Юрий Александрович СИГУНОВ —
Сургутский государственный
университет, доцент
кафедры прикладной математики

УДК 519.6

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПЕРЕСЧЕТ ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В СХЕМАХ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АННОТАЦИЯ. Для стационарных краевых задач предложен метод получения экономичных конечно-элементных схем четвертого порядка точности с итерационным пересчетом узловых производных. Предложенный подход не увеличивает размерности итоговой системы линейных уравнений и не усложняет структуру ее матрицы.

The method of iterative recalculation of the nodal derivatives is proposed for the construction of efficient fourth–order finite element schemes. The proposed approach does not increase dimension of the set of linear equations and the width of its matrix band.

Введение. Улучшение качества результатов численного решения может достигаться двумя путями: уменьшением шага расчетной сетки и применением алгоритмов, имеющих более высокий порядок точности. При наличии необходимой гладкости решения второй путь более предпочтителен не только за счет увеличения скорости сходимости схем высокого порядка, но и вследствие существенно меньших коэффициентов в остаточных членах таких схем. Однако для краевых задач более точные схемы высокого порядка приводят к усложнению вычислительных алгоритмов и снижению их экономичности. Так, применение пятиточечной аппроксимации в разностных методах решения одномерных краевых задач для уравнения второго порядка уже не позволяет использовать экономичный алгоритм прогонки и вызывает дополнительные проблемы при построении разностных уравнений вблизи границ. В многомерном случае усложнения еще более значительны.

Более распространенным является применение аппроксимаций высокого порядка в методе конечных элементов (МКЭ), где для получения дополнительных уравнений используется расширенная система весовых и базисных функций [1, 2]. Однако и здесь применение конечных элементов высокого порядка увеличивает для каждого из них число неизвестных узловых величин, что приводит к увеличению размерности системы численных уравнений и усложнению структуры ее матрицы.

В настоящей статье предлагается итерационный метод пересчета дополнительных узловых величин для получения конечно-элементных схем с эрмитовой кусочно-кубической аппроксимацией на линейных и прямоугольных элементах для одно- и двумерных краевых задач. Предлагаемый подход не требует привлечения дополнительных уравнений и расширения системы весовых функций по сравнению со случаями кусочно-линейной и билинейной аппроксимаций и избегает соответствующего увеличения размерности матрицы итоговой системы уравнений.

1. Одномерные краевые задачи. Для изложения предлагаемого подхода остановимся на примере краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon\varphi''(x)-\varphi(x)=0, \quad 0\le x\le 1 \qquad (1)$$

с граничными условиями $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$.

Пусть на рассматриваемом отрезке задана расчетная сетка с узлами x_i, $i=0,1,\ldots,n$, и x_i – произвольный внутренний узел. Интервалы $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ составляют соответственно левую и правую окрестности узла x_i.

Определим на каждом интервале $x_i \le x \le x_{i+1}$ весовые функции:

$$u_i(x) = (x - x_i)/\Delta x_i\,, \qquad v_i(x) = (x_{i+1} - x)/\Delta x_i\,, \tag{2}$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Интегрирование уравнения (1) по левой и правой окрестностям узла x_i соответственно с весовыми функциями $u_{i-1}(x)$ и $v_i(x)$ дает интегральные тождества:

$$(\varphi, u_{i-1}) + \varepsilon(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))/\Delta x_{i-1} = \varepsilon\varphi'(x_i)\,, \tag{3}$$

$$(\varphi, v_i) - \varepsilon(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))/\Delta x_i = -\varepsilon\varphi'(x_i)\,, \tag{4}$$

в которых $(\varphi, u_i) = \int\limits^{x_{i+1}} \varphi(x) u_i(x)\,dx$.

Тождество для полной окрестности узла получается сложением (3) и (4) с учетом непрерывности производной от φ:

$$(\varphi, u_{i-1}) + (\varphi, v_i) = \varepsilon(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))/\Delta x_i - \varepsilon(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))/\Delta x_{i-1}\,. \tag{5}$$

Уравнения численного решения выводятся путем замены неизвестного решения между узлами сетки подходящими аппроксимациями. Пусть далее величины $\varphi_i \approx \varphi(x_i)$ и $q_i \approx -\varphi'(x_i)$ обозначают приближенные узловые значения решения и его производной, получаемые в результате численного решения, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}$. Аппроксимация неизвестного решения кусочно-линейными функциями:

$$\varphi(x) \approx \varphi_i v_i(x) + \varphi_{i+1} u_i(x)\,, \qquad x_i \le x \le x_{i+1}$$

дает систему трехточечных алгебраических уравнений, имеющую в случае равномерной сетки ($\Delta x_i = h = \text{const}$) простой вид

$$(\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1})/6 - \varepsilon(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})/h^2 = 0\,. \tag{6}$$

Система (6) замыкается соответствующими граничными условиями и представляет стандартную МКЭ–схему второго порядка точности.

Лучшее приближение неизвестного решения между узлами, обеспечивающее к тому же непрерывность первой производной, дает эрмитова кусочно-кубическая аппроксимация:

$$\varphi \approx \varphi_i v_i + \varphi_{i+1} u_i + (q_{i+1}\Delta x_i - \Delta\varphi_i) u_i^2 v_i + (\Delta\varphi_i - q_i \Delta x_i) u_i v_i^2\,, \quad x_i \le x \le x_{i+1}\,. \tag{7}$$

Подстановка (7) в тождества (5) приводит (в случае неравномерной сетки) к шеститочечным уравнениям, для постоянного шага принимающим следующую форму:

$$(9\varphi_{i-1} + 42\varphi_i + 9\varphi_{i+1} - 2hq_{i-1} + 2hq_{i+1})/60 - \varepsilon(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})/h^2 = 0\,. \tag{8}$$

Применение эрмитовой аппроксимации вдвое увеличивает число узловых неизвестных и требует соответствующего удвоения числа уравнений. В рассматриваемом случае стандартный подход в методе конечных элементов использует расширенную систему весовых функций. В результате получается более точная, но менее экономичная схема.

Предлагаемая итерационная процедура пересчета узловых неизвестных для получения аналогичной схемы без увеличения размерности и ширины ленты матрицы системы уравнений сводится к следующему. Пусть $\{\varphi_i^{(0)}\}$ – сеточная функция, полученная по схеме (6) на основе кусочно-линейной аппроксимации. Ее расчет дает одновременно и узловые значения производной $\{q_i^{(0)}\}$ из любого из соотношений (3) или (4), которые можно принять за нулевое приближение. Далее пусть $\varphi^{(s+1)} = \varphi[\varphi_i^{(s+1)}, q_i^{(s)}]$ – кусочно-эрмитово приближение в форме (7) со значениями узловых производных с предыдущей s-й итерации. Тогда сеточная функция $\{\varphi_i^{(s+1)}\}$ рассчитывается из системы трехточечных уравнений:

$$\begin{aligned}(9\varphi_{i-1}^{(s+1)} + 42\varphi_i^{(s+1)} + 9\varphi_{i+1}^{(s+1)})/60 - \varepsilon(\varphi_{i-1}^{(s+1)} - 2\varphi_i^{(s+1)} + \varphi_{i+1}^{(s+1)})/h^2 = \\ = h(q_{i-1}^{(s)} - q_{i+1}^{(s)})/30\end{aligned} \tag{9}$$

с последующим пересчетом узловых значений $q_i^{(s+1)}$ из соотношений (3) или (4), например:

$$q_i^{(s+1)} = (\varphi[\varphi_i^{(s+1)}, q_i^{(s)}], v_i) / \varepsilon - (\varphi_{i+1}^{(s+1)} - \varphi_i^{(s+1)}) / \Delta x_i \,. \tag{10}$$

Проанализируем сходимость предлагаемой процедуры итерационного пересчета, ограничившись случаем равномерной сетки и предполагая существование у решения требуемого числа непрерывных производных.

Пусть узловые значения производных известны с погрешностью, имеющей p-й порядок точности по h, т.е.

$$q_i^{(s)} = -\varphi'(x_i) + \mu_i h^p \,,$$

где ?(x) – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда стандартный анализ (см., например [3]) погрешности схемы (9) приводит к следующей оценке ее погрешности в равномерной сеточной норме:

$$\left\|\delta\varphi^{(s+1)}\right\| = \max\left|\delta\varphi_i^{(s+1)}\right| \le \frac{\varepsilon h^4}{720}\max\left|\varphi^{\mathrm{VI}}(x)\right| + \frac{h^{p+2}}{15}\max\left|\mu'(x)\right| . \tag{11}$$

Погрешность схемы (6) оценивается неравенством:

$$\left\|\delta\varphi^{(0)}\right\| \le \frac{\varepsilon h^2}{12}\max\left|\varphi^{\mathrm{IV}}(x)\right| \,,$$

или для отдельного узла может быть представлена в виде:

$$\delta\varphi_i^{(0)} = \frac{\varepsilon h^2}{12}\gamma_i \,, \quad \gamma_i = \gamma(\xi_i)$$

для некоторой дифференцируемой функции $\varphi(x)$. С учетом последнего соотношения погрешность узловых производных, вычисленных из равенств (3) или (4) на основе линейной аппроксимации решения с узловыми значениями , представляется в виде:

$$q_i^{(0)} - (-\varphi'(x_i)) = -\frac{\varepsilon h^2}{12}\gamma_i' + O(h^3) \,. \tag{12}$$

Таким образом, уже первая итерация по схеме (9) будет давать результаты, соответствующие схеме четвертого порядка точности, с оценкой погрешности:

$$\left\|\delta\varphi^{(1)}\right\| \le \frac{\varepsilon h^4}{720}\max\left|\varphi^{\mathrm{VI}}\right| + \frac{\varepsilon h^4}{180}\max\left|\gamma''\right| \le \frac{\varepsilon h^4}{144}\max\left\{\left|\varphi^{\mathrm{VI}}\right|, \left|\gamma''\right|\right\}.$$

При этом узловые значения $q_i^{(1)}$, вычисленные из (10) на основе кусочно-эрмитовой аппроксимации с узловыми значениями $\varphi_i^{(1)}$ и $q_i^{(0)}$, будут определены так же с четвертым порядком точности. Отсюда в силу оценки (11) следует, что на второй и последующих итерациях погрешности в определении узловых производных входят в члены более малого порядка по h, так что оценка погрешности решения будет совпадать с первым членом неравенства (11), соответствующим оценке погрешности схемы (8) при точном задании значений производных.

Тем самым предлагаемая процедура пересчета дает схему четвертого порядка точности с не улучшаемой далее оценкой погрешности:

$$\left\|\delta\varphi\right\| \le \frac{\varepsilon h^4}{720}\max\left|\varphi^{\mathrm{VI}}\right| \tag{13}$$

за две итерации.

В одномерном случае изложенный подход позволяет получить одну трехточечную схему четвертого порядка в явном виде.

Выразим значения q_i из равенств (3) и (4) при замене в них неизвестного решения кусочно-линейной аппроксимацией:

$$q_i = -h(\varphi_{i-1} + 2\varphi_i)/(6\varepsilon) + \Delta\varphi_{i-1}/h \,, \tag{14}$$

$$q_i = h(2\varphi_i + \varphi_{i+1})/(6\varepsilon) + \Delta\varphi_i/h \,. \tag{15}$$

Заметим, что при подстановке в эти равенства точных узловых значений решения, величины q_i определяются с погрешностью:

$$q_i = -\varphi'(x_i) \mp \frac{h^3}{24}\varphi^{\mathrm{IV}}(\xi_i) \,,$$

имеющей третий порядок по h и противоположные знаки для равенств (14) и (15). Тогда заменой в (8) величин q_{i-1} и q_{i+1} их выражениями из равенств (15) и (14), без увеличения числа неизвестных узловых значений решения, получаем схему четвертого порядка:

$$a_i\varphi_{i-1} + b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i+1} = \varepsilon(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})/h^2 \ ,$$

$$a_i = c_i = 7/60 - h^2/(90\varepsilon)\ ,\ b_i = 23/30 - h^2/(90\varepsilon)\ .$$

Для полученной схемы оценка (11) несправедлива, так как для исключения узловых производных использовались приближения, имеющие разные (противоположные по знаку) функции погрешности. Погрешность данной схемы оценивается неравенством:

$$\|\delta\varphi\| \le \frac{\varepsilon h^4}{240}\max\left|\varphi^{\mathrm{VI}}\right| ,$$

что в три раза хуже оценки (13).

Отметим, что в итерационной процедуре пересчета использование различных соотношений (3) и (4) для уточнения узловых производных не ухудшает результатов, так как в этом случае главный член погрешности для величин q_i определяется погрешностью узловых значений решения φ_i и одинаков для обоих соотношений (3) и (4).

2. Двумерные краевые задачи. Обобщение на многомерный случай изложенной итерационной процедуры повышения порядка точности рассмотрим на примере краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ с граничными условиями первого рода.

Пусть задана расчетная прямоугольная сетка с узлами (x_i, y_j), $i=0,1,\ldots,n$; $j=0,1,\ldots,m$, которой соответствует разбиение области D на элементарные подобласти:

$$D_{ij} = \{(x,y): x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1}\}.$$

Окрестность внутреннего (i,j)-го узла представлена объединением четырех таких подобластей:

$$D^{(i,j)} = \bigcup_{k,l=0,1} D_{i-k,\,j-l}\ .$$

Так же как в одномерном случае уравнения относительно узловых неизвестных выводятся на основе интегрального тождества для окрестности узла с последующей аппроксимацией неизвестного решения. Интегрирование уравнения (16) производится по каждой из подобластей окрестности узла с соответствующими билинейными весовыми функциями, являющимися парными произведениями функций (2) и аналогичных функций вида:

$$u_j(y) = (y - y_j)/\Delta y_j\ ,\quad v_j(y) = (y_{j+1} - y)/\Delta y_j\ .$$

Весовая функция обращается в нуль на внешней границе подобласти и равна единице в узле (i,j).

Так, интегрирование уравнения (16) с весом $v_i(x)v_j(y)$ по подобласти D_{ij} после несложных преобразований приводит к интегральному соотношению:

$$\frac{1}{\Delta x_i}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(\varphi_{i+1}(y) - \varphi_i(y))v_j(y)dy + \frac{1}{\Delta y_j}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x))v_i(x)dx = -Q_{ij}^{(x)} - Q_{ji}^{(y)} \ , \tag{17}$$

в котором $\varphi_i(y) = \varphi(x_i, y),\ \varphi_j(x) = \varphi(x, y_j)$, а величины в правой части равны суммарным взвешенным потокам через внутренние границы подобласти:

$$Q_{ij}^{(x)} = \int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(-\partial\varphi/\partial x\right)_{x=x_i} v_j(y)dy,\ \ Q_{ji}^{(y)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(-\partial\varphi/\partial y\right)_{y=y_j} v_i(x)dx. \tag{18}$$

Такого же вида интегральные соотношения выводятся для остальных подобластей, составляющих окрестность (i,j)-го узла. Итоговое интегральное тождество, выражающее баланс по полной окрестности узла, получается суммированием четырех соотношений вида (17) для соответствующих подобластей. При этом правые части, равные потокам через внутренние границы подобластей, взаимно уничтожаются и в итоговое тождество не входят.

Численные уравнения относительно узловых неизвестных получаются после замены в интегральных тождествах неизвестного решения $\varphi(x,y)$ вдоль линий расчетной сетки подходящими аппроксимациями.

Применение кусочно-линейной аппроксимации вдоль линий сетки:

$$\varphi_j(x) \approx \varphi_{ij} v_i(x) + \varphi_{i+1,j} u_i(x), \quad y = y_j, \quad x_i \le x \le x_{i+1},$$

$$\varphi_i(x) \approx \varphi_{ij} v_j(y) + \varphi_{i,j+1} u_j(y), \quad x = x_i, \quad y_j \le y \le y_{j+1}$$

приводит к системе девятиточечных уравнений для узловых неизвестных, соответствующей известной МКЭ-схеме второго порядка точности при билинейной аппроксимации решения на прямоугольных элементах [2].

Для получения схемы четвертого порядка точности можно использовать одномерные кусочно-эрмитовы аппроксимации решения вдоль сеточных линий, аналогичные (7) и содержащие, кроме узловых значений самого решения, неизвестные узловые значения его частных производных:

$$q_{ij}^{(x)} \approx -(\partial\varphi/\partial x)_{(x_i,y_j)}, \quad q_{ij}^{(y)} \approx -(\partial\varphi/\partial y)_{(x_i,y_j)}.$$

При этом может быть построена итерационная процедура пересчета узловых производных, приводящая к схеме четвертого порядка точности без увеличения размерности системы численных уравнений, как это сделано в одномерной задаче. Отличие от одномерного случая состоит в том, что результаты численного решения по схеме с линейными аппроксимациями не дают явных выражений для узловых значений производных, необходимых в качестве текущих приближений. Таким образом, требуется дополнительная процедура восстановления этих величин по результатам численного счета.

Заметим для этого, что суммирование членов численного уравнения, соответствующих вкладам подобластей D_{ij} и $D_{i,j-1}$ (или $D_{i-1,j}$ и $D_{i-1,j-1}$) и представляющих аппроксимации интегралов в левой части соотношений (17) для указанных подобластей, дает величину, равную суммарному взвешенному потоку вдоль направления x через внутреннюю границу $\{x = x_i, \ y_{j-1} \le y \le y_{j+1}\}$, что эквивалентно уравнению с известной правой частью:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} q_i^{(x)}(y) u_{j-1}(y)dy + \int_{y_j}^{y_{j+1}} q_i^{(x)}(y) v_j(y)dy = Q_{i,j-1}^{(x)} + Q_{ij}^{(x)}, \tag{19}$$

в котором $q_i^{(x)}(y) = -(\partial\varphi/\partial x)_{x=x_i}$.

Из равенств (19) можно получить трехточечные уравнения относительно узловых значений $q_{ij}^{(x)}$ путем замены интегралов подходящими квадратурными формулами. Целесообразно использовать квадратуру, получающуюся при замене на отрезке $[y_{j-1}, y_{j+1}]$ функции $q_i^{(x)}(y)$ многочленом второй степени (аналог формулы Симпсона). В этом случае трехточечные уравнения для постоянного шага $\Delta y_j = h$ принимают вид:

$$h(q_{i,j-1}^{(x)} + 10q_{i,j}^{(x)} + q_{i,j+1}^{(x)})/12 = Q_{i,j-1}^{(x)} + Q_{i,j}^{(x)}. \tag{20}$$

Для каждого фиксированного i система трехточечных уравнений (20), замыкаемая известными значениями $q_{i,0}^{(x)}$ и $q_{i,m}^{(x)}$ из условий на границах y=0 и y=b, позволяет определить узловые значения производных $q_{ij}^{(x)}$ (j=0,1,…,m) вдоль каждой i–ой сеточной линии.

Точно так же производится восстановление узловых производных $q_{ij}^{(y)}$. Для этого используется суммирование членов, дающих вклад в баланс подобластей D_{ij} и $D_{i-1,j}$ (или $D_{i,j-1}$ и $D_{i-1,j-1}$) имеющих общую границу, параллельную оси x. Таким образом, поле узловых значений производных восстанавливается с помощью серии экономичных одномерных прогонок.

В остальном алгоритм итерационного пересчета совпадает с одномерным случаем и также приводит к итоговой схеме четвертого порядка за две итерации.

В заключение отметим, что предлагаемый подход распространяется и на трехмерные задачи. В этом случае итерационный пересчет производится на основе 27-точечных уравнений, а процедура восстановления узловых производных приводит к системам 9-точечных уравнений, т.е. восстановление производных требует решения серии задач размерности на единицу меньшей размерности исходной задачи.

3. Апробация предлагаемого метода была проведена на серии тестовых одно- и двумерных краевых задач. В качестве иллюстрации в таблице представлены погрешности численного решения задачи (1) в равномерной сеточной норме $\|\delta\varphi\| = \max|\varphi_i - \varphi(x_i)|$ для последовательности уточняющих итераций, начиная с нулевой, соответствующей решению по схеме второго порядка, при различных значениях числового параметра ε и шага равномерной сетки h.

	h=0,1	h=0,05	h=0,025	h=0,0125
ε=0,01	$1,35\cdot10^{-2}$ $1,21\cdot10^{-3}$ $2,10\cdot10^{-4}$ $2,72\cdot10^{-4}$	$3,14\cdot10^{-3}$ $6,58\cdot10^{-5}$ $1,54\cdot10^{-5}$ $1,62\cdot10^{-5}$	$7,71\cdot10^{-4}$ $3,89\cdot10^{-6}$ $9.82\cdot10^{-7}$ $9.85\cdot10^{-7}$	$1.92\cdot10^{-4}$ $2.22\cdot10^{-7}$ $5.27\cdot10^{-8}$ $5.27\cdot10^{-8}$
ε=0.001	$9.80\cdot10^{-2}$ $6.51\cdot10^{-2}$ $1.83\cdot10^{-2}$ $1.62\cdot10^{-2}$	$3.42\cdot10^{-2}$ $6.85\cdot10^{-3}$ $9.14\cdot10^{-4}$ $1.68\cdot10^{-3}$	$7.96\cdot10^{-3}$ $4.66\cdot10^{-4}$ $8.52\cdot10^{-5}$ $1.10\cdot10^{-4}$	$1.91\cdot10^{-3}$ $2.56\cdot10^{-5}$ $6.04\cdot10^{-6}$ $6.18\cdot10^{-6}$

Представленные в таблице данные подтверждают выводы, сделанные по анализу сходимости итерационной процедуры пересчета. Сравнение погрешности на сгущающихся вдвое сетках показывает, что уже первая итерация дает результаты, соответствующие схеме четвертого порядка. Вторая итерация дает результаты, также соответствующие схеме четвертого порядка, но с существенно меньшей нормой погрешности. На последующих итерациях погрешность практически стабилизируется. Аналогичные выводы подтверждены тестовыми расчетами двумерных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.