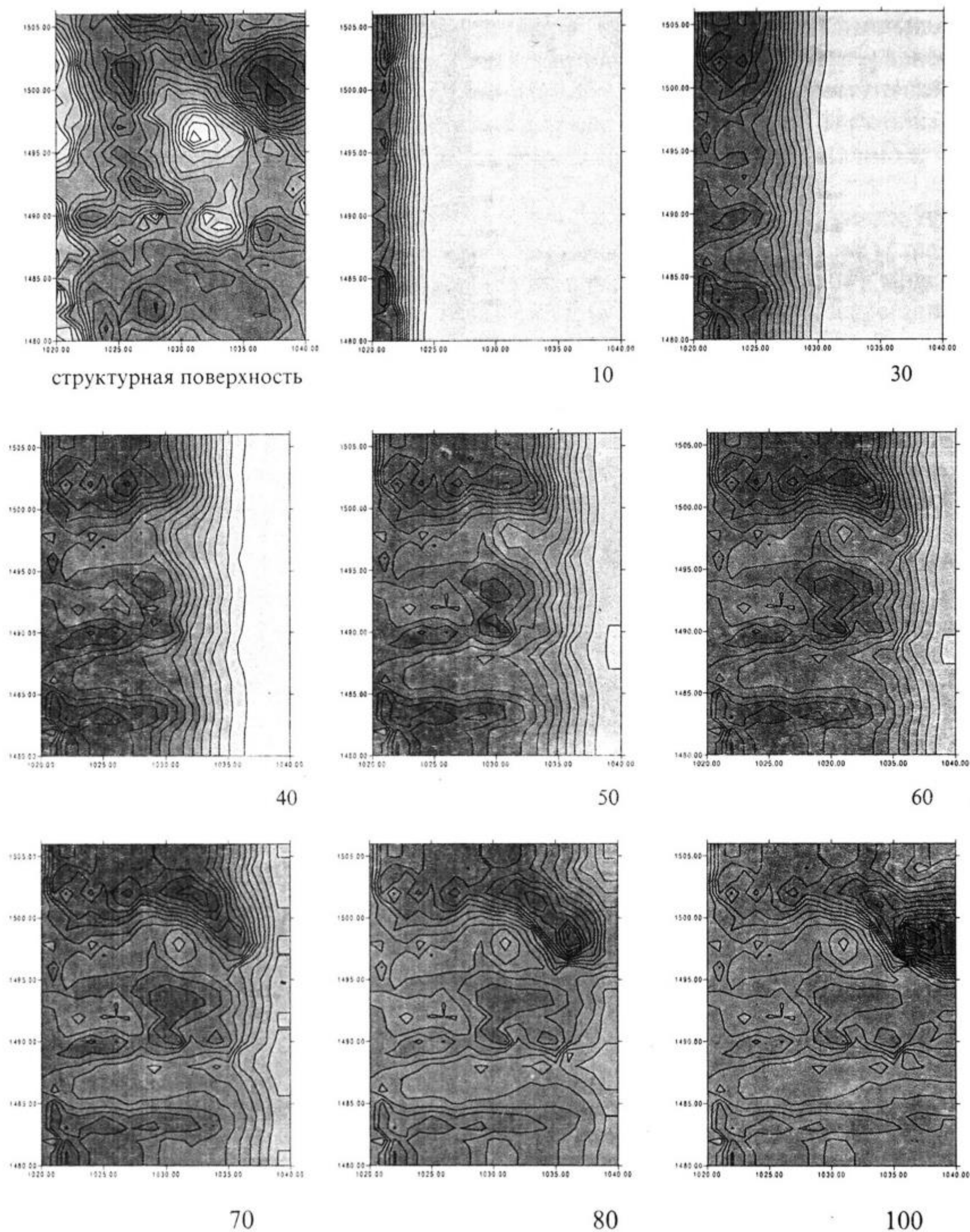


Рис. 6. Распространение водорастворенных углеводородов в реальном пласте

Такая аппроксимация позволяет избежать появления осцилляций и дает решения, близкие к решениям, полученным с применением явной схемы с ВВНП. Причина выбора такой аппроксимации в данном случае связана с тем, что, так как анализируется влияние внешней конфигурации пласта на состояние поля концентрации растворенных углеводородов во времени и пространстве, появление «лишнего» источника искажений в рассматриваемом случае нежелательно.

Тестовые расчеты проводились для квазиодномерного случая, когда пласт представлял собой плоскую прямоугольную поверхность, а шаг по времени был близок к критическому (т.е. когда решение задачи еще является устойчивым). В первом тестовом расчете на входной границе задавалось условие источника

постоянной мощности, во втором — источник работал только в первую временную итерацию. Результаты расчетов показали хорошее совпадение с аналитическим решением.

Далее моделировалось распространение водорастворенных углеводородов по коллекторам с поверхностями кровли, задаваемым тригонометрическими функциями, и по коллектору с реально существующей кровлей. Результаты решения модельных задач представлены на рис. 5, 6, причем более темные участки соответствуют наибольшим значениям картируемого параметра — абсолютной отметки (для кровли) и концентрации. Числа под картами концентрации соответствуют временным итерациям.

Из рисунков видно, что наибольшие значения концентрации приходятся на области с наибольшими значениями градиента опорной поверхности. Следовательно, распространение растворенных углеводородов с течением времени приобретает стационарный характер с равномерным распределением концентрации.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1) решения методом контрольного объема и методом Мак-Кормака дают наиболее точное решение уравнения Бюргерса, причем первым (это видно из рис. 3) — в большей степени;

2) возникающие по ходу решения осцилляции по прошествии определенного количества временных итераций (обычно первых десяти) достигают практически неизменного значения;

3) применение метода контрольного объема с предлагаемой концепцией вычисления частных производных на криволинейных сетках позволяет эффективно решать двумерные задачи о распространении растворенных углеводородов по разрезу резервуара;

4) совместное использование аппарата дифференциальной геометрии и метода контрольного объема является эффективным средством решения квазитрехмерных латеральных задач подземной гидродинамики;

5) разработанный подход позволяет решать не только задачи генезиса нефти и газа, но и задачи исследования подземного распространения различных примесей, например загрязнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
3. Гурьева Я. Л., Ильин В. П. Вычислительные аспекты методов конечных объемов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 11. С. 1860-1876.
4. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
5. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.
6. Шабаров А. Б., Сидоров А. Н., Степанов С. В. Применение метода контрольного объема и римановой метрики при численном моделировании вторичной миграции углеводородов в растворенном состоянии в коллекторах со сложной внешней геометрией // Известия вузов. Нефть и газ. 1997. № 6. С. 12.