ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции (1) напишем соотношение:

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}\frac{F'(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}x'(\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}\,d\partial+\operatorname{Re} e^{i\theta}\frac{P_n'(e^{i\theta})}{P_n\left(e^{i\theta}\right)}$$

и оценим второе слагаемое при $|z|\le 1$

$$\operatorname{Re} z\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}=1+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{p}\frac{k_j z}{z-z_j}\ge 1-\sum_{j=1}^{p}\frac{k_j}{R-1}=\frac{R-n}{R-1}. \tag{13}$$

В силу (10), (12) и (13) получим неравенство (11). Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\underset{|z|=1}{\text{изм}}\arg F(z)=1.$$

На основании принципа аргумента функция (1) при $n>1$ однолистна в E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. Успехи математических наук. 1975. Т. XXX. Вып. 4 (184). С. 3-60.

2. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций. Т. 1. М.: «Наука». 1967. 486 с.

3. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, М.: Физматгиз. 1963. 640 с.

Михаил Викторович СЕМУХИН —
доцент кафедры
информационных систем

УДК 622.691.4

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕЧЕТКИМ КРИТЕРИЕМ

АННОТАЦИЯ. Предложен алгоритм решения одной задачи оптимизации с нечеткой целевой функцией и четкими ограничениями. Данная постановка возникла при решении задачи оптимального распределения нагрузок для межпромыслового транспорта природного газа.

The algorithm of solution of one task of optimization with the fuzzy goal function and precise limitations is offered. The given setting has arisen at solution of the task of optimal allocation of loads for an intertrade carrier of natural gas.

Во многих задачах планирования приходится рассчитывать оптимальные планы работы экономических и технологических систем в условиях, когда некоторые элементы или подсистемы имеют свои локальные функции цели. При этом локальные цели могут быть заданы в нечеткой форме или в виде экспертных оценок на ограниченном естественном языке, а технологические ограничения должны выполняться строго.

Под нечеткой целью подразумевается цель, которую можно описать как нечеткое множество в соответствующем пространстве [1]. При обычном подходе функция предпочтительности, используемая в процессе принятия решения, служит для установления линейной упорядоченности на множестве альтернатив. Очевидно, что функция принадлежности нечеткой цели выполняет ту же задачу и может быть получена из функции предпочтительности с помощью нормализации, сохраняющей установленную линейную упорядоченность. В общем случае получаем задачу нелинейного программирования с нечетким критерием и четкими ограничениями. Алгоритм решения подобных задач возник из следующей технологической постановки.

Для крупных газовых месторождений Тюменского региона характерны сложные и разветвленные системы сбора и межпромыслового транспорта газа. Отличительными чертами таких систем являются: кустовое расположение скважин, разветвленная система шлейфов от скважин до установок комплексной подготовки газа (УКПГ), сложная сетевая структура межпромыслового коллектора (МК), наличие нескольких направлений магистрального транспорта газа (выходов системы) и головных компрессорных станций (ГКС). Требования обеспечения надежности систем газодобычи заставляют вводить дополнительные перемычки в системе, закольцовывать газосборные сети. Все это создает большие трудности при расчете и оптимизации режимов работы межпромысловых коллекторов, резко повышает размерность задачи.

Подача газа в магистральные газопроводы (МГ) осуществляется через межпромысловый коллектор, имеющий сложную сетевую структуру. Перед тем как газ поступает в МК производится его очистка и осушка в установках комплексной подготовки газа. Основная цель диспетчерских служб состоит в том, чтобы выбрать рациональные отборы газа по УКПГ с точки зрения эффективного использования технологического оборудования и рационального ведения процесса разработки месторождения в целом, обеспечив при этом выполнение планового задания $Q_{пл}$.

Формально множество допустимых режимов УКПГ может быть описано нечетким множеством. Допустимая производительность и фонд скважин i-ой УКПГ определяют носитель множества $[Q_{i\,min}, Q_{i\,max}]$. На носителе задается функция принадлежности нечеткого множества, которая характеризует степень эффективности режимов работы УКПГ. Анализ показал, что функция принадлежности нечеткого множества треугольного вида достаточно хорошо описывает технологические допустимые режимы:

$$\mu_i(Q_i) = \begin{cases} 0, & Q_i < Q_{i\,min}; \\ -(Q_i - Q_{i\,min})/(Q_{imin} - Q_{icp}), & Q_{i\,min} \le Q_i \le Q_{icp}; \\ (Q_i - Q_{i\,max})/(Q_{icp} - Q_{i\,max}), & Q_{icp} \le Q_i \le Q_{i\,max}; \\ 0, & Q_i > Q_{i\,max}, \end{cases} \quad (1)$$

где i - индекс i-ой УКПГ, i=1,K;

Q_{icp} — наиболее эффективный режим i-ой УКПГ.

Выбрать в качестве оптимального режима работы УКПГ Q_{icp} практически не удается, поскольку нарушаются технологические ограничения, налагаемые на систему:

— давление при входе МК (выходе УКПГ) должно лежать в допустимых пределах:

$$P^{вх}_{i\,min} \le P_i \le P^{вх}_{i\,max}, i = \overline{1,K}; \quad (2)$$

— на выходе МК (входе в головные компрессорные станции МГ) давление должно быть не ниже допустимого

$$P_i \ge P^{вых}_{i\,min}, i = \overline{1,M}; \quad (3)$$

— необходимо обеспечить заданный общий отбор газа:

$$\sum_{i=1}^{K} Q_i = Q_{пл} . \quad (4)$$

Возникает задача распределить $Q_{пл}$ так, чтобы выбранный режим работы МК удовлетворял всем технологическим ограничениям, а режим работы каждой УКПГ был близок к наиболее эффективному $Q_{iср}$. Сложная сетевая структура МК, большая размерность задачи не позволяют решить поставленную задачу без создания принципиально новых методов.

Поскольку цели УКПГ являются нечеткими, наиболее разумно в качестве критерия оптимизации использовать нечеткий критерий Заде [2]:

$$\mu(Q_1, Q_2, ..., Q_K) = \mu_1(Q_1) \wedge \mu_2(Q_2) \wedge ... \wedge \mu_K(Q_K) \Rightarrow \max . \quad (5)$$

Данный критерий позволяет согласовать нечеткие цели каждой УКПГ в единую цель всей системы газодобычи. Следовательно, необходимо решить задачу оптимизации с нечетким критерием (5), четкими ограничениями (2) - (4) и ограничениями, которые описывают движение газа по газотранспортной сети. В результате решения задачи находятся отборы газа по УКПГ Q_i^*.

Газосборная сеть задается в виде связного ориентированного графа без петель. Под узлами (вершинами) графа понимаются все точки разветвления или соединения линейных участков (ЛУ) заданной схемы МК, точки поступления (входы) и отбора (выхода) газа. Ребро представляет линейный участок, соединяющий две вершины графа. Будем считать, что полученный граф имеет N узлов, L ребер, K входов (УКПГ) и M выходов (ГКС).

При таком способе представления газосборной сети стационарное движение газа описывается системой нелинейных алгебраических уравнений, которая включает [3]:

— условия материального баланса для r-ой вершины, $r = \overline{1, N-(K+M)}$

$$\sum_{i \in \Omega_r^+} Q_i - \sum_{j \in \Omega_r^-} Q_j = q_r ; \quad (6)$$

— уравнения движения газа по линейному участку:

$$P_{iн}^2 - P_{iк}^2 = C_i |Q_i| Q_i , \quad (7)$$

где i (j) - индекс i-го (j-го) ребра графа;

Q_i — расход газа по i-му ребру;

q_r — заданный приток (отбор) в вершину с номером r;

Ω_r^+ — множество ребер, входящих в r-ю вершину;

Ω_r^- — множество ребер, выходящих из r-й вершины;

$P_{iн}$, $P_{iк}$ — соответственно, давления в начале и конце i-го линейного участка;

C_i — коэффициент, учитывающий геометрические и гидравлические характеристики линейного участка.

Понятие входящих и выходящих ребер определяет ориентацию графа. Каждое ребро графа характеризуется величиной расхода, входящей в уравнения (6) – (7), а каждый узел — давлением, входящим в уравнение (7).

Таким образом, мы имеем задачу нелинейного программирования с критерием (5) и ограничениями (2) – (4) и (6) – (7).

Для сокращения объема памяти и времени счета на первом этапе решения задачи понижается размерность системы ограничений. Задаются K+M начальных значений управляющих воздействий (расходов и давлений). Будем считать для определенности, что заданы (K+M)–1 расходов Q_i^* и одно давление P_ν^* на выходе УКПГ с номером ν. Производится расчет режима работы МК алгоритмом, предложенным в работе [4], и определяются выходные переменные (квадраты давлений и расходов) при заданных номинальных воздействиях:

1. Начальное приближение величин $Q_i^{(0)}, P_j^{(0)}$ определяется при решении методом последовательного исключения неизвестных линейной системы, составленной из уравнений вида:

$$\sum_{i\in\Omega_r^+} Q_i^{(0)} - \sum_{j\in\Omega_r^-} Q_j^{(0)} = q_r \quad ;$$

$$P_{i\text{н}}^{(0)} - P_{i\text{к}}^{(0)} = C_i^{(0)} Q_i^{(0)}.$$

2. Решается система линейных уравнений относительно неизвестных расходов и квадратов давлений:

$$\sum_{i\in\Omega_r^+} Q_i^{(s)} - \sum_{j\in\Omega_r^-} Q_j^{(s)} = q_r \; ;$$

$$P_{i\text{н}}^{(s)^2} - P_{i\text{к}}^{(s)^2} = C_i^{(s-1)} \left| Q_i^{(s-1)} \right| Q_i^{(s)},$$

где s — номер итерации.

3. Уточняются значения потоков газа по каждому ребру:

$$Q_i^{(s)} = \operatorname{sign}(P_{i\text{н}}^{(s)} - P_{i\text{к}}^{(s)}) \sqrt{\frac{\left| P_{i\text{н}}^{(s)^2} - P_{i\text{к}}^{(s)^2} \right|}{C_i^{(s-1)}}}.$$

4. Проверяется критерий окончания счета:

$$\sum_r \left(\sum_{i\in\Omega_r^+} Q_i^{(s)} - \sum_{j\in\Omega_r^-} Q_j^{(s)} - q_r \right)^2 \le \varepsilon ,$$

где ε — заданная точность.

Если последнее условие выполняется, то расчет заканчивается. В противном случае необходимо вернуться к этапу 2.

Далее квадраты давлений на выходе УКПГ и входе в ГКС приближенно представляются в виде:

$$P_{j\text{вх}}^2 = P_{j\text{вх}}^{2*} + \sum_{r=1}^{(K+M)-1} \left(\frac{\partial P_{j\text{вх}}^2}{\partial Q_r} \right)^* (Q_i - Q_r^*) + \left(\frac{\partial P_{j\text{вх}}^2}{\partial P_\nu^2} \right)^* (P_\nu^2 - P_\nu^{2*}),\ j = \overline{1, K-1},\ j \ne \nu \quad ; \tag{8}$$

$$P_{j\text{вых}}^2 = P_{j\text{вых}}^{2*} + \sum_{r=1}^{(K+M)-1} \left(\frac{\partial P_{j\text{вых}}^2}{\partial Q_r} \right)^* (Q_i - Q_r^*) + \left(\frac{\partial P_{j\text{вых}}^2}{\partial P_\nu^2} \right)^* (P_\nu^2 - P_\nu^{2*}),\ j = \overline{1, M} \quad , \tag{9}$$

где звездочка * — означает, что значения производных и выходных переменных вычислены при номинальных значениях параметров.

Разложение (8), (9) позволяет свести исходную задачу к задаче значительно меньшей размерности с критерием (5) и ограничениями, которые линейны относительно расходов и квадратов давлений:

$$P_{\nu\min}^2 \le P_\nu^2 \le P_{\nu\max}^2 \; ; \tag{10}$$

$$P_{j\min}^2 \le P_j^2 \le P_{j\max}^2 \; .$$

В последнем неравенстве (10) подразумевается, что P_j^2 представлено разложением (8)–(9), $j = \overline{1,(K+M)-1},\ j \ne \nu$. Решив задачу с нечетким критерием (5) и четкими ограничениями (4), (10), находят новые управляющие воздействия. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока управляющие воздействия не перестанут изменяться.

В настоящей работе предлагается метод решения оптимизационных задач с нечетким критерием (5) при линейных ограничениях общего вида. Далее все переменные для упрощения записи обозначаются x_i и образуют вектор-столбец $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ пространства R^n, а линейные ограничения представляются в виде $Ax \le b$, где A — прямоугольная матрица размера $m \times n$, a b — m-мерный вектор. Функции принадлежности $\mu_i(x_i), i=\overline{1,n}$ имеют треугольный вид (1).

Перед тем как перейти к непосредственному описанию алгоритма, докажем утверждения.

Рассмотрим полиэдральное множество $\{x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b}\}$, где $x \in R^n$, $\tilde{A}$ — прямоугольная матрица, состоящая из элементов $\tilde{a}_{kl}, k=\overline{1,2n-1}, l=\overline{1,n}$ и $\tilde{b}$ — вектор с координатами $\tilde{b}_k, k=\overline{1,2n-1}$. Пусть полиэдральное множество образовано системой неравенств вида:

$$\tilde{a}_{2j-1,j}x_j+\tilde{a}_{2j-1,i}x_i \circ \tilde{b}_{2j-1},\ j=\overline{1,n},\ j\ne i; \qquad (11)$$

$$\tilde{a}_{2j,j}x_j+\tilde{a}_{2j,i}x_i \circ \tilde{b}_{2j},\ j=\overline{1,n},\ j\ne i; \qquad (12)$$

$$x_i \circ \hat{x}_i. \qquad (13)$$

Элементы из (11), (12) находятся из определителей второго порядка:

$$\tilde{a}_{2j-1,j}=\tilde{a}_{2j,j}=\begin{vmatrix}1 & \hat{x}_i\\ 1 & x_{icp}\end{vmatrix};$$

$$\tilde{a}_{2j-1,i}=\begin{vmatrix}x_{j\min} & 1\\ x_{jcp} & 1\end{vmatrix};$$

$$\tilde{a}_{2j,i}=\begin{vmatrix}x_{j\max} & 1\\ x_{jcp} & 1\end{vmatrix}; \qquad (14)$$

$$\tilde{b}_{2j-1}=\begin{vmatrix}x_{j\min} & \hat{x}_i\\ x_{jcp} & x_{icp}\end{vmatrix};$$

$$\tilde{b}_{2j}=\begin{vmatrix}x_{j\max} & \hat{x}_i\\ x_{jcp} & x_{icp}\end{vmatrix}.$$

При $\hat{x}_i=x_{i\min}$ символом "$\circ$" обозначен знак "$\ge$" в формуле (11), "$\le$" - в формуле (12) и "$\ge$" — в формуле (13), а при $\hat{x}_i=x_{i\max}$ знаки изменяются соответственно на "$\le$", "$\ge$", "$\le$".

Покажем, что в полиэдре $\tilde{A}x \le \tilde{b}$ функция $\mu(x_1,x_2,...,x_n)$ совпадает с функцией $\mu_i(x_i)$. Для доказательства достаточно показать, что в любой точке $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x \in \{x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b}\}$ выполнено неравенство $\mu_i(x_i) \le \mu_j(x_j), j=\overline{1,n}, j\ne i$.

Пусть $\hat{x}_i=x_{i\min}$, тогда неравенства (11), (12) записываются следующим образом:

$$(x_{icp}-x_{i\min})x_j+(x_{j\min}-x_{jcp})x_i-x_{j\min}x_{icp}+x_{jcp}x_{i\min} \ge 0; \qquad (15)$$

$$(x_{icp}-x_{i\min})x_j+(x_{j\max}-x_{jcp})x_i-x_{j\max}x_{icp}+x_{jcp}x_{i\min} \le 0. \qquad (16)$$

Преобразуем (15):

$$(x_{icp}-x_{i\,min})x_j+(x_{j\,min}-x_{jcp})x_i-x_{j\,min}x_{icp}+x_{jcp}x_{i\,min}+x_{j\,min}x_{i\,min}-x_{j\,min}x_{i\,min}\geq 0 .$$

Последнее неравенство дает:

$$(x_{icp}-x_{i\,min})(x_j-x_{j\,min})+(x_{j\,min}-x_{jcp})(x_i-x_{i\,min})\geq 0.$$

После некоторых преобразований получим:

$$-\frac{x_i-x_{i\,min}}{x_{i\,min}-x_{icp}}\leq-\frac{x_j-x_{j\,min}}{x_{j\,min}-x_{jcp}},$$

или, что тоже самое $\mu_i(x_i)\leq\mu_j(x_j), j=\overline{1,n}, j\neq i$.

Осуществляя подобные преобразования для неравенства (16) имеем:

$$-\frac{x_i-x_{i\,min}}{x_{i\,min}-x_{icp}}\leq\frac{x_j-x_{j\,max}}{x_{jcp}-x_{j\,max}},$$

то есть $\mu_i(x_i)\leq\mu_j(x_j), j=\overline{1,n}, j\neq i$.

Аналогичные рассуждения можно провести при $\widehat{x}_i=x_{i\,max}$.

Рассматриваемый ниже алгоритм является итерационным и основывается на результатах доказанного утверждения. Линеаризация целевой функции в полиэдре $\widetilde{A}x\leq\widetilde{b}$ дает возможность перейти от нелинейной задачи к обычной задаче линейного программирования (ЛП). Неравенство $\mu_i(x_i)\leq\mu_j(x_j), j=\overline{1,n}, j\neq i$ при $x\in\{x\mid\widetilde{A}x\leq\widetilde{b}\}$ позволяет построить алгоритм таким образом, что значение функции $\mu(x_1,x_2,...,x_n)$ от итерации к итерации не убывает.

Метод решения задачи состоит из двух этапов. На первом - находится решение, которое является начальным для второго этапа. Второй этап служит для последовательного приближения полученного решения к оптимальному.

Первый этап алгоритма может быть записан следующим образом:

1. Задается начальная точка $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, $x_j^*\in[x_{j\,min},x_{j\,max}], j=\overline{1,n}$ в пространстве R^n, удовлетворяющая первоначальной системе ограничений $Ax\leq b$.

2. Вычисляются значения $\mu_j=\mu_{x_j}(x_j^*)$.

3. Выбирается минимальное $\mu_{x_j}(x_j^*)$. Положим для определенности $\mu_i\leq\mu_j, j=\overline{1,n}$.

4. Определяется система неравенств (11)–(13), образующая полиэдральное множество $\widetilde{A}x\leq\widetilde{b}$. Если $x_i^*\in[x_{i\,min},x_{icp})$, то $\widehat{x}_i=x_{i\,min}$; в случае $x_i^*\in(x_{icp},x_{i\,max}]$ значение $\widehat{x}_i=x_{i\,max}$. Условие $x_i^*=x_{icp}$ означает, что решение задачи найдено — $x_j^*=x_{jcp}, j=\overline{1,n}$.

5. Симплекс-методом решается задача ЛП с целевой функцией:

$$f(x_i)=\begin{cases}-(x_i-x_{i\,min})/(x_{i\,min}-x_{icp}), x_i^*\in[x_{i\,min},x_{icp});\\(x_i-x_{i\,max})(x_{icp}-x_{i\,max}), x_i^*\in(x_{icp},x_{i\,max}];\end{cases}\Rightarrow\max$$

при ограничениях $Ax\leq b$, $\widetilde{A}x\leq\widetilde{b}$. Очевидно, что решение задачи ЛП не изменится, если максимизировать функцию:

$$\widetilde{f}(x_i)=\begin{cases}x_i, x_i^*\in[x_{i\,min},x_{icp});\\-x_i, x_i^*\in(x_{icp},x_{i\,max}].\end{cases}$$

Пусть $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_n$ — решение задачи ЛП.

6. Осуществляется проверка равенства $\mu(\tilde{x}_i)=1$. Если оно выполнено, то окончательное решение задачи найдено $x_j^* = \tilde{x}_j = x_{jcp}, j=\overline{1,n}$, если нет — переходят к следующему пункту.

7. Полученное решение проверяется на выполнение условий $\mu(\tilde{x}_i) \le \mu(\tilde{x}_j), j=1,n, j \ne i$. Если эти неравенства не выполняются, то осуществляется переход ко второму этапу, в противном случае алгоритм заканчивается, поскольку улучшить полученное решение невозможно.

Второй этап алгоритма записывается следующим образом:

1. Задается начальное приближение .

2. Формируется множество индексов J = {1, 2, ..., n}. Тогда J = J \ i - множество вида {1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n}.

3. Выбирается произвольная функция принадлежности $\mu_{x_j}(x_j)$, которая будет максимизироваться из условия $\mu_{x_i}(x_i^*) = \mu_{x_j}(x_j^*), j \in J$.

4. Индексу i присваивается значение j: i = j.

5. Решается задача оптимизации функции принадлежности $\mu_{x_i}(x_i)$ (пункты 4–5 первого этапа).

6. Сравнивается значение $\mu(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ со значением $\mu(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ или, что тоже самое, $\mu_i(\tilde{x}_i)$ с $\mu_i(x_i^*)$. Если значения совпадают, то следует перейти к следующему пункту. Если нет - осуществляется переход к п.11.

7. Переменным x_j^* присваиваются новые значения $x_j^* = \tilde{x}_j, j=\overline{1,n}$.

8. Из множества J исключается индекс i: J = J \ i.

9. Проверяется условие J = ∅ (символом ∅ обозначено пустое множество). Если это условие выполнено, считается, что решение найдено, в другом случае переходят к следующему пункту.

10. Проверяются неравенства $\mu_{x_i}(x_i^*) < \mu(x_j^*), j \in J$. Если они не выполняются, то возвращаются к п. 3, в противном случае улучшить решение не представляется возможным и алгоритм заканчивает свою работу.

11. Переменным x_j^* присваиваются новые значения $x_j^* = \tilde{x}_j, j=\overline{1,n}$.

12. Восстанавливается множество индексов J = {1, 2, ..., n} \ i.

13. Осуществляется переход к п.10.

Разработанный метод решения задачи оптимизации с нечетким критерием и четкими линейными ограничениями позволяет решить задачу управления МК с нечеткими целями на УКПГ. В результате решения задачи общий плановый расход газа $Q_{пл}$ распределяется так, что каждая УКПГ работает на режиме наиболее близком к оптимальному Q_{icp}, при этом выполняются все требуемые технологические ограничения.

С помощью предложенного алгоритма проводилась оптимизация стационарных режимов работы межпромыслового коллектора Уренгойского месторождения. Анализ результатов расчета показал хорошую сходимость алгоритма. Время работы программы зависит от сложности газосборной сети и для реальных МК составляет 3–5 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир. 1976. 165 с.

2. Кандель А., Байатт У.Дж. Нечеткие множества, нечеткая алгебра, нечеткая статистика. Труды американского общества инженеров-радиоэлектроников. 1978. Т. 66, № 12. С. 37-61.

3. Белоусов В. Д., Блейхер Э.М. и др. Трубопроводный транспорт нефти и газа. М: Недра. 1978. 400 с.

4. Семухин М. В., Крел Л. Д. Кутырев А. Л. Алгоритм расчета стационарного режима работы межпромыслового коллектора сетевой структуры. В сб.: «Проблемы нефти и газа Тюмени». Тюмень: ЗапСибНИГНИ. 1984. Вып. 61. С. 66-68.