Наиля Абдулловна ГУБАЙДУЛЛИНА — доцент кафедры математического анализа и теории функций, кандидат физико-математических наук

УДК 517.54

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

АННОТАЦИЯ. В данной статье исследованы вопросы однолистности преобразований интеграла типа Коши. Получены достаточные условия однолистности, которые сформулированы в виде трех теорем.

The problems of univalensy of Cauthy's integral transformations are studied in the present article. The sufficient conditions of univalensy are obtained and formulated as three theorems.

Одно из направлений в геометрической теории функций комплексного переменного связано с исследованиями достаточных условий однолистности аналитических функций. Широкий обзор методов и результатов по критериям однолистности различных классов аналитических функций дан в работе [1]. Там же приведены результаты, относящиеся к различным интегральным представлениям, в том числе к интегралу типа Коши. Придерживаясь обозначений и терминологии [1], [2], изучим достаточные условия однолистности функции вида:

$$F(z)=P_n(z)e^{f(z)}, \tag{1}$$

где

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|Z|=1}\frac{x(\theta)}{\tau-z}d\tau \tag{2}$$

— интеграл типа Коши с вещественной плотностью $x(\theta), \theta\in[0,2\pi]\,\tau=e^{i\theta}$, $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k z^k$ — полином степени $n\ge 0$ с комплексными коэффициентами.

Интерес к функциям вида (1) обусловлен тем, что они связаны с решениями некоторых случаев краевой задачи Римана и обратных краевых задач, когда граничные значения искомой функции заданы в полярных координатах. В обратных краевых задачах условия однолистности приобретают особую роль.

Ниже через H(N,ν) мы обозначаем множество всех функций φ(t), удовлетворяющих условию Гельдера [4] на отрезке [a, b]:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le N|t_1-t_2|^{\nu}$$

для любых $t_1,t_2\in[a,b],(t_1\ne t_2),N>0,0<\nu\le 1.$

ТЕОРЕМА 1. Функция

$$F(z)=e^{f(z)} \tag{3}$$

однолистна в круге $E=\{z:|z|\le 1\}$ и вне $E^-=\{z:|z|\ge 1\}$, если

1^0. $x(\theta)$ монотонно возрастает в интервале (α,β), монотонно убывает в интервале $(\beta,\alpha+2\pi)$ и выполнено одно из следующих условий:

$2^0 \cdot x(\theta) \in H(N,\nu), \quad N>0, \quad 0<\lambda \le 1,$ и

$$A_0(N,\nu,q)=N\frac{2^\nu}{\pi}\int_0^{\tau_0}\frac{\tau^\nu}{\sin\tau}d\tau+\frac{q}{\pi}\ln ctg\frac{\tau_0}{2}<2\pi, \tag{4}$$

где $\tau_0=2^{-1}q^{-\frac{1}{\nu}}N^{-\frac{1}{\nu}}$.

$3^0.$ $\int_0^{2\pi}x(\theta)d\theta=0,$

$$A_1[x]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega(2\tau;x)}{\sin\tau}d\tau<2\pi, \tag{5}$$

где

$\omega(t;x)=\sup\limits_{|\theta_1-\theta_2|\le t}|x(\theta_1)-x(\theta_2)|$ — модуль непрерывности функции $x(\theta)$;

$4^0.$ $\int_0^{2\pi}x(\theta)d\theta=0,$

$$A_2[\tilde{x}]=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\omega^*(2\tau;\tilde{x})}{\sin^2\frac{\tau}{2}}d\tau<2\pi, \tag{6}$$

где $\tilde{x}(\theta)=\int_0^{\theta}x(\tau)d\tau,$

$$\omega^*(t,\tilde{x})=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\le t}\left|\tilde{x}(\theta_1)+\tilde{x}(\theta_2)-2\tilde{x}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (3) как суперпозиция двух функций $\varpi=f(z)$ и e^{ϖ} будет однолистной при однолистности каждой из них. Первая однолистна в областях E и E^- при условии 1^0 по теореме Каплана [1]. Вторая однолистна в полосе $|\mathrm{Im}\,\varpi|<\pi$. Таким образом, доказательство сводится к получению оценки:

$$|\mathrm{Im}\,f(z)|<\pi \text{ при } |z|\le 1 \text{ и } |z|\ge 1.$$

Запишем граничные значения функции $f(z)$ по формулам Сохоцкого для $z=e^{i\theta}$ [3].

$$f^{\pm}(e^{i\theta})=\pm\frac{1}{2}x(\theta)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x(\gamma)ctg\frac{\gamma-\theta}{2}d\gamma. \tag{7}$$

При выполнении одного из условий 2^0, 3^0 или 4^0 на основании оценок для гармонических в круге функций [1] можно получить неравенство

$$\left|\mathrm{Im}\,f\left(e^{i\theta}\right)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x(\gamma)\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma-\theta}{2}d\gamma\right|<\pi, \tag{8}$$

что и требовалось.

Отметим, что на дугах окружности $\left(e^{i\alpha},e^{i\beta}\right)$ и $\left(e^{i\beta},e^{i(\alpha+2\pi)}\right)$ величина $|F(e^{i\theta})|$ соответственно монотонно растет и монотонно убывает.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие 2^0 в теореме 1 можно несколько видоизменить [1]. Например, потребовать, чтобы

$$|x(\theta_1)-x(\theta_2)|\le A|\cos\theta_1-\cos\theta_2|$$

для любых θ_1 и θ_2 $(\theta_1\ne\theta_2)$ из $[0,2\pi]$. Тогда функция (3) будет однолистной в E и E^- при $A\le 2\pi$. Действительно, в этом случае имеет место оценка:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x(\gamma)\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma-\theta}{2}d\gamma\right|\le\frac{A}{2}\sin\theta$$

Следовательно, при указанных A неравенство (8) будет выполнено.

ТЕОРЕМА 2. Функция

$$F(z)=ze^{f(z)} \tag{9}$$

однолистна в круге E и вне E', если 2π — периодическая функция $x(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$, удовлетворяет одному из условий:

1⁰. $x'(\theta)\in H(N,\nu)$, $\left|\max\limits_{[0,2\pi]}x'(\theta)-\min\limits_{[0,2\pi]}x'(\theta)\right|\le q$,

$A_0(N,\nu,q)<2$;

2⁰. $x'(\theta)$ непрерывна, $A_1[x']<2$, $\omega(t,x')$ — модуль непрерывности функции $x'(\theta)$;

3⁰. $x'(\theta)$ суммируема на $[0,2\pi]$, $A_2[x']<2$, причем величины $A_0(N,\nu,q)$, $A_1[x']$, $A_2[x]$ вычисляются по формулам (4), (5), (6) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\mathrm{Re}\ z\frac{F'(z)}{F(z)}=\mathrm{Im}\ \frac{d}{d\theta}\ln F(z)=\frac{d}{d\theta}\arg\ F(z),\quad \arg\ e^{f(z)}=\mathrm{Im}\ f(z),$$

то с учетом 2π—периодичности функции $x(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$ и формулы (7) для функции (9) при $z=e^{i\theta}$ имеем:

$$\mathrm{Re}\ e^{i\theta}\frac{F'(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}=\frac{d}{d\theta}\mathrm{Im}\,F(e^{i\theta})+1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x'(\gamma)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\gamma+1.$$

При выполнении одного из условий 1⁰, 2⁰, 3⁰ на основании [1] справедлива оценка:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x'(\gamma)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\gamma\right|\le\frac{1}{2}\Omega, \tag{10}$$

где Ω — одна из величин A_0, A_1, A_2. Поэтому

$$\mathrm{Re}\,e^{i\theta}\frac{F'(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}>0, \tag{11}$$

т. е. окружность $|z|=1$ перейдет в звездную относительно начала координат кривую.

Далее, так как функция (9) в круге E имеет единственный простой нуль в точке $z=0$, а во внешности E^- один простой полюс при $z=\infty$, то

$$\frac{1}{2\pi}\mathop{\text{изм}}_{|z|=1}\arg F^{\pm}(z)=\pm1.$$

Следовательно, в силу принципа аргумента [1], [2] функция вида (9) будет однолистной в E и E^-.

Для функции (1) при $n>1$ имеет место.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено одно из условий 1⁰, 2⁰, 3⁰ теоремы 2. Если

$$P_n(z)=z\prod_{j=1}^{p}(z-z_j)^{k_j},\quad \sum_{j=1}^{p}k_j=n-1,\quad |z|\ge R,\quad j=1..p,$$

$$R>1+\frac{n-1}{1-\frac{1}{2}\Omega},\Omega<2, \tag{12}$$

то функция (1) будет однолистной в E. Величина Ω имеет тот же смысл, что в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции (1) напишем соотношение:

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}\frac{F'(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x'(\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}\,d\partial+\operatorname{Re} e^{i\theta}\frac{P_n'(e^{i\theta})}{P_n\left(e^{i\theta}\right)}$$

и оценим второе слагаемое при $|z|\le 1$

$$\operatorname{Re} z\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}=1+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{p}\frac{k_j z}{z-z_j}\ge 1-\sum_{j=1}^{p}\frac{k_j}{R-1}=\frac{R-n}{R-1}. \tag{13}$$

В силу (10), (12) и (13) получим неравенство (11). Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\underset{|z|=1}{\text{изм}}\arg F(z)=1.$$

На основании принципа аргумента функция (1) при $n>1$ однолистна в E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. Успехи математических наук. 1975. Т. XXX. Вып. 4 (184). С. 3-60.

2. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций. Т. 1. М.: «Наука». 1967. 486 с.

3. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, М.: Физматгиз. 1963. 640 с.

Михаил Викторович СЕМУХИН — доцент кафедры информационных систем

УДК 622.691.4

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕЧЕТКИМ КРИТЕРИЕМ

АННОТАЦИЯ. Предложен алгоритм решения одной задачи оптимизации с нечеткой целевой функцией и четкими ограничениями. Данная постановка возникла при решении задачи оптимального распределения нагрузок для межпромыслового транспорта природного газа.

The algorithm of solution of one task of optimization with the fuzzy goal function and precise limitations is offered. The given setting has arisen at solution of the task of optimal allocation of loads for an intertrade carrier of natural gas.

Во многих задачах планирования приходится рассчитывать оптимальные планы работы экономических и технологических систем в условиях, когда некоторые элементы или подсистемы имеют свои локальные функции цели. При этом локальные цели могут быть заданы в нечеткой форме или в виде экспертных оценок на ограниченном естественном языке, а технологические ограничения должны выполняться строго.

Под нечеткой целью подразумевается цель, которую можно описать как нечеткое множество в соответствующем пространстве [1]. При обычном подходе функция