*Юрий Иванович КАРПЕНКО —*
*доцент кафедры строительной механики*
*Тюменской государственной*
*архитектурно-строительной академии,*
*кандидат технических наук ,*
*Елена Борисовна ОРЛОВА —*
*старший преподаватель кафедры*
*математического моделирования*

**УДК 539.4013.3**

# ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ПРОСТОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С МАЛОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

*АННОТАЦИЯ. В работе решается задача построения теории простого краевого эффекта ортотропных цилиндрических оболочек. В основе построения лежит гипотеза С.П.Тимошенко, учитывающая поведение материалов с малой сдвиговой жесткостью.*

*The authors endeavour to solve the problem how to construct the theory of simple regional effect of orhtotropic cylindrical shells. S.P.Timoshenko's hypothesis, that takes into account the behaviour of materials with small shift rigidity lays serves as a basis for this construction.*

Напряженно-деформированное состояние оболочки в линейной теории часто представляют суммой основного напряженного состояния и краевых эффектов. Первое из них распространяется на всю оболочку, а вторые имеют местный характер и локализуются вблизи определенных кривых, которые называются линиями искажения напряженно-деформированного состояния или просто линиями искажения (к ним принадлежат края оболочки, линии излома срединной поверхности или, вообще, линии скачкообразного изменения исходных данных). В качестве приближенного подхода к решению задач теории оболочек может быть использован метод расчленения напряженно-деформированного состояния. Основное напряженное состояние и краевые эффекты по своим свойствам существенно отличаются друг от друга. Поэтому существенно различаются и те дифференциальные уравнения, которыми приближенно описываются эти напряженные состояния (разрешающим уравнением в теории простого краевого эффекта является дифференциальное уравнение шестого порядка, а в случае основного напряженного состояния — четвертого). На этом базируется основная идея метода расчленения: строить на первых этапах расчета основное напряженное состояние и краевые эффекты раздельно (пользуясь для этого различными вариантами приближенных дифференциальных уравнений) и вводить их в совместное рассмотрение только для выполнения граничных условий, так как только эта операция и обусловливает их взаимодействие.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, введем следующие обозначения: $\alpha$ — безразмерная длина прямолинейной образующей, а $\beta$ — центральный угол поперечной дуги, отсчитываемый от некоторой начальной прямолинейной образующей; h – толщина оболочки, R – ее радиус; u, v, w – перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей, а $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — углы поворота нормали к срединной поверхности в плоскостях $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — параметры изменения кривизны; $E_1$, $E_2$ — модули Юнга соответственно по направлениям $\alpha, \beta$; $G_{23}, G_{13}, G_{12}$ — модули сдвига; $\nu_1$, $\nu_2$ — коэффициенты Пуассона (индекс показывает направление поперечного сжатия); $N_1, N_2, N_{12}$ — усилия в плоскости, касательной к оболочке; $Q_1, Q_2$ — перерезывающие усилия; $M_1, M_2$ —изгибающие моменты; $M_{12}, M_{21}$ — крутящие моменты.

Следуя А. Л. Гольденвейзеру [2], приближенную теорию простого краевого эффекта можно построить на основе следующих предположений:

*Предположение 1.* Простой краевой эффект — быстро затухающее напряженное состояние. Производные по $\alpha$ от искомых величин (усилий, моментов, перемещений и т.д.) значительно превосходят сами величины.

*Предположение 2.* Наибольшим из продольных усилий является усилие $N_2$, возникающее в сечениях, ортогональных к линии искажения; величины $N_1, N_{12}, N_{21}$ существенно меньше и подчиняются соотношениям:

$$\left|\frac{\partial N_1}{\partial \alpha}\right| \approx \left|\frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha}\right| \approx \left|\frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha}\right| \approx |N_2|. \qquad (1)$$

*Предположение 3.* Моменты играют существенную роль; главным является $M_1$ - изгибающий момент в сечениях, параллельных линии искажения. Изгибающий момент $M_2$ связан с $M_1$ равенством: $M_2 = \nu_2 M_1$, а крутящие моменты $M_{12}, M_{21}$ играют второстепенную роль, подчиняясь соотношениям:

$$\left|\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha}\right| \approx \left|\frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha}\right| \approx |M_1|. \qquad (2)$$

*Предположение 4.* Из перерезывающих усилий главным является усилие $Q_1$, действующее в сечениях, и справедливо соотношение:

$$\left|\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}\right| \approx |Q_1|. \qquad (3)$$

*Предположение 5.* Деформация срединной поверхности имеет в основном изгибный характер, и ее главными компонентами являются величины $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$; они связаны между собой соотношениями:

$$\left|\frac{\partial \chi_{12}}{\partial \alpha}\right| \approx \left|\frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha}\right| \approx |\chi_1|,$$

показывающими, что наибольшую роль играет $\chi_1$.

*Предположение 6.* Растяжения (сжатия) и сдвиги срединной поверхности относительно малы. Из трех величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$, характеризующих эту деформацию, наибольшие значения имеет $\varepsilon_2$, а остальные связаны с ней соотношениями:

$$\varepsilon_1 = -\nu_2 \varepsilon_2, \qquad (4)$$

$$|\varepsilon_1| \approx |\varepsilon_2| \approx \left|\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \alpha}\right|. \qquad (5)$$

*Предположение 7.* Точки срединной поверхности смещаются в основном по нормали к срединной поверхности, и справедливы соотношения:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right| \approx \left|\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right| \approx |w|. \qquad (6)$$

*Предположение 8.* Считается, что простой краевой эффект не связан с поверхностной нагрузкой, а вызывается некоторыми воздействиями, распределенными вдоль линии искажения напряженного состояния. Поэтому его надо строить, исходя из однородных уравнений теории оболочек.

При расчете краевого эффекта примем следующие упрощенные определяющие системы уравнений, которые являются главными в силу предположений 1–8.

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial N_{21}}{\partial \beta}=0,\quad \frac{\partial N_2}{\partial \beta}+\frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha}=0$$

$$N_2-\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial M_1}{R\partial \alpha}-Q_1=0. \tag{7}$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha},\quad \varepsilon_2=\frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \alpha},\qquad \chi_1=\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}, \tag{8}$$

$$\chi_2=\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta},\quad \chi_{12}=\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha}.$$

Уравнения состояния:

$$\varepsilon_1+\nu_2\varepsilon_2=0,\ N_2=\frac{E_2h}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_2+\nu_1\varepsilon_1),$$

$$N_{12}=G_{12}h\varepsilon_{12}=N_{21},\ M_1=\frac{E_1h^3}{12R(1-\nu_1\nu_2)}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}, \tag{9}$$

$$M_2=\frac{E_2h^3}{12R(1-\nu_1\nu_2)}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}=\nu_2M_1$$

Определим усилия и перемещения краевого эффекта через потенциальную функцию $\Phi(\alpha,\beta)$ следующими соотношениями:

$$u=4\frac{\nu_2}{a^2}R\frac{\partial^3\Phi}{\partial \alpha^3}-\frac{\nu_2}{k}\left[\frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}+G_{12}\right]\frac{b}{a}R\frac{\partial^5\Phi}{\partial \alpha^5};$$

$$v=-4\frac{\nu_2}{a^2}R\frac{\partial^3\Phi}{\partial \alpha^2\partial \beta}-\frac{\nu_2}{k}\left[\frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}+G_{12}\right]\frac{b}{a}R\frac{\partial^5\Phi}{\partial \alpha^4\partial \beta};$$

$$w=-4\frac{R}{a^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial \alpha^4}+\frac{R}{k}\left[\frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}+G_{12}\right]\frac{b}{a}\frac{\partial^6\Phi}{\partial \alpha^6};$$

$$N_1=\frac{E_1h\nu_2}{\nu_1}\left[-\frac{4}{a^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial \alpha^2\partial \beta^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}+G_{12}\right)\frac{b}{a}\frac{\partial^6\Phi}{\partial \alpha^4\partial \beta^2}\right]; \tag{10}$$

$$N_2=\frac{E_1h\nu_2}{\nu_1}\left[-\frac{4}{a^2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial \alpha^4}+\frac{1}{k}\left(\frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}+G_{12}\right)\frac{b}{a}\frac{\partial^6\Phi}{\partial \alpha^6}\right];$$

$$M_1=\frac{E_1hR}{4}\left[-\left(4+b^2\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1G_{12}}{k}\right)\frac{\partial^6\Phi}{\partial \alpha^6}+a\frac{G_{12}b}{k}\frac{\partial^8\Phi}{\partial \alpha^8}\right];$$

$$Q_1 = \frac{E_1 h}{4}\left[-\left(4 + b^2 \frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1 G_{12}}{k}\right)\frac{\partial^7 \Phi}{\partial \alpha^7} + a\frac{G_{12} b}{k}\frac{\partial^9 \Phi}{\partial \alpha^9}\right],$$

где $a^2 = \frac{h^2}{R^2}$, $b = \frac{1}{G_{13}}$.

При подстановке выражений для компонент перемещения, усилий и моментов (10) в уравнения равновесия (7) три из них, а именно, первое, второе и четвертое, обратятся в тождество. Третье уравнение после некоторых преобразований будет представлять собой разрешающее уравнение теории краевого эффекта ортотропных цилиндрических оболочек:

$$\frac{bG_{12}}{k}\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} - (4 + b^2 \frac{\nu_2 E_1 G_{12}}{\nu_1 k})\frac{1}{a}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} +$$

$$+\frac{4\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1 + G_{12}(1-\nu_1\nu_2)}{ka^2} b\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - 16\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{(1-\nu_1\nu_2)}{a^3} = 0. \quad (11)$$

К характеристическому уравнению, соответствующему (11), можно прийти, проводя асимптотический анализ характеристического уравнения в теории ортотропных цилиндрических оболочек:

$$\frac{bG_{12}}{k}\kappa^6 - (4 + b^2 \frac{\nu_2 E_1 G_{12}}{\nu_1 k})\frac{\kappa^4}{a} + \frac{4\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1 + G_{12}(1-\nu_1\nu_2)}{ka^2} b\kappa^2 -$$

$$-16\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{(1-\nu_1\nu_2)}{a^3} = 0 \quad (12)$$

Видно, что в теории ортотропных цилиндрических оболочек краевые эффекты описываются уравнением шестого порядка. Как частный случай из этого уравнения можно получить уравнение краевого эффекта теории изотропных цилиндрических оболочек, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява. Для этого необходимо в выражении (12) положить b=0:

$$\kappa^4 + 4\frac{\left(1-\nu^2\right)}{a^2} = 0 \quad (13)$$

Для получения аналитических выражений для корней уравнения (12) была использована математическая система Maple V. Так как вид этих корней является достаточно громоздким, приводить в данной работе их не будем.

Таким образом, представленные расчеты позволили получить более простую, по сравнению с асимптотическим анализом, процедуру описания напряженно-деформированного состояния линейной теории ортотропных цилиндрических оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматизд. 1961. 384 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512с.
3. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. М., ЛГУ. Часть 1. 1962. 274 с.