

*Анвар Гумерович КУТУШЕВ —
профессор кафедры механики
многофазных систем,
доктор физико-математических наук,
Сергей Павлович РОДИОНОВ
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник филиала
ИТПМ СО РАН*

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИЛЬНО НЕЯВНЫМ SIP-МЕТОДОМ

АННОТАЦИЯ. Разработан алгоритм численного решения трехмерных эллиптических дифференциальных уравнений, основанный на применении сильно неявной процедуры. В рамках предложенного численного алгоритма решена задача о течении несжимаемой вязкой жидкости в длинном канале.

The algorithm of numerical solution of three — dimensional elliptic differential equations based on using strongly implicit procedure is developed. Under the proposed numerical algorithm the problem of flow incompressible viscous liquid in long canal is solved.

Решение многих научно-технических задач сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Получение аналитических решений таких уравнений возможно лишь в немногих и, как правило, в простейших случаях. В связи с этим, широкое распространение получили численные методы, которые применяются для решения дифференциальных уравнений, представленных в конечно-разностном (дискретизированном) виде, т. е. в конечном счете являющихся системами алгебраических уравнений. Однако для численного решения многомерных задач требуются большие затраты процессорного времени ЭВМ, и поэтому к эффективности используемых при этом вычислительных алгоритмов должны предъявляться высокие требования.

В настоящее время известно большое количество численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. К их числу относится хорошо зарекомендовавший себя по скорости сходимости итерационной SIP – метод (Strongly Implicit Procedure), предложенный Стоуном в [1] для решения систем алгебраических уравнений, получающихся в результате дискретизации эллиптических дифференциальных уравнений по пятиточечной схеме. Еще более экономичный модифицированный сильно неявный алгоритм решения таких уравнений с использованием девятиточечной разностной дискретизации был разработан позднее в [2]. В [3] SIP – метод использовался для решения нелинейных двумерных уравнений гидродинамики.

В настоящей работе на примере уравнения Пуассона SIP – метод распространен на случай систем линейных алгебраических уравнений, представляющих собой разностный аналог трехмерных эллиптических дифференциальных уравнений, дискре-

тизированных по семиточечной схеме. Приведена процедура решения нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений. Получено численное решение задачи о течении несжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения.

Описание SIP-метода. Рассмотрим линейное эллиптическое дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}) = S_{\Phi},$$

где Φ — неизвестная функция (например, температура), Γ_{Φ} — коэффициент переноса, зависящий от пространственных координат x, y, z , но не от самой функции Φ ; S_{Φ} — функция источника.

Производя конечно-разностную дискретизацию этого уравнения по семиточечной схеме методом контрольного объема [4,5], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора Φ :

$$a_p^{i,j,k} \Phi_p = \sum_{nb} a_{nb}^{i,j,k} \Phi_{nb} + b_p, \quad a_p^{i,j,k} = \sum_{nb} a_{nb}^{i,j,k}, \quad (1)$$

где коэффициенты a и b - функции Γ_{Φ} и параметров разностной сетки.

Индексом "p" внизу в уравнении (1) обозначена точка, находящаяся в центре контрольного объема в форме прямоугольного параллелепипеда с номером i, j, k . Нижний индекс nb внизу (number of boundaries) при коэффициенте a означает, что этот коэффициент вычислен на границе с ближайшими соседями контрольного объема P , а именно объемами $W = i-1, j, k$; $E = i+1, j, k$; $S = i, j-1, k$; $N = i, j+1, k$; $B = i, j, k-1$; $T = i, j, k+1$, а при векторе Φ — в самих контрольных объемах (см. рис.1).

Систему конечно-разностных уравнений (1) можно представить в матричной форме:

$$[A]\Phi = B, \quad (2)$$

где $[A]$ — семидиагональная матрица, диагоналями которой являются коэффициенты a_{nb} ($nb = W, E, S, N, B, T$) и a_p . При этом коэффициент a_p находится на главной диагонали матрицы $[A]$.

Решение системы уравнений (1) итерационными методами осуществляется следующим образом. Сперва к правой и левой частям матричного уравнения (2) прибавляется слагаемое $[P]\Phi$, т. е.

$$[A + P]\Phi = B + [P]\Phi, \quad (3)$$

где $[P]$ — матрица близкая к $[A]$, легко поддающаяся численной факторизации с коэффициентами, малыми по абсолютной величине. Затем значение вектора Φ в левой части уравнения (3) берется с последующей $(m+1)$ -ой, а в правой части с данной m -ой итерации, т. е.

$$[A + P]\Phi^{m+1} = B + [P]\Phi^m. \quad (4)$$

Коэффициенты матриц $[A]$ и $[P]$ в ходе выполнения итерационной процедуры не изменяются.

Следуя [6, 7], данный итерационный процесс можно организовать в несколько ином виде. Вводя вектор разности $\delta^{m+1} = \Phi^{m+1} - \Phi^m$ и вектор невязки $R^m = B - [A]\Phi^m$, получим из (4) следующий итерационный алгоритм:

$$[A + P]\delta^{m+1} = R^m + [P]\Phi^m.$$

Обычно [6,7] различные варианты итерационных методов отличаются друг от друга лишь способом выбора матрицы $[P]$.

В SIP – методе матрица $[C] = [A + P]$ представляется в виде произведения нижней $[L]$ и верхней $[U]$ треугольных матриц, причем главная диагональ матрицы $[U]$

состоит из одних единиц. Матрицы $[L]$ и $[U]$ умножаются таким образом, чтобы ненулевые коэффициенты матрицы $[A]$ совпали с расположенными на их месте коэффициентами матрицы $[C]$. Это приводит к появлению в матрице $[C]$ шести дополнительных по сравнению с $[A]$ ненулевых диагоналей, которые и составляют матрицу $[P]$. Отметим, что в случае двумерных уравнений матрица $[P]$ содержит только две ненулевые диагонали [1].

Явные выражения для коэффициентов матрицы $[C]$ через коэффициенты матриц $[L]$ и $[U]$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 -c_W^{i,j,k} &= -a_W^{i,j,k} = l_W^{i,j,k}, & -c_{NW}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k}, \\
 -c_S^{i,j,k} &= -a_S^{i,j,k} = l_S^{i,j,k}, & -c_{TS}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_T^{i,j-1,k}, \\
 -c_B^{i,j,k} &= -a_B^{i,j,k} = l_B^{i,j,k}, & -c_{BE}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_E^{i,j,k-1}, \\
 -c_P^{i,j,k} &= -a_P^{i,j,k} = l_P^{i,j,k} + l_S^{i,j,k} u_N^{i,j-1,k} + l_B^{i,j,k} u_T^{i,j,k-1} + l_W^{i,j,k} u_E^{i-1,j,k}, \\
 -c_T^{i,j,k} &= -a_T^{i,j,k} = l_P^{i,j,k} u_T^{i,j,k}, & -c_{WT}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_T^{i-1,j,k}, \\
 -c_N^{i,j,k} &= -a_N^{i,j,k} = l_P^{i,j,k} u_N^{i,j,k}, & -c_{SE}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_E^{i,j-1,k}, \\
 -c_E^{i,j,k} &= -a_E^{i,j,k} = l_P^{i,j,k} u_E^{i,j,k}, & -c_{BN}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_N^{i,j,k-1},
 \end{aligned} \quad (5)$$

где точки $SE = i+1, j-1, k$; $NW = i-1, j+1, k$; $BN = i, j+1, k-1$; $WT = i-1, j, k+1$; $BE = i+1, j, k-1$ и $TS = i, j-1, k+1$ находятся за пределами исходного семиточечного разностного шаблона.

Таким образом, действие матрицы $[C]$ на вектор Φ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 c_P \Phi_P &= \sum_{nb} c_{nb} \Phi_{nb} + b_P + (c_{SE} \Phi_{SE} + c_{NW} \Phi_{NW} + c_{BN} \Phi_{BN} + \\
 &+ c_{WT} \Phi_{WT} + c_{BE} \Phi_{BE} + c_{TS} \Phi_{TS}). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Из (5) следует, что уравнение (6) отличается от исходного уравнения (1) на величину слагаемого в скобках, которое имеет одинаковый порядок с членами этого уравнения. В результате такой аппроксимации итерационный процесс может стать неустойчивым.

Чтобы частично избавиться от влияния элементов матрицы $[P]$, выразим значения вектора Φ в точках SE, NW, BN, WT, BE, TS через его значения в точках исходного разностного шаблона, т.е. в точках P, W, E, S, N, B, T . Для этой цели разложим вектор Φ в ряд Тейлора. Искомые разложения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{NW} &= \Phi_N + \Phi_W - \Phi_P, & \Phi_{SE} &= \Phi_S + \Phi_E - \Phi_P, \\
 \Phi_{BN} &= \Phi_B + \Phi_N - \Phi_P, & \Phi_{WT} &= \Phi_W + \Phi_T - \Phi_P, \\
 \Phi_{BE} &= \Phi_B + \Phi_E - \Phi_P, & \Phi_{TS} &= \Phi_T + \Phi_S - \Phi_P.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь модифицированное уравнение:

$$\begin{aligned}
 c_P \Phi_P &= \sum_{nb} c_{nb} \Phi_{nb} + b_P + [c_{SE} (\Phi_{SE} - \alpha(\Phi_S + \Phi_E - \Phi_P)) + c_{NW} (\Phi_{NW} - \\
 &- \alpha(\Phi_N + \Phi_W - \Phi_P)) + c_{BN} (\Phi_{BN} - \alpha(\Phi_B + \Phi_N - \Phi_P)) +
 \end{aligned}$$

$$+ c_{WT}(\Phi_{WT} - \alpha(\Phi_B + \Phi_N - \Phi_P)) + c_{BE}(\Phi_{BE} - \alpha(\Phi_B + \Phi_E - \Phi_P)) + \\ + c_{TS}(\Phi_{TS} - \alpha(\Phi_T + \Phi_S - \Phi_P))],$$

которое с точностью до членов второго порядка малости аппроксимирует исходное уравнение (1). Параметр α здесь введен для ускорения сходимости и выбирается из интервала $0 \leq \alpha \leq 1$.

Это уравнение приводится к виду (2) путем группировки подобных слагаемых в уравнении (6) и введением матрицы $[\tilde{C}] = [L][U]$ с элементами:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_W^{i,j,k} &= a_W^{i,j,k} - \alpha(c_{NW}^{i,j,k} + c_{WT}^{i,j,k}), & -\tilde{c}_{NW}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k}, \\ \tilde{c}_S^{i,j,k} &= a_S^{i,j,k} - \alpha(c_{SE}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k}), & -\tilde{c}_{TS}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_T^{i,j-1,k}, \\ \tilde{c}_B^{i,j,k} &= a_B^{i,j,k} - \alpha(c_{BN}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k}), & -\tilde{c}_{BE}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_E^{i,j,k-1}, \\ \tilde{c}_P^{i,j,k} &= a_P^{i,j,k} + \alpha(c_{NW}^{i,j,k} + c_{WT}^{i,j,k} + c_{SE}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k} + c_{BN}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k}), \\ -\tilde{c}_{WT}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_T^{i-1,j,k}, & \tilde{c}_T^{i,j,k} &= a_T^{i,j,k} - \alpha(c_{WT}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k}), \\ -\tilde{c}_{BN}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_N^{i,j,k-1}, & \tilde{c}_N^{i,j,k} &= a_N^{i,j,k} - \alpha(c_{BN}^{i,j,k} + c_{NW}^{i,j,k}), \\ -\tilde{c}_{SE}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_E^{i,j-1,k}, & \tilde{c}_E^{i,j,k} &= a_E^{i,j,k} - \alpha(c_{SE}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k}). \end{aligned}$$

Очевидно, что матрица $[\tilde{C}]$ лучше аппроксимирует $[A]$, чем матрица $[C]$.

Представив матрицу $[\tilde{C}]$ как произведение матриц $[L]$ и $[U]$, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} -\tilde{c}_W^{i,j,k} &= -(a_W^{i,j,k} - \alpha(c_{NW}^{i,j,k} + c_{WT}^{i,j,k})) = l_W^{i,j,k}, \\ -\tilde{c}_{NW}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k}, \\ -\tilde{c}_S^{i,j,k} &= -(a_S^{i,j,k} - \alpha(c_{SE}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k})) = l_S^{i,j,k}, & -\tilde{c}_{TS}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_T^{i,j-1,k}, \\ -\tilde{c}_B^{i,j,k} &= -(a_B^{i,j,k} - \alpha(c_{BN}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k})) = l_B^{i,j,k}, & -\tilde{c}_{BE}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_E^{i,j,k-1}, \\ \tilde{c}_P^{i,j,k} &= a_P^{i,j,k} + \alpha(c_{NW}^{i,j,k} + c_{WT}^{i,j,k} + c_{SE}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k} + c_{BN}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k}), \\ -\tilde{c}_{WT}^{i,j,k} &= l_W^{i,j,k} u_T^{i-1,j,k}, & -\tilde{c}_T^{i,j,k} &= -(a_T^{i,j,k} - \alpha(c_{WT}^{i,j,k} + c_{TS}^{i,j,k})) = l_P^{i,j,k} u_T^{i,j,k}, \\ -\tilde{c}_{BN}^{i,j,k} &= l_B^{i,j,k} u_N^{i,j,k-1}, \\ -\tilde{c}_N^{i,j,k} &= -(a_N^{i,j,k} - \alpha(c_{BN}^{i,j,k} + c_{NW}^{i,j,k})) = l_P^{i,j,k} u_N^{i,j,k}, & -\tilde{c}_{SE}^{i,j,k} &= l_S^{i,j,k} u_E^{i,j-1,k}, \\ -\tilde{c}_E^{i,j,k} &= -(a_E^{i,j,k} - \alpha(c_{SE}^{i,j,k} + c_{BE}^{i,j,k})) = l_P^{i,j,k} u_E^{i,j,k}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений нетрудно получить выражения для коэффициентов матриц $[L]$ и $[U]$:

$$\begin{aligned} l_W^{i,j,k} &= -a_W^{i,j,k} / (1 + \alpha(u_N^{i-1,j,k} + u_T^{i-1,j,k})), \\ l_S^{i,j,k} &= -a_S^{i,j,k} / (1 + \alpha(u_E^{i,j-1,k} + u_T^{i,j-1,k})), \\ l_B^{i,j,k} &= -a_B^{i,j,k} / (1 + \alpha(u_N^{i,j,k-1} + u_E^{i,j,k-1})), \end{aligned} \tag{7}$$

$$u_B^{i,j,k} = (-a_B^{i,j,k} - \alpha(l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k} + l_B^{i,j,k} u_N^{i,j,k-1})) / l_P^{i,j,k},$$

$$u_N^{i,j,k} = (-a_N^{i,j,k} - \alpha(l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k} + l_B^{i,j,k} u_N^{i,j,k-1})) / l_P^{i,j,k}$$

$$u_E^{i,j,k} = (-a_E^{i,j,k} - \alpha(l_W^{i,j,k} u_N^{i-1,j,k} + l_B^{i,j,k-1} u_N^{i,j,k-1})) / l_P^{i,j,k}.$$

Итерационный алгоритм с использованием модифицированной матрицы $[\tilde{C}]$ исходит из уравнения:

$$[\tilde{C} + M] \delta^{m+1} = R^m = B - [A] \Phi^m = [L][U] \delta^{m+1},$$

где $[M] = [\tilde{C} - A]$ — матрица с малыми по абсолютной величине коэффициентами.

Вводя промежуточный вектор $V^{m+1} = [U] \delta^{m+1}$, получим итерационный алгоритм, состоящий из прямой и обратной прогонки [6,7]:

$$[L] V^{m+1} = R^m, \quad (8)$$

$$[U] \delta^{m+1} = V^{m+1}, \quad (9)$$

Таким образом, подводя итог вышеизложенному, получаем следующий трехмерный SIP – алгоритм:

1. Вычисляются коэффициенты матриц $[L]$ и $[U]$ согласно (7) прямой прогонкой;

2. Находится вектор невязки:

$$R_{i,j,k} = a_W^{i,j,k} \Phi_W + a_E^{i,j,k} \Phi_E + a_S^{i,j,k} \Phi_S +$$

$$+ a_N^{i,j,k} \Phi_N + a_B^{i,j,k} \Phi_B + a_T^{i,j,k} \Phi_T - a_P^{i,j,k} \Phi_P + b_P^{i,j,k}.$$

3. Прямой прогонкой вычисляются составляющие вектора V согласно выражению (8):

$$V_{i,j,k} = (R_{i,j,k} - l_S^{i,j,k} V_{i,j-1,k} - l_W^{i,j,k} V_{i-1,j,k} - l_B^{i,j,k} V_{i,j,k-1}) / l_P^{i,j,k}.$$

4. Отыскивается вектор разности δ согласно (9) обратной прогонкой:

$$\delta_{i,j,k}^{m+1} = V_{i,j,k} - u_N^{i,j,k} \delta_{i,j+1,k} - u_E^{i,j,k} \delta_{i+1,j,k} - u_T^{i,j,k} \delta_{i,j,k+1};$$

5. Рассчитываются значения Φ на следующей итерации:

$$\Phi_{i,j,k}^{m+1} = \Phi_{i,j,k}^m + \delta_{i,j,k}^{m+1};$$

6. Этапы 2-5 повторяются до тех пор, пока невязка R не будет удовлетворять критерию сходимости. Коэффициенты матриц $[L]$ и $[U]$ на этих этапах не изменяются.

Критерий сходимости согласно [4,8] выбирается следующим образом. Итерации производятся до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$r^m = \|R\|^m / ref \leq \varepsilon,$$

где

$$\|R\|^m = \sum_{i,j,k} |R_{i,j,k}^m|, \quad ref = \Phi_{ref} / L_{ref}^2.$$

ε — наперед заданное число т.е. (требуемая точность); Φ_{ref} и L_{ref} соответственно характерные значения величины Φ и длины для конкретной задачи.

Решение SIP-методом нелинейных дифференциальных уравнений, записанных в разностном виде:

$$[A(\Phi)] \Phi = B(\Phi),$$

а также линейных уравнений с граничными условиями, содержащими функцию Φ , можно осуществлять, используя следующий итерационный алгоритм:

$$[\tilde{C}^m + M^m] \delta^{m+1} = R^m = B^m - [A^m] \Phi^m = [L^m][U^m] \delta^{m+1},$$

$$A^m = A(\Phi^m), B^m = B(\Phi^m).$$

В этом случае итерационный процесс отличается от вышеописанного тем, что коэффициенты матриц $[L]$ и $[U]$ необходимо вычислять на каждой итерации.

Реализацию граничных условий можно проводить двумя способами: 1) переносом граничных значений коэффициентов a в источниковую часть B и 2) аппроксимацией граничных значений величины Φ [5]. В первом случае расчетная область охватывает внутреннюю часть вместе с границей, при этом уравнение рассматривается как нелинейное на границе; во втором случае значение Φ на границе определяется экстраполяцией изнутри расчетной области таким образом, чтобы граничное значение потока величины Φ было равно заданному. Расчетным путем установлено, что более быстрая сходимость итераций имеет место в первом случае. Кроме того, при этом возможно производить прогонки во всех точках разностной сетки по единому алгоритму.

Постановка задач и результаты расчетов. Для тестирования и исследования сходимости развитого трехмерного SIP-алгоритма решались следующие модельные задачи.

Задача 1. Имеется длинный канал квадратного сечения в координатах (y, z) , $(0 < y < L_y, 0 < z < L_z)$, на границе «west» которого $(x = 0)$ имеется отверстие в форме квадрата, расположенного в центре сечения, через которое в канал втекает несжимаемая ньютоновская жидкость. На границе «east» канала $(x = L_x)$ имеется отверстие, равное его сечению, через которое жидкость вытекает. Цель исследования заключалась в изучении сходимости SIP-алгоритма, а также проверке правильности работы вычислительной программы путем сопоставления численных и аналитических расчетов.

Граничные условия для сформулированной выше задачи задавались следующим образом. На входном сечении задавалось распределение составляющей скорости вдоль оси X в соответствии с аналитическим решением для бесконечного длинного канала [9]:

$$u(y, z) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left(1 - \frac{f(y)}{f(h)}\right) g(z),$$

$$f(y) = ch \left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi y}{\kappa h} \right), \quad g(z) = \cos \left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi z}{\kappa h} \right), \quad (10)$$

$$A = \frac{64\kappa Q}{\pi^3 h^2 r(\kappa)}, \quad h = 0,5L_z, \quad \kappa = L_z / L_y, \quad r(1) = 2,253,$$

$$Q = \rho S_{in} U, \quad S_{in} = L_y L_z.$$

Здесь $u(y, z)$ – компонента скорости втекающей жидкости вдоль оси x ; L_y и L_z – размеры входного отверстия; ρ , U и Q – соответственно плотность, средняя скорость и расход втекающей жидкости.

На выходном сечении канала ставилось условие равенства нулю градиента скорости. На остальных границах трубы задавалось условие равенства нулю всех компонент скорости жидкости.

Задача 2. В расчетной области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с длинами сторон L_x , L_y и L_z , задано распределение температуры согласно следующему выражению:

$$\frac{T(x, y, z) - T_0}{T_{in} - T_0} = \sin \left(\pi \frac{x}{L_x} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{L_y} \right) \sin \left(\pi \frac{z}{L_z} \right),$$

где $T_{in} = 1$ — температура в центре расчетной области. На границах расчетной области задана постоянная температура $T_0 = 0$. Температура внутри расчетной области удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Требуется изучить влияние параметров разностной сетки и параметра α на закономерности сходимости SIP-алгоритма к точному решению $T(x, y, z) = 0$.

Вычислительная программа была реализована на алгоритмическом языке FORTRAN – 77. Расчеты проводились на вычислительной станции CDC – 4330. Время расчета одного варианта составляло 1–5 мин.

Обратимся к результатам численного решения сформулированных выше задач. На рис. 2 сплошными линиями показаны изолинии X - компоненты скорости жидкости в сечении канала, лежащего в координатной плоскости (y, z) . Для сравнения штриховыми линиями нанесены аналогичные изолинии, полученные в соответствии с аналитическим решением (10). Решение производилось на разностной сетке, содержащей $12 \times 12 \times 12$ контрольных объемов SIP-методом с использованием итерационной процедуры «SIMPLE» Патанкара и Сполдинга [5]. Точность расчетов $\epsilon = 10^{-3}$, размеры канала $L_x = 0,5$ м, $L_y = L_z = 0,05$ м. Плотность и динамическая вязкость жидкости $\rho = 1000$ кг/м³ и $\mu = 6,85 \cdot 10^{-4}$ Па·с; расход жидкости $Q = 1,08 \cdot 10^{-4}$ кг/с, что соответствует числу Рейнольдса $Re = 0,31$. Из рис. 2 видно удовлетворительное совпадение численного и аналитического решений, что свидетельствует о правильности работы SIP-алгоритма.

Некоторые результаты численного решения задачи 2 представлены в таблице, где показано влияние параметра α на быстроту сходимости SIP-алгоритма (число итераций, при котором достигается заданная точность решения). Из таблицы видно, что наилучшая сходимость получается при значениях параметра α близких к единице. В случае $|\alpha| \gg 1$ итерации расходятся. На это указывается также в работе [4], где рекомендуется использовать оптимальное значение $\alpha \cong 0,92$ для двухмерных задач. На основании табличных данных такое же значение параметра α можно рекомендовать и при решении трехмерных задач. Размеры расчетной области и параметры разностной сетки, используемые в расчетах для получения представленных в таблице результатов, такие же, как и в задаче 1.

Таблица 1

α	-5	-4	-3	-2,5	-1,5	-1	-0,5	0	0,2
N_{it}	Расх.	44	43	42	39	38	36	33	32
α	0,4	0,6	0,8	0,92	1,0	1,2	1,3		
N_{it}	30	28	26	24	22	17	Расх.		

На рис. 3 сплошной линией изображена зависимость числа итераций, необходимых для решения задачи 2 с точностью $\epsilon = 10^{-5}$ при $\alpha = 0,92$ от полного числа контрольных объемов в кубической расчетной области. Для сравнения штриховой линией обозначена аналогичная зависимость, получающаяся в случае двухмерной задачи в квадратной расчетной области. Из рис. 3 видно, что при равном числе контрольных объемов трехмерный SIP-алгоритм может оказаться эффективнее двухмерного.

Таким образом, в настоящей работе SIP-методом получено численное решение трехмерных уравнений Навье-Стокса для движения несжимаемой жидкости, что доказывает правильность работы этого метода. На примере уравнения Лапласа исследована сходимость SIP-метода. Получено оптимальное значение управляющего параметра сходимости итераций.

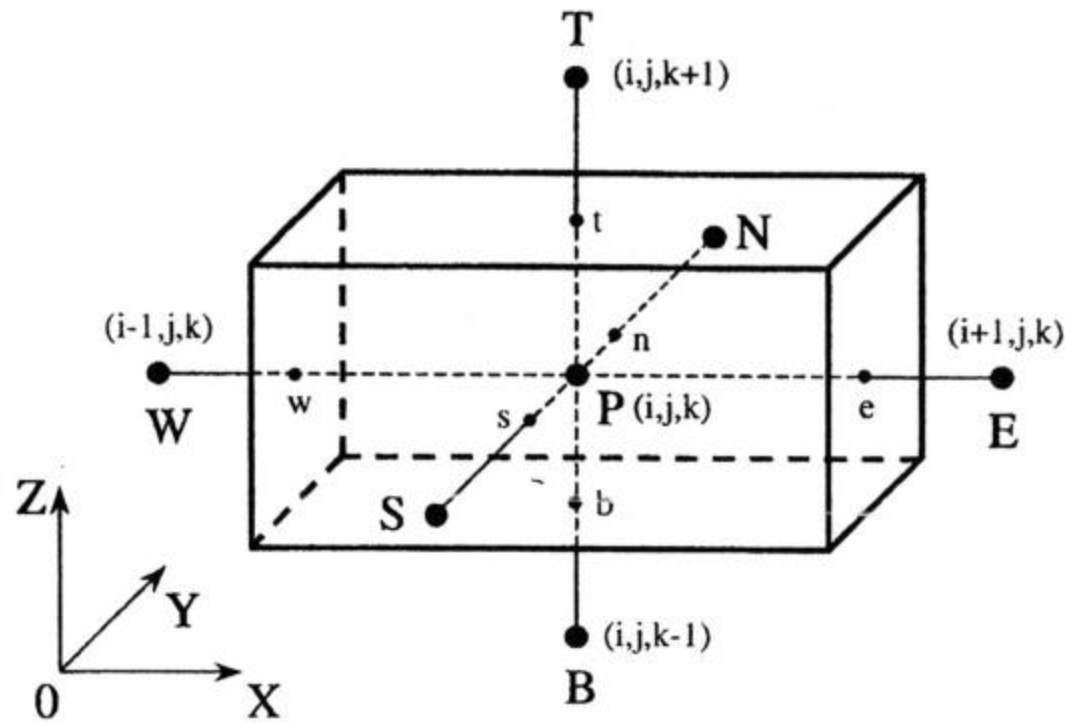


Рис. 1. Схематическое представление шаблона семиточечной разностной схемы в методе контрольного объема в декартовых координатах x, y, z . Буквами $nb = w, e, s, n, b, t$ изображены точки, лежащие в центрах граней контрольного объема. Через W, E, S, N, B, T обозначены точки, находящиеся в центрах соседних контрольных объемов; точка P - центр контрольного объема с номером i, j, k .

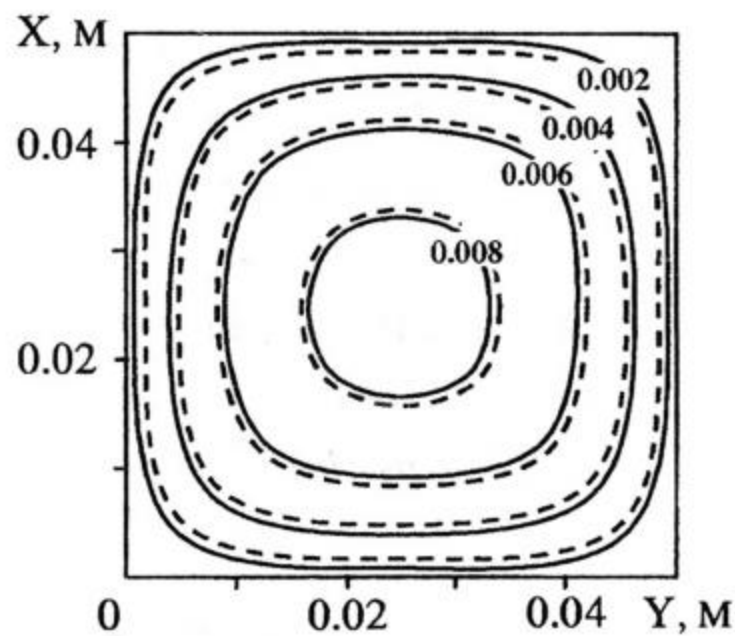


Рис. 2. Распределение нормальной составляющей скорости вязкой жидкости (м/с) в поперечном сечении длинного канала, полученное численно (сплошные линии) и аналитически (штриховые линии). Размеры поперечного сечения канала $0,05 \times 0,05$ м. Длина канала - 0,5 м. Число Рейнольдса - 0,31.

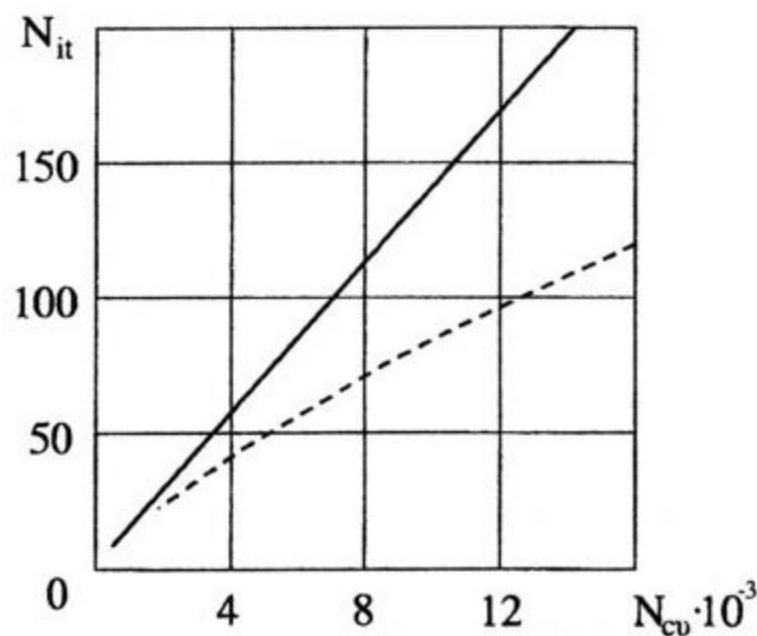


Рис. 3. Зависимость числа итераций, необходимых для сходимости решения задач о выравнивании температуры внутри куба (сплошная линия) и квадрата (штриховая линия) с точностью $\epsilon = 10^{-5}$ от числа контрольных объемов в соответствующих расчетных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stone H.L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial equations //SIAM J. Numer. anal. 1968. No 5, P. 530–558.
2. Schneider G.E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems //Numer. heat transfer, 1981. V.4. P.1–19.
3. Rubin S. G., Khosla P. K. Navier-Stokes calculation with a coupled strongly implicit method // Comput. fluids, 1981. V. 9. P. 163-180.
4. Peric M., Shceuerer G. CAST-a finite volume method for predicting two-dimensional flow and heat transfer phenomena. //GRS technische notiz SRR-89-01. September 1989.
5. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152с.
6. Андерсон Д., Таннехилл Дж. Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
7. Флетчер Р. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М: Мир, 1990.
8. Sommerfeld M., Kohnen G., Qiu H.H. Spray evaporation in turbulent flow: Numerical calculations and detailed experiments by phase-Doppler anemometry. //Revue de Francais du petrole. 1993. V. 48. No 6. P.104-109.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1970. 847с.

*Анвар Гумерович КУТУШЕВ —
профессор кафедры механики
многофазных систем,
доктор физико-математических наук,
Игорь Валентинович КОСТОЛОМОВ —
аспирант кафедры физики Тюменской
государственной архитектурно-
строительной академии*

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВЫНУЖДЕННОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

АННОТАЦИЯ. Сообщаются результаты математического моделирования трехмерных стационарных движений воздуха в ограниченных объемах в условиях вынужденной и свободной конвекции. Результаты численного исследования проиллюстрированы полями скоростей и давлений газа, а также зависимостями тепловых потоков на стенках от числа Gr и безразмерных геометрических параметров задач.

The authors present the results of mathematical modeling of three-dimensional stationary fluxes of air in limited volumes in conditions of forced and free convection. The results of numeral research are illustrated by fields of velocities and temperatures of gas, as well as by the dependencies of heat flows on walls upon numbers of Gr and non-dimensional geometrical parameters of the problem.

Вынужденное изотермическое течение газа. Для теоретического описания трехмерного нестационарного ламинарного или турбулентного течения газа в ограниченном объеме используются следующие допущения: газ считается несжимаемым ($\rho = \text{const}$); течение газа — изотермическое; ламинарное течение описывается в рамках уравнений Навье – Стокса, а турбулентное течение — на основе “k-ε” модели