чением числа Грасгофа. При фиксированном числе Грасгофа изменение теплового потока на стенках параллелепипеда от высоты носит слабовыраженный немонотонный характер.

В заключение, можно констатировать, что создан эффективный комплекс вычислительных программ для расчета трехмерных задач конвективного теплообмена с вынужденной, естественной и смешанной конвекцией несжимаемой или термически сжимаемой жидкости или газа. Приведены расчеты, демонстрирующие возможности этого пакета программ для описания ряда гидро – термодинамических процессов в воздухе в ограниченном объеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.

2. Шашин В. М. Гидромеханика. М.: Высшая щкола. 1990. 384 с.

3. Peric M., Shceuerer G. CAST-a finite volume method for predicting two-dimensional flow and heat transfer phenomena// GRS technische notiz SRR-89-01. 1989. 104 p.

4. Дыбан Е. П., Эпик Э. Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. Киев: Наукова думка. 1985. 296 с.

Василий Александрович БАРИНОВ — доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук,
Нина Николаевна БУТАКОВА — аспирантка кафедры математического моделирования

УДК 532.59: 532.547

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОЙ СМЕСИ

АННОТАЦИЯ. Поставлена краевая задача о поверхностных волнах на слое двухфазной смеси. Задача решена в линейном приближении, решение получено в виде затухающих волн установившегося вида. Найдена фазовая скорость, частота и декремент затухания волны.

The regional task about superficial waves on a layer of a twophase mix is put. The task is solved in linear approximation, the decision is received as fading waves of the established kind. The phase speed, frequency and decrement of attenuation of a wave is found.

Исследования распространения поверхностных волн на слое двухфазной (дисперсной) жидкости представляют как практический, так и теоретический интерес. Эти исследования могут быть использованы для изучения влияния примесей на волновые параметры. Такое сильное влияние на распространение прибрежных волн Атлантического океана в районе Нормандии (Франция) описано в работе [1]. С другой стороны, изучение волновых движений дисперсной жидкой смеси позволяет расширить теорию поверхностых волн, а также динамическую теорию двухфазных сред. В работе [2] указывается, что эксперементально установлено возникновение на поверхности раздела смесь – жидкость движущихся волновых рельефов. В этой работе в линейном приближении исследованы стоячие монохроматические волны на поверхности раздела слоя жидкости и слоя смеси этой же жидкости с твердыми частицами, численно определяются условия устойчивости этой поверхности.

Настоящая работа посвящена построению математической модели волнового движения двухфазной жидкой смеси при распространении по свободной поверхности слоя смеси волн и решению соответствующей краевой задачи.

1. Математическая модель. Рассмотрим слой дисперсной жидкой смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой ограничен свободной поверхностью. Предполагается, что несущая фаза – несжимаемая жидкость, а дисперсная – недеформируемые частицы одного размера. Теплообмен и массообмен между фазами отсутствуют. Движение такой двухфазной среды описывается двухскоростными уравнениями сохранения массы и импульсов [3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0,$$
$$\rho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\alpha_i \nabla P_i + (-1)^i R\alpha_1\alpha_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \rho_i \mathbf{g}, \tag{1.1}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \rho_i = \alpha_i \rho_i^o,\ \rho_i^o = \mathrm{const},\ i = 1,2.$$

Здесь индексы $i = 1,2$ относятся соответственно к величинам, характеризующим несущую и дисперсную фазу; α_i, $\mathbf{v}_i$, P_i, ρ_i, ρ_i^o — соответственно объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотность i-й фазы, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести. Коэффициент $R(a,\eta)$ характеризует межфазное взаимодействие. Например, если учитывать только силу вязкого трения Стокса, то $R = \kappa\eta/a^2$, где η — динамическая вязкость жидкости, a — характерный размер частицы, κ - эмпирический коэффициент межфазного трения (в случае сферических частиц радиуса a $\kappa = 9/2$). Если учитывается несколько сил межфазного взаимодействия, то R равна сумме соответствующих коэффициентов.

На свободной поверхности должны выполняться условия отсутствия потока массы смеси через поверхность и непрерывности потока импульса. Для волновых задач эти условия известны как кинематическое и динамическое соответственно [4]. Кинематическое условие заключается в равенстве:

$$\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} = V_n, \tag{1.2}$$

где $\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n}$ — нормальная проекция объемной скорости смеси, V_n — нормальная скорость свободной поверхности. Отметим, что кинематическое условие необходимо ставить именно на объемную скорость среды, как это сделано в [2]. Если это условие ставить, как предложено в монографии [3], на нормальные проекции скорости каждой фазы отдельно, то получим два кинематических условия для скоростей фаз, которые будут согласовываться только в случае моножидкости ($\rho_1^o = \rho_2^o$). Если кинематическое условие сформулировать для среднемассовой скорости смеси $(\rho_1\mathbf{v}_1 + \rho_2\mathbf{v}_2)/(\rho_1 + \rho_2)$, то из решения волновой задачи [5] получим, что смесь будет совершать незатухающие волновые движения с частотой гравитационной волны.

Динамическое условие записывается как равенство давления в смеси $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ и постоянного давления P_a в среде пренебрежимо малой плотности, с которой граничит дисперсная жидкость (в частности, P_a- атмосферное давление), т. е.

$$P = P_a,\ P_a = \mathrm{const}. \tag{1.3}$$

Полагая, что поток массы смеси через горизонтальную поверхность твердого основания отсутствует, на дне получаем условие непротекания для каждой фазы:

$$v_{in} = 0, (i = 1,2). \qquad (1.4)$$

Прежде, чем поставить краевую задачу о волновом движении смеси, необходимо в давлении каждой фазы выделить гидростатическую составляющую. Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z = 0$, поверхность дна с плоскостью $z = -l$ (l — толщина слоя смеси), ось z противоположна направлению вектора $\mathbf{g}$. Будем считать, что дисперсная фаза равномерно распределена по слою покоящейся смеси, т. е. $\alpha_2 = \alpha_o = \mathrm{const}$. Тогда из уравнений движения (1.1) при $\mathbf{v}_i = 0$ $(i = 1,2)$ и динамического условия (1.3) при $z = 0$ получаем гидростатические давления в каждой фазе и смеси:

$$P_{i0} = P_a - \rho_i^o gz, \ (i = 1,2); \ P_0 = (1-\alpha_o)P_{10} + \alpha_o P_{20} = P_a - \rho^o gz, \qquad (1.5)$$

где $\rho^o = (1-\alpha_o)\rho_1^o + \alpha_o\rho_2^o$ — плотность покоящейся смеси.

2. Краевая задача о волновом движении смеси. Рассмотрим плоское волновое движение жидкости. Пусть в положительном направлении оси x распространяется волна с фазовой скоростью c и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны). Причем длина волны много больше характерного размера частиц дисперсной фазы, т. е. $\lambda >> a$. Чтобы система уравнений (1.1) описывала волновое движение дисперсной жидкости, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления. Концентрации фаз можно представить в виде:

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_o - \alpha'(t,x,z), \ \alpha_2 = \alpha_o + \alpha'(t,x,z). \qquad (2.1)$$

Здесь α' — возмущение концентрации дисперсной фазы за счет волнового движения. Для описания волнового возмущения давления используем модель Рахматулина совместного деформирования фаз [6], т. е. возмущения давления в обеих фазах будем считать одинаковыми. Тогда давление можно определить по формулам:

$$P_i = P_{i0} + p', \ (i = 1,2); \ P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_0 + p' + (\rho_1^0 - \rho_2^0)g\alpha' z. \qquad (2.2)$$

Зададим возмущенную свободную поверхность как функцию $z = \xi(t,x)$, которая подлежит определению при решении задачи. Введем безразмерные переменные и величины:

$$t^* = kct; \ x^* = kx, \ z^* = kz, \ \varsigma = k\xi, \ h = kl;$$

$$u_i = v_i/c, \ p = p'/\rho^o c^2, \ r = R/\rho^o ck, \ \mu_i = \rho_i^o/\rho^o, \ \gamma = \alpha'/\alpha_o, \qquad (2.3)$$

где $ck = \omega$ — частота волны. В дальнейшем обозначение звездочкой безразмерных переменных будем опускать. Подставляя величины (2.3) и обезразмеренные выражения (1.5), (2.1), (2.2) в уравнения и граничные условия (1.1) – (1.4), получим следующую краевую задачу.

В области, занятой смесью, выполняются уравнения:

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \left(\frac{1}{\alpha_o} - 1 - \gamma\right)\left[\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right] - u_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - u_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1+\gamma)\left[\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right] + u_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + u_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0,$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial t} + u_{1x}\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + u_{1z}\frac{\partial u_{1x}}{\partial z}\right) + \frac{\partial P}{\partial x} - r\alpha_o(1+\gamma)(u_{2x} - u_{1x}) = 0,$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}+u_{1x}\frac{\partial u_{1z}}{\partial x}+u_{1z}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}-r\alpha_o(1+\gamma)(u_{2z}-u_{1z})=0,$$

$$\mu_2\left(\frac{\partial u_{2x}}{\partial t}+u_{2x}\frac{\partial u_{2x}}{\partial x}+u_{2z}\frac{\partial u_{2x}}{\partial z}\right)+\frac{\partial P}{\partial x}+r\alpha_o\left(\frac{1}{\alpha_o}-1-\gamma\right)(u_{2x}-u_{1x})=0,$$

$$\mu_2\left(\frac{\partial u_{2z}}{\partial t}+u_{2x}\frac{\partial u_{2z}}{\partial x}+u_{2z}\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}+r\alpha_o\left(\frac{1}{\alpha_o}-1-\gamma\right)(u_{2z}-u_{1z})=0.$$

На свободной поверхности, при $z=\zeta(t,x)$, заданы граничные условия:

$$\frac{\partial\varsigma}{\partial t}=\alpha_o\left(\frac{1}{\alpha_o}-1-\gamma\right)u_{1z}+\alpha_o(1+\gamma)u_{2z}-$$
$$-\alpha_o\left[\left(\frac{1}{\alpha_o}-1-\gamma\right)u_{1x}+(1+\gamma)u_{2x}\right]\frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{2.5}$$

$$p-\nu^2\zeta\left[1-\alpha_o\gamma(\mu_1-\mu_2)\right]=0,\ \nu^2=g/kc^2. \tag{2.6}$$

На дне, при $z=-h$:

$$u_{iz}=0,\ i=1,2. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.4) и граничные условия (2.5) – (2.7) составляют нелинейную краевую задачу для определения скоростей волнового движения фаз, возмущения давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

3. Линейная задача. Положим, что амплитуда поверхности волны мала по сравнению с ее длиной. Тогда граничные условия со свободной поверхности $z=\zeta(t,x)$ можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z=0$. Для этого все функции, входящие в уравнения (2.5), (2.6), разложим в ряд Маклорена в окрестности $z=0$, например:

$$u_{1z}(t,x,\zeta)=u_{1z}(t,x,0)+\left.\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right|_{z=0}\zeta+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial z^2}\right|_{z=0}\zeta^2+\ldots.$$

Кроме того, из обезразмеривания (2.3) следует, что скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной ζ, т. е. малы.

Учитывая малость входящих в систему (2.4) – (2.6) неизвестных величин, оставим в уравнениях (2.4) и в разложенных в окрестности $z=0$ граничных условиях (2.5), (2.6) только линейные по отношению к ним слагаемые. Таким образом, получаем линейную задачу:

$$-\alpha_o\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(1-\alpha_o)\left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x}+\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial u_{2x}}{\partial x}+\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}=0,$$

$$\mu_1\frac{\partial u_{1x}}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}-r\alpha_o(u_{2x}-u_{1x})=0, \tag{3.1}$$

$$\mu_1\frac{\partial u_{1z}}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial z}-r\alpha_o(u_{2z}-u_{1z})=0,$$

$$\mu_2\frac{\partial u_{2x}}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}+r(1-\alpha_o)(u_{2x}-u_{1x})=0,$$

$$\mu_2 \frac{\partial u_{2z}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + r(1-\alpha_o)(u_{2z} - u_{1z}) = 0 \cdot$$

При $z = 0$:

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = (1-\alpha_o)u_{1z} + \alpha_o u_{2z}, \tag{3.2}$$

$$p - \nu^2 \zeta = 0 \cdot \tag{3.3}$$

Условия при $z = -h$ останутся прежними, т. е. в виде (2.7).

Решение задачи (3.1) – (3.3), (2.7) должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз и сил межфазного взаимодействия обусловливает диссипативный процесс – затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ($\alpha_o = 0$) или при одинаковых истинных плотностях фаз ($\rho_1^o = \rho_2^o$) решение задачи должно переходить в известные волновые решения для моножидкостей [4]. Компоненты скоростей фаз u_{1z} и u_{2z} должны удовлетворять граничным условиям на дне (2.7). В случае распространения по свободной поверхности слоя прогрессивных волн решение системы уравнений (3.1), удовлетворяющее выше предъявленным требованиям, следует искать в виде:

$$u_{ix} = e^{-bt}\left(A_i \sin(x-t) + B_i \cos(x-t)\right)\frac{\mathrm{ch}(z+h)}{\mathrm{sh}h},$$

$$u_{iz} = e^{-bt}\left(C_i \sin(x-t) + D_i \cos(x-t)\right)\frac{\mathrm{sh}(z+h)}{\mathrm{sh}h},$$

$$p = e^{-bt}\left(K \sin(x-t) + L \cos(x-t)\right)\frac{\mathrm{ch}(z+h)}{\mathrm{sh}h},$$

$$\gamma = e^{-bt}\left(M \sin(x-t) + N \cos(x-t)\right)\frac{\mathrm{ch}(z+h)}{\mathrm{sh}h}. \tag{3.4}$$

Здесь $b = \beta/\omega$ – безразмерный коэффициент (декремент) затухания волны (β – размерный декремент), коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, K, L, M, N – постоянные, подлежащие определению. Подставляя выражения (3.4) в уравнения (3.1), получим алгебраическую систему двенадцати линейных однородных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

$$-(1-\alpha_o)B_1 + (1-\alpha_o)C_1 + b\alpha_o M - \alpha_o N = 0,$$

$$(1-\alpha_o)A_1 + (1-\alpha_o)D_1 + \alpha_o M + b\alpha_o N = 0,$$

$$-B_2 + C_2 - bM + N = 0,$$

$$A_2 + D_2 - M - bN = 0,$$

$$(\alpha_o r - b\mu_1)A_1 - \alpha_o r A_2 + \mu_1 B_1 - L = 0,$$

$$-\mu_1 A_1 + (\alpha_o r - b\mu_1)B_1 - \alpha_o r B_2 + K = 0,$$

$$(\alpha_o r - b\mu_1)C_1 - \alpha_o r C_2 + \mu_1 D_1 + K = 0,$$

$$-\mu_1 C_1 + (\alpha_o r - b\mu_1)D_1 - \alpha_o r D_2 + L = 0,$$

$$-(1-\alpha_o)rA_1 + ((1-\alpha_o)r - b\mu_2)A_2 + \mu_2 B_2 - L = 0,$$

$$-\mu_2 A_2 - (1-\alpha_o)rB_1 + ((1-\alpha_o)r - b\mu_2)B_2 + K = 0,$$

$$-(1-\alpha_o)rC_1 + ((1-\alpha_o)r - b\mu_2)C_2 + \mu_2 D_2 + K = 0,$$

$$-\mu_2 C_2 - (1-\alpha_o) r D_1 + \left((1-\alpha_o) r - b\mu_2\right) D_2 + L = 0\cdot$$

Эта система имеет ранг равный десяти, следовательно, две неизвестные постоянные будут свободными. Коэффициенты при K и L не входят в матрицу, образующую ранг системы, поэтому K и L примем свободными. Остальные неизвестные постоянные определяем как решение системы:

$$D_i = -A_i,\ B_i = C_i,\ M = 0,\ N = 0,$$

$$A_i = m_i K + n_i L,\ B_i = -n_i K + m_i L, \tag{3.5}$$

$$m_1 = \frac{1}{1+b^2}\left[1 + \mu_1\mu_2^2(1-\mu_1)\left(1+b^2\right)/d\right],$$

$$m_2 = \frac{1}{1+b^2}\left[1 + \mu_1^2\mu_2(1-\mu_2)\left(1+b^2\right)/d\right],$$

$$n_1 = \frac{1}{1+b^2}\left[-b + \mu_2(1-\mu_1)(r - b\mu_1\mu_2)\left(1+b^2\right)/d\right],$$

$$n_2 = \frac{1}{1+b^2}\left[-b + \mu_1(1-\mu_2)(r - b\mu_1\mu_2)\left(1+b^2\right)/d\right],$$

$$d = \mu_1^2\mu_2^2 + (r - b\mu_1\mu_2)^2\cdot$$

Из выражений (3.4), (3.5) следует, что возмущение концентрации дисперсной фазы в линейном приближении равно нулю. Оно является величиной более высокого порядка малости по сравнению с возмущениями скорости и давления.

Для того, чтобы определить форму свободной поверхности, необходимо подставить найденные выражения для u_{iz} в уравнение (3.2) и проинтегрировать его. В результате получаем:

$$\zeta = \frac{1}{1+b^2} e^{-bt}\left[(s_1 K + s_2 L)\sin(x-t) + (-s_2 K + s_1 L)\cos(x-t)\right],$$

$$s_1 = \frac{1-b^2}{1+b^2} + \left(br + \left(1+b^2\right)\mu_1\mu_2\right)(\sigma - \mu_1\mu_2)/d, \tag{3.6}$$

$$s_2 = -\frac{2b}{1+b^2} + (r - 2b\mu_1\mu_2)(\sigma - \mu_1\mu_2)/d\cdot$$

Здесь и ниже введено обозначение $\sigma = (1-\alpha_o)\mu_2 + \alpha_o\mu_1$. Свободные коэффициенты K и L, как и для обычных поверхностных волн [4], можно определить из дополнительных начальных данных.

Из полученного решения (3.4) – (3.6) нетрудно найти выражения для волновых возмущений и формы свободной поверхности для бездиссипационного движения смеси, т. е. при $r = 0$. В этом случае, как будет показано ниже, $b = 0$, а следовательно, $n_1 = n_2 = s_2 = 0$. Также отметим, что решение системы (3.1) в виде монохроматических волн (только в виде синусов или косинусов по переменной $x - t$), как это предложено в работе [2], находить нельзя, т. к. в этом случае система алгебраических уравнений для коэффициентов имеет только тривиальное решение.

4. Основные параметры волны. Найдем дисперсионное соотношение и уравнение для декремента волны. Для этого, подставляя выражения для возмущения давления и свободной поверхности в динамическое условие (3.3) и приравнивая коэффициенты при $\sin(x-t)$ и $\cos(x-t)$, получим:

$$\begin{cases} K\left(1+b^2\right)\mathrm{cth}h = \nu^2(s_1 K + s_2 L), \\ L\left(1+b^2\right)\mathrm{cth}h = \nu^2(-s_2 K + s_1 L). \end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения этой системы для K и L имеет вид :

$$\left(1+b^2-s_1\nu^2\mathrm{thh}\right)^2+\left(s_2\nu^2\mathrm{thh}\right)^2=0,$$

что эквивалентно системе:

$$\begin{cases} s_1=\dfrac{1+b^2}{\nu^2\mathrm{thh}}, \\ s_2=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Эта система уравнений служит для определения неизвестной фазовой скорости и декремента затухания волны. Кроме того, используя найденные коэффициенты (4.1), можно записать уточненное выражение для формы свободной поверхности:

$$\zeta=\frac{\mathrm{cthh}}{\nu^2}e^{-bt}\left[K\sin(x-t)+L\cos(x-t)\right].$$

Чтобы найти фазовую скорость и декремент затухания, необходимо величины, входящие в уравнения (4.1), записать в размерном виде. При этом уравнения системы принимают громоздкий вид. Чтобы этого избежать, введем вспомогательные величины, имеющие размерность скорости:

$$r_1=cr=R/\rho^{o}k,\; b_1=cb=\beta/k,\; \nu_1^2=c\nu^2=g/k.$$

После несложных преобразований система (4.1) для новых величин примет вид :

$$\begin{cases} (c+b_1)^2\left(r_1-2\mu_1\mu_2 b_1\right)=\nu_1^2\mathrm{thh}, \\ 2b_1\left(\mu_1^2\mu_2^2\left(c^2+b_1^2\right)+r_1\left(r_1-2\mu_1\mu_2 b_1\right)\right)=r_1\left(\sigma-\mu_1\mu_2\right)\mathrm{thh}. \end{cases}$$

Разрешая полученную систему относительно c и b_1, получаем уравнения для определения фазовой скорости и декремента затухания волны:

$$c^2=\frac{\sigma\nu_1^2}{\mu_1\mu_2}\mathrm{thh}+b_1\left(3b_1-\frac{2r_1}{\mu_1\mu_2}\right), \tag{4.2}$$

$$8\mu_1^2\mu_2^2b_1^3-8\mu_1\mu_2r_1b_1^2+2\left(r_1^2+\sigma\mu_1\mu_2\nu_1^2\mathrm{thh}\right)b_1-\left(\sigma-\mu_1\mu_2\right)r_1\nu_1^2\mathrm{thh}=0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2) можно записать в виде:

$$c^2=c_g^2+c_d^2+c_r^2, \tag{4.2a}$$

$$c_g^2=\nu_1^2\mathrm{thh}=\frac{g}{k}\mathrm{thkl},$$

$$c_d^2=\frac{\sigma-\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2}\nu_1^2\mathrm{thh}=\frac{\alpha_o\left(1-\alpha_o\right)\left(\rho_1^o-\rho_2^o\right)^2 g\mathrm{thkl}}{\rho_1^o\rho_2^o k},$$

$$c_r^2=b_1\left(3b_1-\frac{2r_1}{\mu_1\mu_2}\right)=\frac{\beta}{k^2}\left(3\beta-\frac{2R\rho^o}{\rho_1^o\rho_2^o}\right).$$

Величина c_g^2 является квадратом фазовой скорости гравитационной волны [4], $c_d^2\geq 0$ – добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы и c_r^2 – добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Функция $c_r^2(b_1)$ принимает отрицательные значения при $0<b_1<2r_1/3\mu_1\mu_2$ и положительные при $b_1>2r_1/3\mu_1\mu_2$. Величина декремента затухания $b_1=2r_1/3\mu_1\mu_2$ является критической, т. к. при этом значении b_1 силы межфазного взаимодействия никак не влияют на распространение волны. Свое минимальное значение c_r^2 принимает при

$b_1 = r_1/3\mu_1\mu_2$: $\min c_r^2 = -r_1^2/3\mu_1^2\mu_2^2$. В дальнейшем введем обозначение $\left|\min c_r^2\right| = r_1^2/3\mu_1^2\mu_2^2 = c_m^2$.

Условием существования волн установившегося типа является неотрицательность квадрата фазовой скорости, т. е. $c^2 \geq 0$. Это условие эквивалентно неотрицательности квадратного многочлена для b_1 в правой части равенства (4.2), а, следовательно, неположительности дискриминанта этой многочлена, что выполняется, если $\sigma v_1^2 \mathrm{thh} \geq r_1^2/3\mu_1\mu_2$. Это условие можно записать как ограничение на длины волн, при выполнении которого волна будет установившейся:

$$\frac{1}{k\,\mathrm{thkl}} \leq \frac{3g}{R^2}\left(\rho_1^o\rho_2^o + \alpha_o\left(1-\alpha_o\right)\left(\rho_1^o - \rho_2^o\right)^2\right). \quad (4.4)$$

Условие (4.4) можно выразить через новые безразмерные величины:

$$W = \frac{c_g^2 + c_c^2}{c_m^2} \geq 1. \quad (4.4a)$$

При $W = 1$ фазовая скорость волны принимает минимальное значение:

$$\min c^2 = c_g^2 + c_d^2 - c_m^2 = \frac{\sigma v_1^2}{\mu_1\mu_2}\mathrm{thh} - \frac{r_1^2}{3\mu_1^2\mu_2^2}.$$

Прежде, чем найти решение кубического уравнения (4.3), отметим, что все коэффициенты этого уравнения удовлетворяют критерию устойчивости Гурвица [7]. Уравнение (4.3) будем решать с помощью формулы Кардано [8]:

$$b_1 = \left[-\chi/2 + \left(\chi^2/4 + \psi^3/27\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\chi/2 - \left(\chi^2/4 + \psi^3/27\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \frac{r_1}{3\mu_1\mu_2}, \quad (4.5)$$

$$\psi = \frac{3\sigma\mu_1\mu_2 v_1^2 \mathrm{thh} - r_1^2}{12\mu_1^2\mu_2^2} = \frac{1}{4}c_m^2\,(W-1),$$

$$\chi = \frac{r_1}{216\mu_1^3\mu_2^3}\left[2r_1^2 - 9\mu_1\mu_2\left(\sigma - 3\mu_1\mu_2\right)v_1^2\mathrm{thh}\right] = \frac{1}{108}\left(3c_m^2\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{3c_g^2}{c_m^2} - W\right)\right].$$

Как известно [8], количество корней зависит от знака величины $Q = \chi^2/4 + \psi^3/27$. В нашем случае в силу (4.4а) $Q > 0$ при $W > 1$, а, следовательно, формула (4.5) дает один вещественный и два комплексно сопряженных корня. Поэтому решением уравнения в случае $W > 1$ будет только один корень – вещественный корень (4.5). Величина Q может равняться нулю только при одновременном равенстве нулю ψ и χ, что выполняется при $W = 1, c_g^2 = (1/9)c_m^2$ или $c_d^2 = (8/9)c_m^2$. Равенство $Q = 0$ соответствует минимальной фазовой скорости и критическому значению декремента затухания $b_1 = r_1/3\mu_1\mu_2$, причем $c^2 = \min c^2 = 0$.

5. Заключение. Из анализа дисперсионных соотношений (4.2). (4.3) можно сделать вывод, что наличие дисперсной фазы в жидкости оказывает двоякое влияние. Оно влечет увеличение квадрата фазовой скорости (частоты) волны на величину c_d^2. Но при существенных силах взаимодействия фаз влечет за собой затухание волны. Сравнивая полученные результаты с классическими [4], добавку к фазовой скорости c_r^2 можно сравнить с капиллярной фазовой скоростью капиллярно-гравитационной волны, которая также до определенного значения длины волны уменьшает общую фазовую скорость, а затем ее влияние становится незначительным по сравнению с фазовой скоростью гравитационной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Louared M., Saidi A. Pointwise control a particle analysis for parabolic equation// Proc. 7-th Int.Symp.Fluid Dyn., Beijing, Sept. 15- 19. 1997. P. 228- 234.
2. Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П. Поведение двухслойной системы жидкость – взвесь в вибрационном поле// Изв. РАН. МЖГ. 1999, №6. С. 55- 62.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука. 1987. 464 с.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.
5. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости// Математическое и информационное моделирование. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та. 2000. С. 57- 63.
6. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред// ПММ. 1956. Т. 20, №2. С. 184-195.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука. 1987. 688 с.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971. 432 с.

Владимир Николаевич КУТРУНОВ — заведующий кафедрой математического моделирования факультета математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, доктор физико- математических наук, профессор, Владимир Николаевич ПЬЯНКОВ — генеральный директор аналитического центра сибирской инновационной корпорации, Михаил Владимирович ДМИТРИЕВСКИЙ — аспирант кафедры математического моделирования

УДК 519.6:517.5

КАСКАДНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

АННОТАЦИЯ. Предложен метод обработки линий уровня, состоящий в последовательном изменении исходного ступенчатого сигнала с помощью вейвлет- преобразований. Этим из кривой удаляется высокочастотная составляющая. Изменённая ступенчатая кривая сглаживается с помощью сплайнов до любого уровня гладкости без решения алгебраических систем уравнений.

A method of isolines processing realized by the succesive recalculation of the original step-type signal with wavelet transformation is proposed. This recalculation deletes the high-frequency part from the curve. The recalculated step-type curve is smoothed to any level of smoothness by splines without solving algebraic systems of equations.

Один из основных способов хранения, обработки и упаковки информации в науках по исследованию недр связан с построением карт геофизических параметров. Обычной является следующая постановка задачи: на некоторой площади в некотором количестве точек известен тот или иной геофизический параметр. Как правило, сетка точек является нерегулярной, могут существовать подобласти, в которых данный геофизический параметр неизвестен. На исследуемой площади требуется построить линии уровня параметра с некоторым заданным шагом.