

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stone H.L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial equations //SIAM J. Numer. anal. 1968. No 5, P. 530–558.
2. Schneider G.E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems //Numer. heat transfer, 1981. V.4. P.1–19.
3. Rubin S. G., Khosla P. K. Navier-Stokes calculation with a coupled strongly implicit method // Comput. fluids, 1981. V. 9. P. 163-180.
4. Peric M., Shceuerer G. CAST-a finite volume method for predicting two-dimensional flow and heat transfer phenomena. //GRS technische notiz SRR-89-01. September 1989.
5. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152с.
6. Андерсон Д., Таннехилл Дж. Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
7. Флетчер Р. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М: Мир, 1990.
8. Sommerfeld M., Kohnen G., Qiu H.H. Spray evaporation in turbulent flow: Numerical calculations and detailed experiments by phase-Doppler anemometry. //Revue de Francais du petrole. 1993. V. 48. No 6. P.104-109.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1970. 847с.

*Анвар Гумерович КУТУШЕВ —  
профессор кафедры механики  
многофазных систем,  
доктор физико-математических наук,  
Игорь Валентинович КОСТОЛОМОВ —  
аспирант кафедры физики Тюменской  
государственной архитектурно-  
строительной академии*

УДК 519.63

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВЫНУЖДЕННОЙ И ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ**

*АННОТАЦИЯ. Сообщаются результаты математического моделирования трехмерных стационарных движений воздуха в ограниченных объемах в условиях вынужденной и свободной конвекции. Результаты численного исследования проиллюстрированы полями скоростей и давлений газа, а также зависимостями тепловых потоков на стенках от числа Gr и безразмерных геометрических параметров задач.*

*The authors present the results of mathematical modeling of three-dimensional stationary fluxes of air in limited volumes in conditions of forced and free convection. The results of numeral research are illustrated by fields of velocities and temperatures of gas, as well as by the dependencies of heat flows on walls upon numbers of Gr and non-dimensional geometrical parameters of the problem.*

**Вынужденное изотермическое течение газа.** Для теоретического описания трехмерного нестационарного ламинарного или турбулентного течения газа в ограниченном объеме используются следующие допущения: газ считается несжимаемым ( $\rho = \text{const}$ ); течение газа — изотермическое; ламинарное течение описывается в рамках уравнений Навье – Стокса, а турбулентное течение — на основе “k-ε” модели

турбулентности. Соответствующая система уравнений движения газа представлена в виде следующего обобщенного безразмерного уравнения переноса, записанного в дивергентной форме [1]:

$$\partial\Phi/\partial\tau + \text{div}(V\Phi) = \text{div}(\Gamma_\Phi \text{grad}\Phi) + S_\Phi, \quad (1)$$

где безразмерные величины  $\Phi, \Gamma_\Phi, S_\Phi$  приведены в следующей таблице:

$\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
1	0	0
$v_i$	$Re_e^{-1}$	$-\partial p/\partial x_i + \partial(Re_e^{-1} \partial v_j/\partial x_i)/\partial x_j$
$k$	$Re_e^{-1} \sigma_k^{-1}$	$Re_e^{-1} P_k - \epsilon$
$\epsilon$	$Re_e^{-1} \sigma_\epsilon^{-1}$	$\epsilon k^{-1} (c_{\epsilon 1} Re_e^{-1} P_k - c_{\epsilon 2} \epsilon)$

Здесь  $p$  – модифицированное давление, согласно Бэтчелору, представляющее собой разность абсолютного и гидростатического давлений [2];  $k, P_k, \epsilon$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, скорости генерации и диссипации турбулентности;  $\tau$  – время;  $v_i$  – составляющая вектора скорости  $V$  вдоль декартовой координаты  $x_i$  ( $i=1,2,3$ );  $Re_e$  – эффективное число Рейнольдса;  $c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\epsilon$  – константы “ $k$ - $\epsilon$ ” модели турбулентности, значения которых равны [3]:  $c_{\epsilon 1}=1,44; c_{\epsilon 2}=1,92; \sigma_k=1,0; \sigma_\epsilon=1,3$ . Выражение для скорости генерации турбулентности имеет вид:

$$P_k = 2e_{ij}e_{ji}, \quad e_{ij} = 0,5(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i). \quad (2)$$

При обезразмеривании системы уравнений (1) использовались характерные масштабы длины ( $L$ ), скорости ( $v_*$ ), времени ( $t_*=L/v_*$ ), давления ( $\rho v_*^2$ ), кинетической энергии турбулентности ( $k_*=v_*^2$ ) и скорости ее диссипации ( $\epsilon_*=k_*^{3/2}/L$ ). За характерные значения длины ( $L$ ) и скорости ( $v_*$ ) выбраны соответственно расстояние  $L_1$  и средняя скорость входного потока  $v_{in}$ .

Эффективное число Рейнольдса в турбулентном потоке определяется из соотношений:

$$Re_e = v_* L \rho / \mu_e; \quad \mu + \mu_t = 1; \quad \mu_t = C_\mu Re_e k^2 / \epsilon,$$

где  $\mu$  и  $\mu_t$  — динамическая молекулярная и турбулентная вязкости, отнесенные к эффективной турбулентной вязкости ( $\mu_e$ );  $C_\mu$  — постоянная модели турбулентности [3], равная 0,09.

Уравнения движения газа (1) являются эллиптическими по пространству и параболическими по времени. При их решении использовались граничные условия типа Дирихле (на твердых стенках и во входных потоках) и условия типа Неймана (в выходных потоках). В частности, на твердой стенке для скорости полагается справедливым условие прилипания ( $v_{in}=0$  ( $i=1,2,3$ )). Для ламинарных течений величина безразмерного касательного напряжения на стенке определяется законом Стокса. В случае турбулентных течений значение касательного напряжения находится из выражения для логарифмического профиля скорости.

На входной границе величины турбулентности  $k$  и  $\epsilon$  задаются в соответствии с выражениями [4,5]:

$$k = 3v'^2/2, \quad \epsilon = k^{3/2}/l_t, \quad v'^2 = (Tu v_{in})^2, \quad l_t = aL_{in},$$

где  $v'^2$  – среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций;  $Tu$  – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность турбулентных пульсаций по отношению к средней скорости входного потока;  $a$  — отношение характерного масштаба турбулентности к характерному линейному размеру входного сечения. Для рассматриваемых случаев движения параметры  $Tu$  и  $a$  находятся соответственно в интервалах ( $0 < Tu < 0,2$  и  $0,01 < a < 1,0$ ).



На выходной границе задается условие отсутствия касательных напряжений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = 0 \quad (\Phi = v_i, k, \varepsilon).$$

Система дифференциальных уравнений движения газа (1) характеризуется следующими безразмерными параметрами:  $c_{e1}, c_{e2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_\mu, Re_e$ . Из граничных условий определяются дополнительные безразмерные параметры: длины сторон –  $L_i$ , размеры входного –  $L_i^{in}$  и выходного отверстий –  $L_i^{out}$ , а также безразмерные расстояния, характеризующие расположение отверстий –  $l_i^{in}, l_i^{out}$  ( $i=1,2,3$ ).

Сформулируем задачу о вынужденной конвекции газа в ограниченном объеме на примере принудительной вентиляции помещения, осуществляемой в стационарном режиме ( $\partial/\partial\tau=0$ ) при постоянной температуре. Пусть имеется помещение с теплоизолированными стенами, показанное на рис. 1. В нижней части левой грани имеется отверстие, через которое внутрь помещения подается ламинарный или турбулентный поток воздуха. На верхней грани располагается выходное отверстие, через которое производится отвод воздуха из помещения. Требуется определить поля течения воздуха внутри помещения.

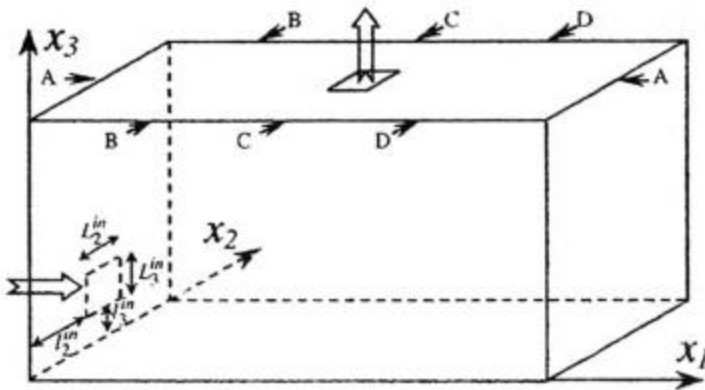


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Решение задачи производилось методом контрольного объема [1], с использованием алгоритма «SIMPLE» на разностной сетке, содержащей  $40 \times 20 \times 20$  контрольных объемов. При этом использовались следующие значения геометрических и газодинамических безразмерных параметров задачи: размеры помещения –  $L_1=1, L_2=L_3=0,6$ ; размеры входного отверстия –  $L_2^{in}=L_3^{in}=0,067$ ; выходного отверстия –  $L_1^{out}=0,053, L_2^{out}=0,067$ ; расстояния отверстий от осей –

$l_2^{in}=0,267, l_3^{in}=0,03, l_1^{out}=0,457, l_2^{out}=0,267$ ;  $\rho_{in}=1, \mu=0,09; v_{in}=1, k_{in}=0,03, l_t=0,006$ . В прежних обозначениях это соответствует следующим размерным величинам:  $L_1=5\text{м}, L_2=L_3=3\text{м}; L_2^{in}=L_3^{in}=0,334\text{м}; L_1^{out}=0,264\text{м}, L_2^{out}=0,334\text{м}; l_2^{in}=1,336\text{м}, l_3^{in}=0,167\text{м}, l_1^{out}=2,376\text{м}, l_2^{out}=1,336\text{м}; } v_{in}=1,21 \text{ кг/м}^3, \mu=1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; v_{in}=0,3 \text{ м/с}, k_{in}=0,003 \text{ м}^2/\text{с}^2, l_t=0,03 \text{ м}.$

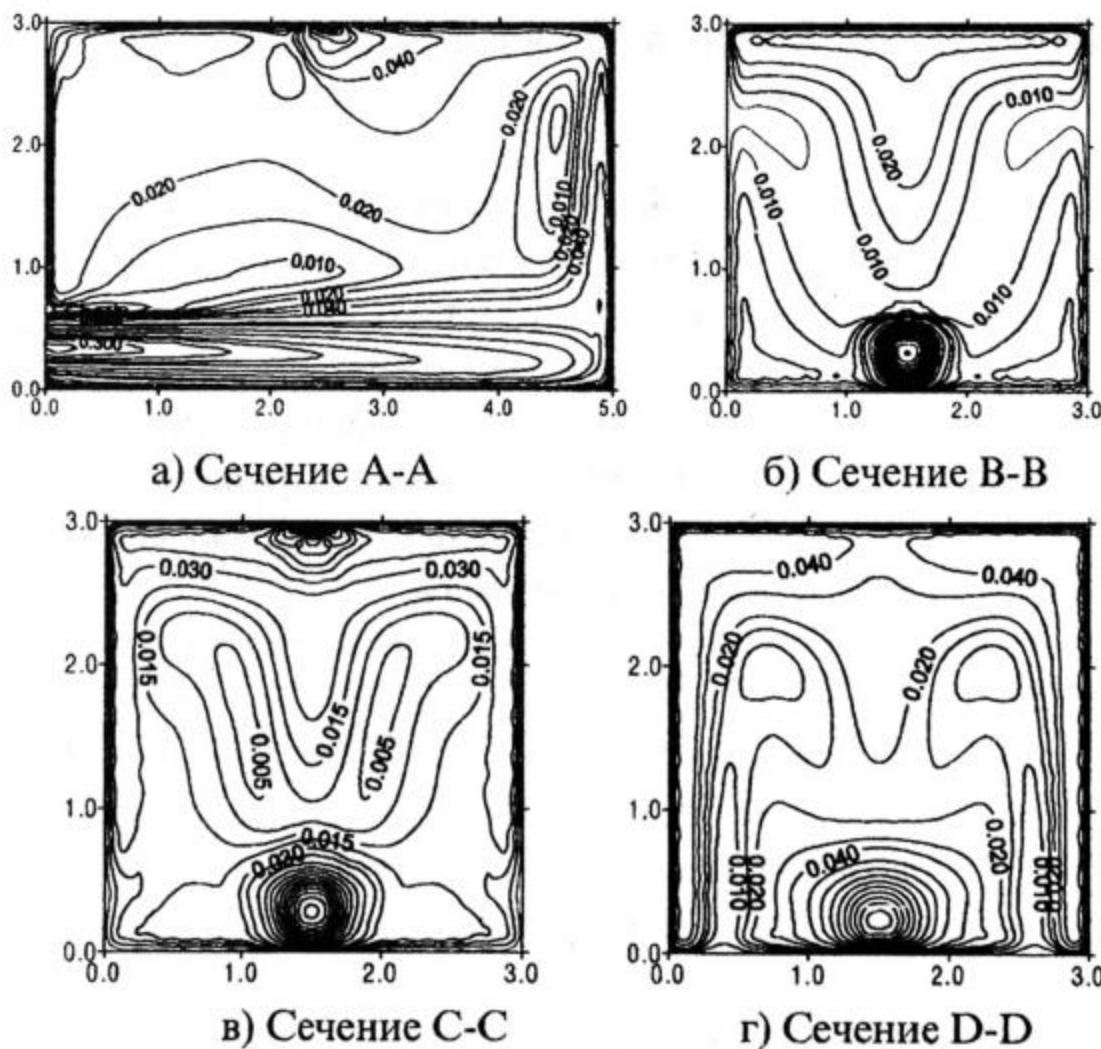


Рис. 2. Изолинии полной скоростной величины в различных сечениях помещения

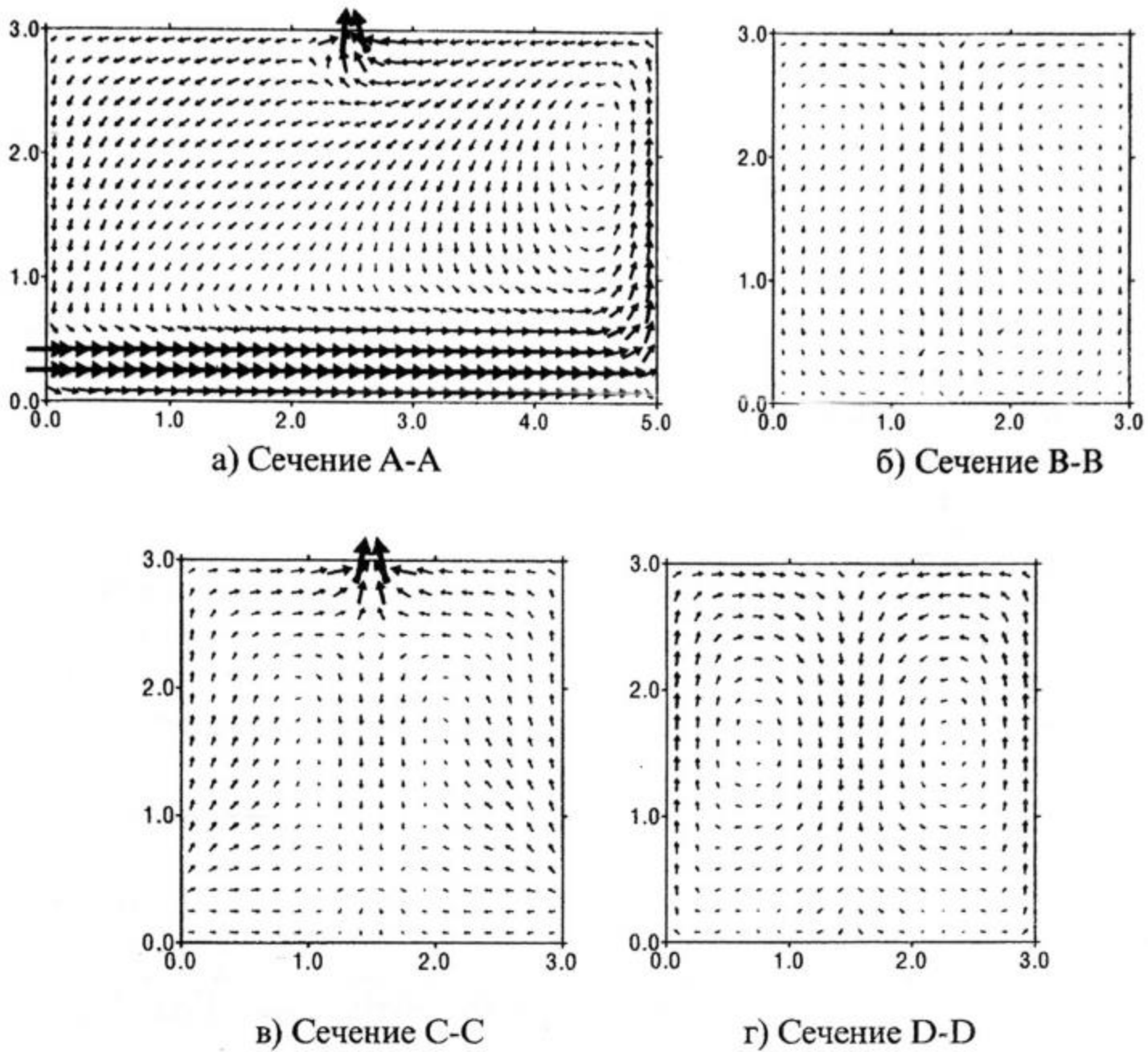


Рис.3. Векторные поля скорости в различных сечениях помещения

Обратимся к результатам численного расчета сформулированной выше задачи. Для удобства восприятия результаты счета приводятся в размерном виде. На рис.2 представлены стационарные поля течения воздуха в виде изолиний равных скоростей в различных сечениях помещения: сечение А-А ( $x_2=1,5$  м), В-В ( $x_1=1,25$  м), С-С ( $x_1=2,5$  м), D-D ( $x_1=3,75$  м). На рис. 3 показаны соответствующие рис. 2 векторные поля полной скорости в этих же сечениях. На рис. 4 изображено поле модифицированного давления в виде изобар в сечении А-А.

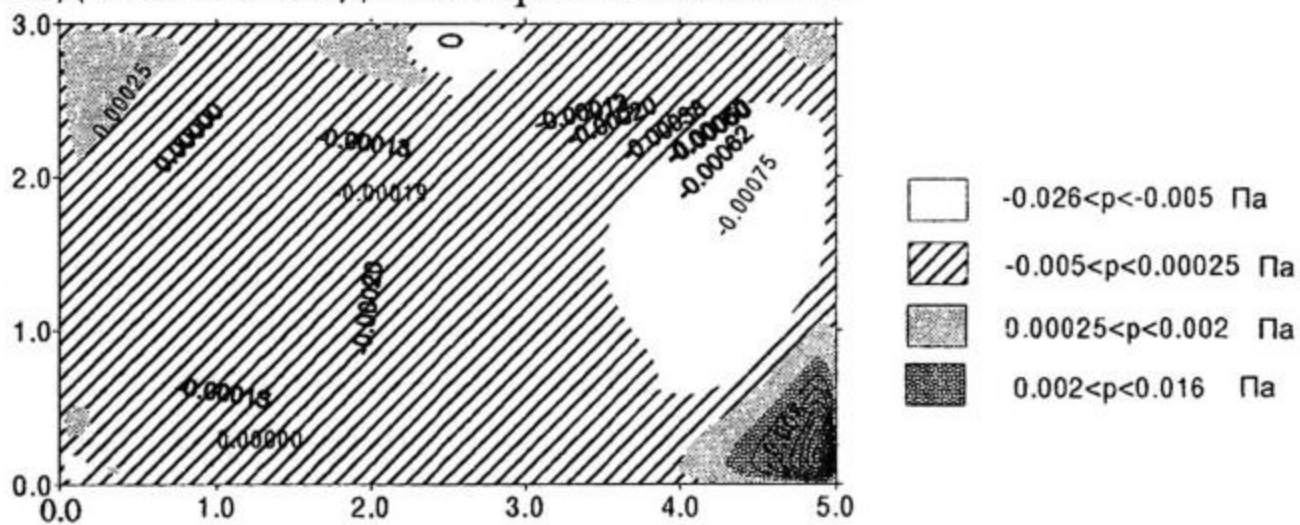


Рис.4. Поле давления в сечении А-А

Как видно из рис. 2–4, входной поток, двигаясь к правой грани помещения, расширяясь, постепенно теряет свою скорость. Достигая этой грани, поток тормозится, и его кинетическая энергия превращается в энергию давления между частицами воздуха. Возникший градиент давления вынуждает поток воздуха двигаться вдоль правой, передней и задней граней в верхнем направлении (см. рис. 3а, в, г). Аналогичным образом имеет место последующий поворот потока в горизонтальном направлении вдоль верхней грани у правого верхнего угла помещения. Так как область низких значений давления находится возле выходного отверстия, горизонтальный поток у



верхней грани, ускоряясь, частично устремляется к этому отверстию, а частично «проскакивает» в направлении левой грани. Отразившись от нее поток двигается сверху вниз и, взаимодействуя с входным потоком, снова вовлекается в движение. В результате такого движения образуются области вихревого движения воздуха, которые видны на рис.3а,г. Левую границу этих областей можно наблюдать даже на рис.3в. Здесь характерно понижение давления.

Таким образом, для данной схемы воздухообмена рассчитаны поля скоростей и давлений и выявлены зоны вихревого движения. Необходимо отметить, что численные расчеты проводились и при других вариантах расположения входного и выходного отверстий.

**Свободноконвективное течение газа.** Далее приводятся результаты математического моделирования трехмерного свободноконвективного ламинарного течения газа в замкнутом объеме. При этом течение описывается в рамках уравнений Навье-Стокса; теплофизические параметры газа считаются постоянными; справедливо приближение Буссинеска. Система безразмерных уравнений движения газа описывается обобщенным уравнением (1), дополненным законом сохранения энергии газа и без уравнений турбулентности ( $k=\epsilon=0$ ). В этом случае безразмерные величины  $\Phi$ ,  $\Gamma_\Phi$ ,  $S_\Phi$  будут иметь вид:

$\Phi$	$\Gamma_\Phi$	$S_\Phi$
1	0	0
$v_i$	1	$-\partial p/\partial x_i + \partial(\partial v_j/\partial x_i)/\partial x_j + Gr \cdot \Theta$
$\Theta$	$Pr^{-1}$	0

Здесь в добавление к старым обозначениям принято, что  $\Theta$  — температура,  $Pr$  — число Прандтля;  $Gr$  — число Грасгофа.

При обезразмеривании уравнений движения принимались следующие характерные значения: длины ( $L$ ), скорости ( $\mu/\rho L$ ), времени ( $\rho L^2/\mu$ ), давления ( $\mu^2/\rho L^2$ ), разности температур ( $T_h - T_c$ ), где  $T_h$  и  $T_c$  — температуры горячей и холодной граней. За характерное значение  $L$  взято расстояние между холодной и горячей гранями.

При решении использовались следующие граничные условия: для скорости на всех гранях — условие прилипания, а для температуры — ее значение на стенке или значение теплового потока.

Система дифференциальных уравнений характеризуется следующими безразмерными параметрами подобия:  $Gr = g_i \beta \rho^2 L^3 (T_h - T_c) / \mu^2$ ,  $Pr = c_p \mu / \lambda$ , где  $g_i$  — составляющая вектора ускорения свободного падения,  $\beta$  — коэффициент объемного расширения газа,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Из граничных условий определяются дополнительные параметры — размеры граней  $L_i$  ( $i=1,2,3$ ).

Рассмотрим задачу о ламинарной свободной конвекции газа в замкнутом объеме в стационарном случае. Имеется прямоугольный параллелепипед высотой  $L_3$  с квадратным основанием, показанный на рис. 5. Две вертикальные противоположные грани этого параллелепипеда поддерживаются при температурах  $\Theta=0$  (левая грань) и  $\Theta=1$  (правая грань). На остальных гранях задано условие адиабатичности:  $\partial\Theta/\partial n=0$ . Требуется рассчитать поле скоростей газа и найти зависимость безразмерного теплового потока на стенке от чисел  $Gr$  и  $L_3$ .

Решение осуществлялось при значениях параметров  $L_1=L_2=1$ ,  $Pr=0,71$ ,  $10^4 \leq Gr \leq 10^6$ ,  $0,25 \leq L_3 \leq 1,5$  методом контрольного объема [1]. Расчетная сетка содержала  $20 \times 20 \times 20$  контрольных объемов.

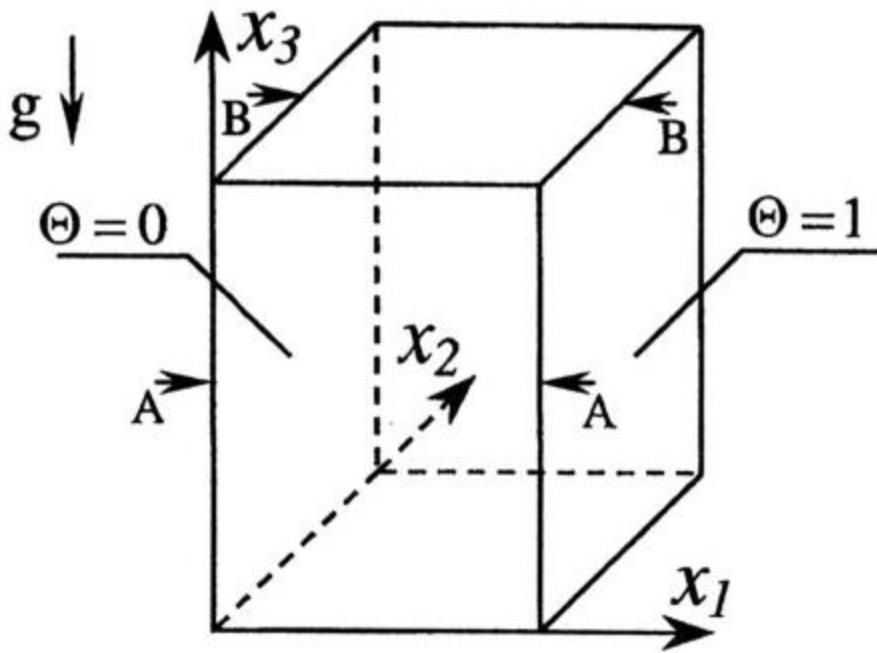


Рис.5. Схематическое изображение задачи

На рис.6 изображены характерные расчетные поля скоростей газа в сечениях  $x_3=0,4$  (А-А) и  $x_2=0,5$  (В-В). Показанные поля скоростей свидетельствуют об образовании сложных закрученных течений газа, обусловленных процессами конвекции и теплопроводности внутри замкнутого параллелепипеда.

Безразмерные тепловые потоки, т. е. числа Нуссельта  $Nu_+$  и  $Nu_-$ , проходящие через нагретую и холодную грани соответственно, определяются выражениями:

$$Nu_+ = Nu(L), \quad Nu_- = Nu(0), \quad Nu(x_1) = - \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3.$$

В случае установившегося конвективного движения  $Nu_+ = Nu_- = Nu$ .

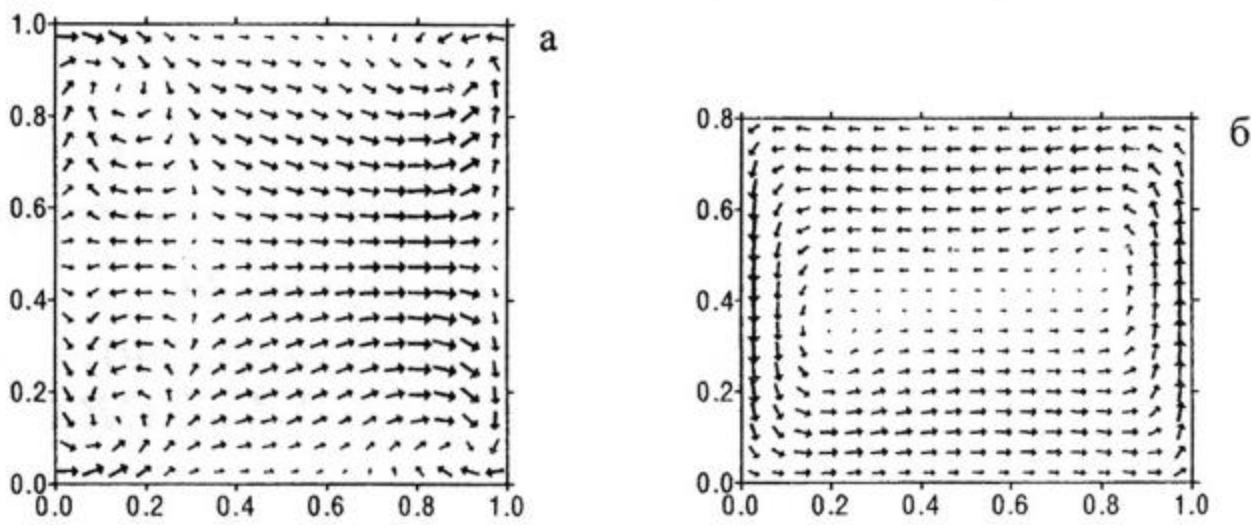


Рис.6. Поля скоростей в сечениях А-А (а) и В-В (б).

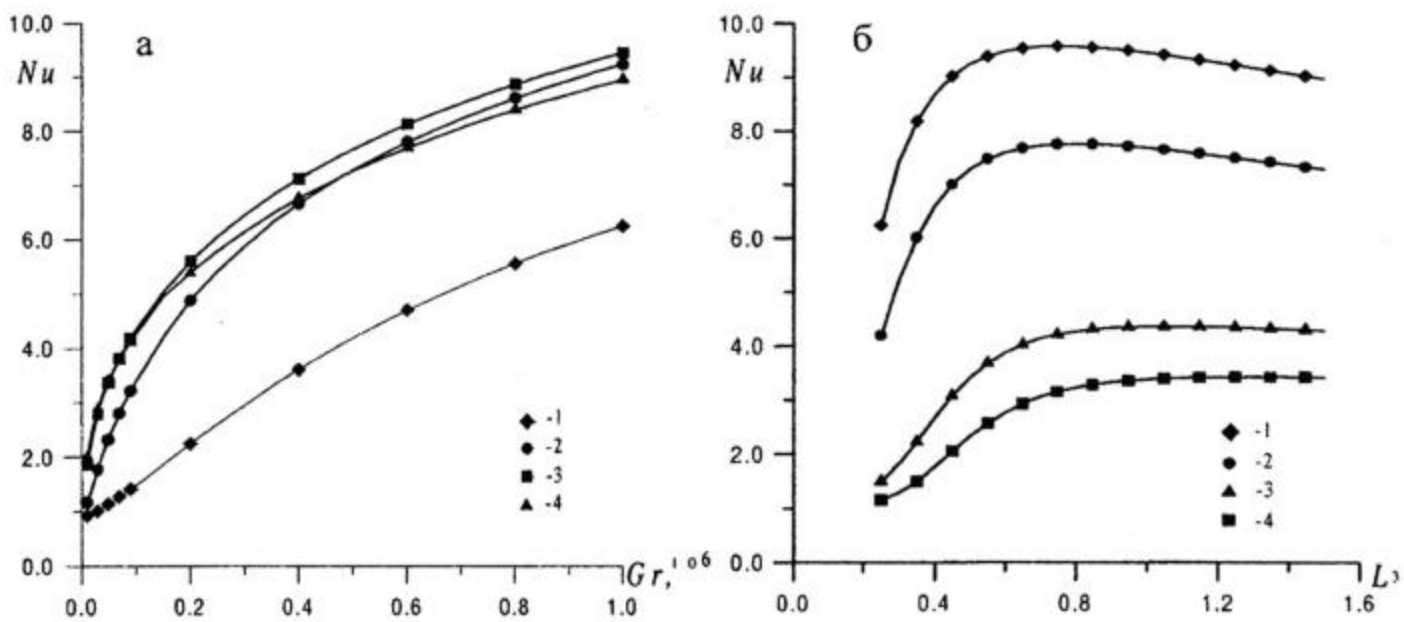


Рис. 7. Зависимость среднего числа Нуссельта от определяющих параметров задачи: а) от числа Грасгофа; б) от безразмерной высоты параллелепипеда.

На рис. 7а представлены расчетные зависимости  $Nu=Nu(Gr)$  при  $L_3=0,25; 0,5; 1,0; 1,5$  (кривая 1 соответствует  $L_3=0.25$ , 2 –  $L_3=0.5$ , 3 –  $L_3=1.0$ , 4 –  $L_3=1.5$ ). На рис.7б приводится зависимость  $Nu=Nu(L_3)$  при  $Gr=5 \cdot 10^4, 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6$  (кривая 1 соответствует  $Gr=10^6$ , 2 –  $Gr=5 \cdot 10^5$ , 3 –  $Gr=10^5$ , 4 –  $Gr=5 \cdot 10^4$ ).

Результаты, представленные на рис. 7, свидетельствуют, что при фиксированной высоте параллелепипеда интенсивность теплоотдачи монотонно возрастает с увели-



чением числа Грасгофа. При фиксированном числе Грасгофа изменение теплового потока на стенках параллелепипеда от высоты носит слабовыраженный немонотонный характер.

В заключение, можно констатировать, что создан эффективный комплекс вычислительных программ для расчета трехмерных задач конвективного теплообмена с вынужденной, естественной и смешанной конвекцией несжимаемой или термически сжимаемой жидкости или газа. Приведены расчеты, демонстрирующие возможности этого пакета программ для описания ряда гидро – термодинамических процессов в воздухе в ограниченном объеме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
2. Шашин В. М. Гидромеханика. М.: Высшая школа. 1990. 384 с.
3. Peric M., Shceuerer G. CAST-a finite volume method for predicting two-dimensional flow and heat transfer phenomena// GRS technische notiz SRR-89-01. 1989. 104 p.
4. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. Киев: Наукова думка. 1985. 296 с.

*Василий Александрович БАРИНОВ —  
доцент кафедры математического  
моделирования, кандидат  
физико-математических наук,  
Нина Николаевна БУТАКОВА —  
аспирантка кафедры  
математического моделирования*

УДК 532.59: 532.547

### **ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОЙ СМЕСИ**

*АННОТАЦИЯ. Поставлена краевая задача о поверхностных волнах на слое двухфазной смеси. Задача решена в линейном приближении, решение получено в виде затухающих волн установившегося вида. Найдена фазовая скорость, частота и декремент затухания волны.*

*The regional task about superficial waves on a layer of a twophase mix is put. The task is solved in linear approximation, the decision is received as fading waves of the established kind. The phase speed, frequency and decrement of attenuation of a wave is found.*

Исследования распространения поверхностных волн на слое двухфазной (дисперсной) жидкости представляют как практический, так и теоретический интерес. Эти исследования могут быть использованы для изучения влияния примесей на волновые параметры. Такое сильное влияние на распространение прибрежных волн Атлантического океана в районе Нормандии (Франция) описано в работе [1]. С другой стороны, изучение волновых движений дисперсной жидкой смеси позволяет рас-