МАТЕМАТИКА

Евгений Григорьевич ПЫТКЕЕВ — ведущий научный сотрудник института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор,
Алексей Григорьевич ХОХЛОВ — доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук

УДК 513.83

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОБРАЗАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

АННОТАЦИЯ. В статье дан положительный ответ на вопрос: справедливо ли равенство $\chi(x)=\omega(x)$ для произвольных радических бикомпактов?

The author gives a positive answer to the question: is the equality $\chi(x) \overset{equals}{=} \omega(x)$ true for arbitrary radial bycompects?

Напомним [1], бикомпакт называется m-адическим (ξ-адическим), если он является непрерывным образом некоторой степени $A_m(W(\xi))$, где A_m – одноточечная компактификация дискретного пространства мощности m и $W(\xi)$ – пространство ординалов не больше ξ с порядковой топологией. В [6] рассмотрены бикомпакты, являющиеся непрерывными образами разреженных бикомпактов (радические бикомпакты). Напомним, что пространство разрежено, если каждое его непустое подпространство имеет изолированную в этом подпространстве точку. Ясно, что все m-адические бикомпакты ξ-адичны, а поскольку все бикомпакты $W(\xi)$ разрежены, ξ-адические бикомпакты также и радические.

В [2, 3] доказано, что некоторые свойства диадических бикомпактов присущи и m- и ξ- адическим бикомпактам. Например, равенство $\chi(X)=\omega(X)$. В [6] получены результаты о радических бикомпактах из которых вытекает последний результат, и сформулирована задача: справедливо ли равенство $\chi(X)=\omega(X)$ для произвольных радических бикомпактов? Из результатов работы следует положительный ответ на этот вопрос.

Обозначения. Пусть X – топологическое пространство, $A \subset X$. Тогда $|A|$ – мощность множества A, $\overline{A}$ – замыкание множества A. В работе будут использованы следующие обозначения для кардинальных инвариантов:

1. $W(X)$ – вес X, минимум мощностей баз пространства X;
2. $d(X)$ – плотность X, минимум мощностей всюду плотных в X множеств;
3. $c(X)$ – число Суслина X, наименьший кардинал τ, такой, что мощность всякого семейства попарно непересекающихся непустых открытых множеств в X не превосходит τ;
4. $l(X)$ – число Линделефа X, наименьший кардинал τ, такой, что из каждого открытого покрытия X можно выделить подпокрытие мощности меньшей либо равной τ;
5. $nW(X)$ – сетевой вес X, минимум мощностей сетей пространства X;
6. $t(X)$ – теснота X, наименьший кардинал τ, такой, что каковы бы ни были множество $A \subset X$ и точка $x \in \overline{A}$, найдется множество $B \subset A$, $|B| \le \tau$ и $x \in A$.

Все кардинальные инварианты считаем бесконечными. Если φ-кардинальный инвариант, то $h\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \subset X\}$. Если λ – кардинал, то λ^+ – наименьший кардинал, больший X.

Пусть $X_\alpha, \alpha \in A$ – семейство топологических пространств. Тогда $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ – их произведение, наделенное тихоновской топологией. Если $B \subset A$, то $\pi_B : \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\} \to \Pi\{X_\alpha : \alpha \in B\}$ – естественная проекция. Для всякой точки $p \in \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ положим $X_B(p) = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in B\} \times \pi_{A \setminus B}(p) \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, $\sigma(X, p) = \{x : x \in X, \pi_\alpha(x) \ne \pi_\alpha(p)$ для конечного числа $\alpha\}$. Множество $E \subset X$ называется сильно плотным, если $\pi_K(E) = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\}$ для всякого конечного $K \subset A$. В дальнейшем нам потребуется хорошо известное

Предложение 1. Пусть $E \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ – сильно плотно, $K \subset A$ конечно. Тогда $\pi_K | S : S \to \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\}$ – открыто.

Напомним ([4], [5]), что пространство X называется левым (правым), если элементы X можно вполне упорядочить таким образом, что для всякого $x \in X$ множество $(\{y : y < x\})$ – замкнуто. Мы неоднократно будем использовать

Предложение 2. Пусть X – топологическое пространство, λ – бесконечный кардинал. Рассмотрим следующие условия

1. $hd(X) > \lambda$,
2. $hl(X) > \lambda$,
3. $hc(X) > \lambda$,
4. X содержит левое подпространство мощности λ^+,
5. X содержит правое подпространство мощности λ^+,
6. X содержит дискретное подпространство мощности λ^+.

Тогда 1) ~ 4), 2) ~ 5), 3) ~ 6).

Теорема 1. Пусть $E \subset X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ – сильно плотно и $f : X \xrightarrow{на} Y$ совершенное отображение. Тогда

1. $hd(f(E)) + |A| = hd(Y) + |A|$,
2. $hl(f(E)) + |A| = hl(Y) + |A|$,
3. $hc(f(E)) + |A| = hc(Y) + |A|$,
4. $t(f(E)) + |A| = t(Y) + |A|$,
5. $nW(f(E)) + |A| = nW(Y) + |A|$,
6. $W(f(E)) + |A| = W(Y) + |A|$.

Доказательство. Назовем окрестность множества $f^{-1}(y), y \in Y$, вида $W \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K\}$ K-отмеченной, где K – конечное подмножество A, а W – открыто в $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\}$, если найдутся открытые множества $U \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\}$ и $V \subset Y$, такие, что $f^{-1}(y) \subset U \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\} \subset f^{-1}(V) \subset W \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K\}$. Покажем, что K-отмеченные множества (по всем конечным $K \subset A$) образуют базу окрестностей множества $f^{-1}(y)$. Пусть $Of^{-1}(y)$ – произвольная окрестность. Так как

$f^{-1}(y)$ – компактно, то найдется конечное множество $K_1 \subset A$ и открытое множество $W_1 \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K_1\}$, такие, что $f^{-1}(y) \subset W_1 \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_1\} \subset Of^{-1}(y)$. Так как f – замкнутое отображение, то найдется открытое множество $V \subset Y$, такое, что $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset W_1 \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_1\}$. В силу компактности множества $f^{-1}(y)$ найдется конечное множество $K_2 \subset A$ и открытое множество $U_2 \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K_2\}$, такие, что $f^{-1}(y) \subset U_2 \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_2\} \subset f^{-1}(V)$. Положим, $K = K_1 \bigcup K_2$, $W = W_1 \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K \setminus K_1\}$, $U = U_2 \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K \setminus K_2\}$. Итак, K -отмеченные множества образуют базу окрестностей $f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

I. Пункты 1, 2, 3 – доказываются параллельно. Если $\varphi \in \{hd, hl, hc\}$, то $\varphi(Y) \geq \varphi(f(E))$, следовательно, $\varphi(Y) + |A| \geq \varphi(f(E)) + |A|$. Предположим, что $\varphi(Y) + |A| > \varphi(f(E)) + |A|$. Тогда $\varphi(Y) > |A|$ и $\varphi(Y) > \varphi(f(E))$. Пусть $\varphi(f(E)) + |A| = \lambda$. Тогда в силу предположения 2 найдется левое (правое, соответственно дискретное) подпространство $\{y_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ мощности λ^+. Выберем семейство окрестностей $O(y_\alpha)$, $\alpha < \lambda^+$, таких, что $y_\beta \notin O(y_\alpha)$ при $\beta < \alpha$ ($\beta > \alpha$ и $\beta \neq \alpha$ соответственно). Так как K -отмеченные множества образуют базу окрестностей множеств $f^{-1}(y_\alpha)$, $\alpha < \lambda^+$, то выберем конечные множества $K_\alpha \subset A$, открытые множества W_α, $U_\alpha \subset \Pi\{X_\alpha : \alpha \in K_\alpha\}$ и $V_\alpha \subset Y$, такие, что

(*) $f^{-1}(y_\alpha) \subset U_\alpha \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_\alpha\} \subset f^{-1}(V_\alpha) \subset$
$W_\alpha \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_\alpha\} \subset Of^{-1}(y_\alpha)$, $\alpha < \lambda^+$.

Так как $|A| < \lambda^+$, то найдутся: а) конечное множество $K \subset A$ и б) множество $T \subset \lambda^+, |T| = \lambda^+$, такие, что

(**) $K_\alpha = K$, для всех $\alpha \in T$.

В силу того, что E сильно плотно в X выберем $z_\alpha \in E, \alpha \in T$, такое, что $\pi_k(z_\alpha) \in \pi_k(f^{-1}(y_\alpha))$. Тогда $f(z_\alpha) \in V_\alpha, \alpha \in T$.

Пусть $\beta < \alpha$ ($\beta > \alpha$ и $\beta \neq \alpha$ соответственно). Покажем, что $f(z_\alpha) \notin V_\alpha$. Действительно, $y_\beta \notin O(y_\alpha)$ и тогда в силу (*) $f^{-1}(y_\beta) \bigcap (W_\alpha \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K\}) = \varnothing$. Следовательно $\pi_k(z_\beta) \notin W_\alpha$ и тогда $z_\beta \notin W_\alpha \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K\}$. В силу (*) отсюда следует, что $f(z_\beta) \notin V_\alpha$.

Пусть $Z = \{f(z_\alpha) : \alpha \in T\} \subset f(E)$. Тогда Z – левое (правое, соответственно дискретное) подпространство $f(E)$ мощности λ^+. Это противоречит тому, что $hd(f(E))$ ($hl(f(E))$, соответственно $hc(f(E))$) не превосходит λ.

II. Докажем пункт 4) от противного. Тогда $\lambda = t(f(E)) + |A| < t(Y)$. Следовательно, найдется точка $y \in Y$ и множество $B \subset Y$, такие, что

α) $y \in \overline{B}$, но $y \notin \overline{C}$, для всякого $C \subset B$, $|C| \leq \lambda$. В силу замкнутости f это влечет

β) $f^{-1}(y) \bigcap \overline{f^{-1}(B)} \neq \varnothing$, но $f^{-1}(y) \bigcap \overline{f^{-1}(C)} = \varnothing$ для всякого $C \subset B$, $|C| \leq \lambda$.

Покажем, что найдется конечное множество $K_0 \subset A$, такое, что

γ) для всякого множества $C \subset B$, $|C| \leq \lambda$, найдется K_0 – отмеченная окрестность множества $f^{-1}(y)$, которая не пересекает $f^{-1}(C)$.

Предположим противное. Множество $\mathcal{K} = \{K : K \subset A, K - \textit{конечно}\}$ имеет мощность $\leq \lambda$. Для всякого $\mathcal{K} \in$ E, по предположению, найдется множество $C(K) \subset B$, $|C(K)| \leq \lambda$, такое, что всякая K_0 – отмеченная окрестность множества $f^{-1}(y)$ пересекает $f^{-1}(C)$. Тогда множество $C = U\{C(K) : K \in \mathcal{K}\}$ имеет мощность $\leq \lambda$ и всякая K_0 – отмеченная окрестность множества $f^{-1}(y)$, $K_0 \in \mathcal{K}$, пересекает C. Так как K_0 – отмеченные окрестности образуют базу множества $f^{-1}(y)$, то получаем противоречие с β).

Пусть $x_0 \in f^{-1}(y) \bigcap \overline{f^{-1}(B)}$. Выберем $z_0 \in E$, такую, что $\pi_{K_0}(x_0) = \pi_{K_0}(z_0)$. Положим $E_0 = \{z : z \in E, \pi_{K_0}(z) \in \pi_{K_0}(f^{-1}(B))\}$. Так как E сильно плотно, то $\overline{E_0} = \pi_{K_0}(\overline{f^{-1}(B)}) \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus K_0\}$. Отсюда и из того, что

$\pi_{K_0}(z_0)\in\pi_{K_0}(\overline{f^{-1}(B)})\subset\overline{\pi_{K_0}(f^{-1}(B))}$, следует, что $z_0\in\overline{E_0}$ и потому $f(z_0)\in\overline{f(E_0)}$. Так как $t(f(E_0))\leq\lambda$, то выберем $C\subset E_0$, такое, что $f(z_0)\in\overline{f(C)}$ и $|C|\leq\lambda$. Так как $|C|\leq\lambda$, то найдется множество $D\subset B$, $|D|\leq\lambda$ такое, что $\pi_{K_0}(C)\subset\pi_{K_0}(f^{-1}(D))$. В силу γ). найдется K_0 – отмеченная окрестность, такая, что $f^{-1}(y)\subset U\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(V)\subset W\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}$ и $W\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\bigcap f^{-1}(D)=\varnothing$. Так как $z_0\in f^{-1}(V)$, то $f(z_0)\in V$.

С другой стороны, так как $\pi_{K_0}(C)\subset\pi_{K_0}(f^{-1}(D))$, то $T\bigcap W\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}=\varnothing$ и $\underline{T\bigcap} f^{-1}(V)=\varnothing$. Следовательно, $V\bigcap f^{-1}(T)=\varnothing$. Это противоречит тому, что $f(z_0)\in\overline{f(C)}$.

III. Докажем пункт 5. Пусть $|A|+nW(f(E))=\lambda$ и $\{P_\alpha:\alpha<\lambda\}$ – сеть $f(E)$. Тогда семейство $\rho=\{f(\pi_k(f^{-1}(P_\alpha))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K\}):\alpha<\lambda,K\subset A,K - \textit{конечно}\}$ имеет мощность $\leq\lambda$. Покажем, что ρ – сеть Y. Пусть $y\in Y$ и $O(y)$ – окрестность точки y – произвольны. Выберем K_0 – отмеченную окрестность множества $f^{-1}(y)$, такую, что

$$f^{-1}(y)\subset U\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(V)\subset W\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(O(y)).$$

Пусть $x\in f^{-1}(y)$ – произвольна. Выберем $z\in E$, такую, что $\pi_{K_0}(x)=\pi_{K_0}(z)$. Тогда $\pi_{K_0}(z)\in U$, следовательно, $z\in U\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(V)$. Таким образом $f(z)\in V$. Выберем $P_{\alpha_0},\alpha_0<\lambda$, такое, что $f(z)\in P_{\alpha_0}\subset V$. Тогда $\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\subset\pi_{K_0}(f^{-1}(V))\subset W$. Следовательно, $\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset W\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(O(y))$. Тогда $f(\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\})\subset O(y)$. Остается показать, что $y\in f(\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\})$.

Действительно, $z\in f^{-1}(P_{\alpha_0})$. Тогда $\pi_{K_0}(z)=\pi_{K_0}(x)\in\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))$. Следовательно, $x\in\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}$. Тогда $y=f(x)\in f(\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times \Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\})$.

IV. Пусть теперь $\{P_\alpha:\alpha<\lambda\}$ – база $f(S)$. В III пункте доказано, что для всякого $x\in f^{-1}(y)$ (для всякой окрестности $O(y)$), найдется $\alpha_0<\lambda$ и $K_0\subset A$ – конечное множество, такие, что $x\in\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}\subset f^{-1}(O(y))$. В силу предложения 1 множества вида $\pi_{K_0}(f^{-1}(P_{\alpha_0}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_0\}$ – открыты в X. Так как f – совершенно, то множества вида

$$Y\setminus f(X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\pi_{K_i}(f^{-1}(P_{\alpha_i}))\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_i\}) \text{ – образуют базу } Y.$$

Теорема доказана.

Лемма. Пусть $f:X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\xrightarrow{на}Y$ – совершенное отображение, $p\in X$ и X – T_1 – пространство. Тогда, если а). $d(f(\sigma(X,p)))\leq\tau$ или б) $hc(f(\sigma(X,p)))\leq\tau$, то найдется $K\subset A$, $|K|\leq\tau$, такое, что $f(X_K(p))=Y$.

Доказательство. Рассмотрим случай а). Пусть P – плотное подмножество $f(\sigma(X,p))$ мощности $\leq\tau$. Для всякой точки $y\in P$ зафиксируем $z_y\in\sigma(X,p)$, такую, что $f(z_y)=y$. Тогда множество $K=U\{\operatorname{supp} z_y:y\in P\}$ – искомое. Действительно, $|K|\leq\tau$ и так как X – T_1 – пространство, то $X_K(p)$ – замкнуто в X. Тогда $f(X_K(p))$ замкнуто в Y и содержит плотное в Y подмножество $f(\sigma(X,p))$. Следовательно, $f(\sigma(X,p))=Y$. Рассмотрим случай б). Заметим, что для всякой точки $z\in\sigma_{n+1}(X,p)\setminus\sigma_n(X,p)$ найдется окрестность $O(z)$ и конечное множество $K(z)\subset A$, такие, что $O(z)\bigcap\sigma_{n+1}(X,p)\subset X_{K(z)}(p)$. Следовательно, это же справедливо для всякого бикомпактного множества $T\subset\sigma_{n+1}(X,p)\setminus\sigma_n(X,p)$. Так как f – совершенно, то для всякой точки $y\in f(\sigma_{n+1}(X,p))\setminus f(\sigma_n(X,p))$ найдется окрестность $O(y)$ и конечное множество $K(y)\subset A$, такие, что $f(X_{K(y)}(p))\supset O(y)$ (Это следует из того, что $\varphi=f|\sigma_{n+1}(X,p):\sigma_{n+1}(X,p)\xrightarrow{на}f(\sigma_{n+1}(X,p))$ – совершенно).

Так как $c(f(\sigma_{n+1}(X,p)))\leq\tau$, то найдется $\leq\tau$ таких окрестностей $\{O(y_\alpha):\alpha<\tau\}$, объединение которых плотно в $f(\sigma_{n+1}(X,p))\setminus f(\sigma_n(X,p))$. Положим, $K_{n+1}=U\{K(y_\alpha):\alpha<\tau\}$. Тогда $f(X_{K_{n+1}}(p))\supseteq f(\sigma_{n+1}(X,p))\setminus f(\sigma_{n+1}(X,p))$. Следовательно, множество $K=U\{K_n:n\in N\}$ – искомое. Лемма доказана.

Пусть φ – кардинальный инвариант, $f:\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\to Y$. Положим $\sigma(\varphi,f,p)=\sup\{\varphi(f(X_K(p))): K$ – конечное подмножество $A\}$.

Предложение 3. Пусть $f:X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\xrightarrow{на} Y$ – совершенное отображение, $p\in X$, X – T_1 – пространство.

Тогда

1. $hd(Y)=hc(Y)+\sigma(hd,f,p)$,
2. $hd(Y)=\pi w(Y)+\sigma(hd,f,p)$,
3. $hd(Y)=d(f(\sigma(X,p)))+\sigma(hd,f,p)$,
4. $hl(Y)=hc(Y)+\sigma(hl,f,p)$,
5. $nw(Y)=hl(Y)+\sigma(nw,f,p)$,
6. $nw(Y)=hd(Y)+\sigma(nw,f,p)$,
7. $nw(Y)=hc(Y)+\sigma(nw,f,p)$.

Доказательство следует из теоремы 1, леммы, и неравенств $hc(Y)\le hd(Y)$, $hc(Y)\le hl(Y)$.

Положим, $\sigma(\varphi,f)=\sup\{\sigma(\varphi,f,p):p\in X\}$.

Предложение 4. Пусть $f:X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\xrightarrow{на} Y$ – непрерывное отображение, X и Y – бикомпакты.

Тогда

1. $hd(Y)=t(Y)+\sigma(hd,f)$,
2. $w(Y)=t(Y)+\sigma(w,f)$,
3. $w(Y)=\chi(Y)+\sigma(w,f)$

Доказательство. Докажем 1). Так как для всяких X и Y справедливо $t(Y)+\sigma(hd,f)\le hd(y)$, то достаточно доказать противоположное неравенство. Предположим противное. Пусть $t(Y)+\sigma(hd,f)=\tau$, $hd(Y)\ge\tau^+$. Из пункта а) леммы и того, что $t(Y)\le\tau$ следует, что можно предположить, что $Y=U\{F_\alpha:\alpha<\tau^+\}$, где $F_\alpha\subset F_\beta$ при $\alpha<\beta<\tau^+$ и множества F_α – замкнуты. Тогда множества $W_\alpha=Y\setminus F_\alpha$ – непусты и открыты, $\alpha<\tau^+$. Зафиксируем для всякого $\alpha<\tau^+$ непустое открытое базисное множество $U_\alpha\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}$, где $K_\alpha\subset A$ конечно, а U_a открыто в $\Pi\{X_\alpha:\alpha\in K_\alpha\}$ и $U_\alpha\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}\subset f^{-1}(W_\alpha)$. Тогда найдется $\Gamma\subset\tau^+$, $|\Gamma|\subset\tau^+$, такое, что семейство $\{K_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ – почти-дизъюнктно. Пусть K – корень $\{K_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$. Тогда $\bigcap\{\pi_{A\setminus K}(U_\alpha\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}):\alpha\in\Gamma\}\ne\varnothing$. Пусть p из этого множество. Тогда $(\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}\times\{p\})\bigcap(U_\alpha\times\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\})\ne\varnothing$ для всякого $\alpha\in\Gamma$. Следовательно, $(\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}\times\{p\})\bigcap f^{-1}(W_\alpha)\ne\varnothing$ для всякого $\alpha\in\Gamma$. Так как $d(\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\setminus K_\alpha\}\times\{p\})\le\tau$, то найдутся $\Gamma_1\subset\Gamma$, $|\Gamma_1|=\tau^+$, и $\bigcap\{W_\alpha:\alpha\in\Gamma_1\}\bigcap f(\Pi\{X_\alpha:\alpha\in K\}\times\{p\})\ne\varnothing$. Но это противоречит тому, что семейство $\{W_\alpha:\alpha<\tau^+\}$ имеет кратность τ. Этим 1) доказано. Так как $t(Y)\le\chi(Y)\le w(Y)$, то 2). $\to$3). В силу 1). $hd(Y)=t(Y)+\sigma(hd,f)\le t(Y)+\sigma(w,f)$. Для бикомпакта Y $nw(Y)=w(Y)$. Из предложения 3 (пункт 6) $w(Y)=hd(Y)+\sigma(w,f)\le t(Y)+\sigma(w,f)$. Так как противоположное неравенство справедливо для произвольного Y, этим предложение доказано.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{K}$ – класс бикомпактов, замкнутый относительно конечных произведений и непрерывных образов, $X_\alpha\in\mathcal{K}$, $\alpha\in A$ и $f:X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}\xrightarrow{на} Y$ – непрерывно, Y – бикомпакт.

1. Если для всякого $X\in\mathcal{K}$, $w(X)=\varphi(X)$, где $\varphi\in\{t,\chi,hc,hd,hl\}$, то $w(Y)=\varphi(Y)$.

2. Если для всякого $X\in\mathcal{K}$, $t(X)=hd(X)$ или $\chi(X)=hd(X)$, то и $t(Y)=hd(Y)$ (соответственно $\chi(Y)=hd(Y)$).

3. Если для всякого $X\in\mathcal{K}$, $\varphi_1(X)=\varphi_2(X)$, где $\varphi_i\in\{hc,hd,hl\}$, $i=1,2$, то и $\varphi_1(Y)=\varphi_2(Y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mrowka S. Mazur theorem and m-adic spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., Astron., Phys. 1970. V. 18. № 6. P. 299-305.

2. Gerlits J. On a problem of S. Mrowka // Period. Math. Hund. 1973. V. 4 № 1. P. 71-79.
3. Marty R. On m-adic spaces // Acta Math. Hung. 1971. V. 22. № 3/4. P. 441-447.
4. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
5. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
6. Чертанов Г. И. О непрерывных образах произведений разреженных бикомпактов // Сиб. мат. журн. 1988. Т 29. № 6. С. 167-175.

Сергей Арнольдович ИНЮТИН — заведующий кафедрой высшей математики Сургутского государственного педагогического института, кандидат технических наук, доцент

УДК 681.26

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДУЛЯРНАЯ АЛГЕБРА КВАДРАТИЧНОГО ДИАПАЗОНА И ОБЛАСТЬ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. Приведена компьютерная модулярная алгебра с квадратичным диапазоном для элементов множества носителя - теоретическая база архитектурных решений для вычислительных систем с распараллеливанием на уровне машинных операций, и описана область ее применения.

The auther focuses upon the modular computer algebra with a square diapazon for a variable. This is the theoretical base for the computer systems with parallel machine operations.

Среди возможных видов рапараллеливания вычислительного процесса :
— на уровне задач,
— проблемных алгоритмов решения задач,
— машинных операций, используемых при выполнении проблемных алгоритмов, последний представляет интерес по следующим причинам. Распараллеливание выполнения машинных операций — достаточно универсальный метод увеличения быстродействия ЭВМ. Для описания арифметики и представления данных используются модулярные системы счисления. В этих системах при определенных ограничениях на величины диапазонов изменения операндов для мультипликативных операций достигается линейная временная сложность. Это недостижимо для позиционных, полиадических и полулогарифмических систем представления данных. Выигрыш в быстродействии становится особенно заметным при больших (многоразрядных) величинах операндов. Для оптимального применения модулярных систем в качестве арифметико- логической базы вычислительных устройств сами проблемные алгоритмы нуждаются в преобразовании их в «вычетную» форму с максимальным числом операций вычисления по модулю. После преобразования проблемные алгоритмы оптимальные, в смысле минимального количества немодульных операций, отображаются на модулярную аппаратную или программную арифметико-логичес-