Алексей Григорьевич ХОХЛОВ —
доцент кафедры математического анализа и теории функций математического факультета, кандидат физико-математических наук

УДК 512.12

К ТЕОРЕМЕ НАМИОКИ

АННОТАЦИЯ. В этой статье приведено чисто топологическое, не использующее глубоких результатов теории меры и функционального анализа доказательство известной теоремы Намиоки.

The author suggests a purely topological demonstration of the well-known Namioky's theorem, without any usage of the theory of measure and functional analysis deep results.

Намиока [1] установил, что если X-компакт, и F— компактное множество в $C_p(X)$, то хотя компактно-открытая топология на F, как правило, не совпадает с топологией поточечной сходимости, между этими топологиями на F имеется тесная связь. С этим важным фактом связан ряд интересных результатов. Поэтому, как нам кажется, будет полезно в дальнейших исследованиях чисто топологическое, не использующее глубоких результатов теории меры и функционального анализа доказательство.

Теорема А [1].

Пусть X и Y-компактны, и $f: X\times Y\to R$ — раздельно непрерывная вещественная функция. Тогда найдется всюду плотное G_δ—множество $A\subset X$ такое, что f непрерывна по совокупности переменных (т. е., относительно топологии произведения на $X\times Y$) в каждой точке множества $A\times Y$.

Если X — компакт, то через $C(X)$ будем обозначать пространство непрерывных функций на X в компактно-открытой топологией, порожденной sup-нормой. Более того, $C(X)$ с этой нормой-банахово пространство.

Следующая теорема Намиоки и устанавливает соотношение между топологией поточечной сходимости и топологией равномерной сходимости на множестве функций.

Теорема Б [1].

Пусть Y— компакт, и K-компактное подпространство пространства $C_p(Y)$. Тогда найдется всюду плотное множество Z типа G_δ в K такое, что топология, порожденная на Z метрикой равномерной сходимости, совпадает с топологией, индуцированной на Z из $C_p(Y)$ во всех точках множества Z.

Теоремы A и $Б$ непосредственно следуют одна из другой, поэтому достаточно доказать одну из них.

Докажем теорему Б.

Заметим также, что из теоремы $Б$ непосредственно следует, что всякий компакт Эберлейна содержит всюду плотное метризуемое G_δ—множество (напомним, что компактом Эберлейна называется компакт K, содержащийся в некотором (E, τ_ω), где E — банахово пространство, а τ_ω— слабая топология в E. Доказано, что K является компактом Эберлейна тогда и только тогда, когда его можно гемеоморфно вложить в $C_p(X)$, где X— некоторый компакт).

Переходим к доказательству теоремы *Б*. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1.

Пусть $\varphi: M_1 \to T$ *— уплотнение полного сепарабельного метрического пространства на метрическое бэровское пространство T. Если в* M_1 *найдется база* $\Omega=\{U\}$ *такая, что* $\varphi([U])$ *замкнуто в T для всякого* $U\in\Omega$, *то тогда найдется плотное* G_δ *— множество* $A\subset T$ *такое, что* φ^{-1} *непрерывно в точках A.*

Доказательство.

Пусть ρ — метрика в M_1. Рассмотрим γ_n— счетное покрытие базисными множествами диаметра $< \frac{1}{n}$, $n\in N$. Так как T бэровское, то $U_n = \bigcup\{ Int\varphi[U] : U \in \gamma_n \}$ всюду плотно в T. Тогда множество $A=\bigcap_{i=1}^{\infty} U_n$ — искомое G_δ— множество в T. Лемма доказана.

Множество $A\subset X$ называется G_δ- плотным, если A плотно в $X_{\aleph_0}$ ($\aleph_0$— модификацияX).

Лемма 2.

Пусть $\varphi: A\to K$ *— уплотнение метрического пространства на монолитный компакт K, содержащий* G_δ *— плотное множество точек счетного характера L и пусть* φ^{-1} *имеет точки непрерывности на всяком сепарабельном компакте* $T\subset K$. *Тогда найдется плотное* G_δ *— множество* $Z\subset K$ *такое, что* $\varphi^{-1}|Z$ *— непрерывно, следовательно, гомеоморфизм.*

Доказательство.

Предварительно докажем, что $g=\varphi^{-1}$ имеет хотя бы одну точку непрерывности. Предположим противное. Тогда для всякой точки $x\in K$

$\omega_g(x) = \inf\{diamg(O(x)) : O(x)$ - окрестность $x\} > 0$. Положим, $F_n = \{x \in K : \omega_g \geq \frac{1}{n}\}, n \in N$

Тогда все множества F_n замкнуты в K $n\in N$. По предположению $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = K$. В силу бэровсти K найдется $n_0 \in N$, такое, что $IntF_{n_0} \neq \varnothing$. Пусть $V \subset F_{n_0}$ — непустое открытое множество. Тогда для всякого непустого открытого множества $W\subset V$, $diamg(w) \geq \frac{1}{n_0}$. Пусть $t_0 \in V\bigcap L$. Покажем, что тогда найдется последовательность $t_n \in V\bigcap L$, $n \in N$, $t_n \to t_0$, и $diamg(t_n)_{i=0}^{\infty} \geq \frac{1}{3n_0}$. Выберем $\{o_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальную систему окрестностей точки t_0, такую, что $V\supset O_1(t_0) \supset \ldots \supset O_n(t_0) \supset O_{n+1}(t_0), n\in N$.

Так как $diamg(O_m(t_0)) \geq \frac{1}{n_0}$, то найдется точка $_m \in O_m(t_0)$,

такая, что $\rho(g(t_0), g(x_m)) \geq \frac{1}{3n_0}, m \in N$ (ρ –расстояние в M)

Так как L G_δ — плотно в K, и характер M счетен, то $g^{-1}g(x_m)\bigcap O_m(t_0)\bigcap L \neq \varnothing$, $m\in N$. Выберем $t_m\in g^{-1}g(x_m)\bigcap O_m(t_0)\bigcap L \neq \varnothing$, $m\in N$.

Тогда $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ — искомая. Рассуждая таким же образом, построим точки $t_{n_1,\ldots,n_k} \in L \cap V, n_i \in N, k \in N$ — произвольны, так что для всех $n_1..n_k$

$$t_{n_1,\ldots,n_{km}} \xrightarrow{m\to\infty} t_{n_1,\ldots,n_k}, \text{ и}$$

$$(*)\ \rho(g(t_{n_1},\ldots,_{n_k}), g(t_{n_1},\ldots,_{n_{km}})) \geq \frac{1}{3n_0}, m \in N.$$

Рассмотрим $S = \{t_{n_1,\ldots,n_k} : n_i \in N, k \in N\}$ — счетное подпространство K. Тогда в силу (*) образ всякого непустого относительно открытого в S множества имеет диаметр $\geq \frac{1}{3n_0}$. Этим же свойством обладает и $\overline{S}$. Следовательно, $g|\overline{S}$ не имеет точек непрерывности. Пришли к противоречию. Так как канонически замкнутое подмножество компакта K монолитно и содержит G_δ — плотное множество точек счетного характера, то множество точек непрерывности g всюду плотно в K. Положим, $W_n = \bigcup\{V : V \text{ открыт в K, и } diam\ g\ V < \frac{1}{n}, n \in N\}$. Множество W_n открыты и всюду плотны в $K, n\in N$. Тогда $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ — искомое всюду плотное G_δ — множество. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы Б.

Пусть $K \subset C_p(Y)$ — произвольный компакт. Тогда $C(Y)$ — метрическое пространство, и тождественное отображение $id : C(Y) \to C_p(Y)$ — уплотнение. Положим, $id|_K = \varphi$, это множество K с метрикой из $C(Y)$. Хорошо известные топологические результаты (см.[2]) говорят, что K - монолитный компакт, содержащий G_δ — плотное множество точек счетного характера. Таким образом, достаточно доказать, что φ^{-1} имеет точки непрерывности на всяком сепарабельном компакте $T \subset K$. Тогда $T \subset C(Y)$ метризуем, следовательно, $\varphi^{-1}(T) \subset M$ также сепарабельно и полно, как замкнутое в полном метрическом $C(Y)$. Положим $M_1 = \varphi^{-1}(T)$. Рассмотрим стандартную базу в $C(Y)$, $U = \{O_\rho(f,\varepsilon) = \{g : \|f-g\| < \varepsilon\}\}\ \varepsilon > 0$. тогда $[O_\rho(f,\varepsilon)]_{C(Y)} = B_\rho(f,\varepsilon)$ замкнутый шар. Проверка того, что $B_\rho(f,\varepsilon)$ замкнут в $C_\rho(Y)$ стандартна. Таким образом, полагаем $B = U \cap M_1$, и все условия леммы1 выполнены. Тогда доказана и лемма1, а с ней и теорема Б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Namioka I. Separable continuity and joint continuity. Pacif. J. Mat. V. 51, № 2. P. 515–531.

2. Архангельский А. В. Топологические пространства функцийМ.: Мир 1986. 223 с.

3. Энделькинг Р. В. Общая топология (перевод с английского). М.: Мир. 1986. 750 с.