Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ —
доцент кафедры математического анализа
и теории функций,
кандидат физико-математических наук,
Наталья Александровна СПИРИДОНОВА —
ст. преподаватель кафедры математики
и теоретической механики
Тюменского филиала
военно-инженерного университета

УДК 517.91

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ НА КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрен вопрос отыскания геодезических линий на конической поверхности произвольного в плане поперечного сечения. В качестве частных случаев рассмотрены конические поверхности эллиптического и кругового сечения.

The authors consider an issue of geodesy lines search on a conic surface of an arbitrary cross section. As particular cases the conic shells of elliptic and circular section are considered.

Конические оболочки входят в конструкцию реактивных двигателей, резервуаров и т. д. Исследование устойчивости конических оболочек оказывается более трудным, чем в случае цилиндрических оболочек, так как структура исходных уравнений является более сложной.

Введем систему криволинейных координат на конусе (r, φ):
r — расстояние вдоль образующей от вершины конуса,
φ — угол между текущим и фиксированным осевыми сечениями конуса,
γ — угол между прямолинейной образующей и осью конуса,
γ_0 — угол в фиксированном осевом сечении конуса.
В параметрическом виде уравнения конуса могут быть записаны как
$X = r\cos\gamma$,
$Y = r\sin\gamma\ \cos\varphi$,
$Z = r\sin\gamma\ \sin\varphi$.
Первая квадратичная форма примет вид:

$$ds^2=dr^2+r^2\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы равны:

$$E=1,\ F=0,\ G= r^2\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2.$$

В соответствии с этим выбранная система координат является полугеодезической [1].

Коэффициенты второй квадратичной формы примут вид:

$$L=0,\ M=0,\ N= G\frac{\psi_1(\varphi)}{r\,\mathrm{tg}\gamma_0}$$

Кривизны главных нормальных сечений равны:

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = 0,$$

$$K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = \frac{\psi_1(\varphi)}{r\,\mathrm{tg}\gamma_0}.$$

В вышеприведенных формулах $f(\varphi)$ и $\psi_1(\varphi)$ — функции, характеризующие геометрию поперечного сечения конуса.

Так как F=M=0 на всей поверхности, то координатная сеть (r = const, φ =const) совпадает с сетью линий кривизны.

В инженерных конструкциях часто подкрепляющие элементы располагаются по геодезическим линиям поверхности (в частности, ребра жесткости).

Рассмотрим прямой эллиптический конус. Расположение декартовых осей показано на рис.1.

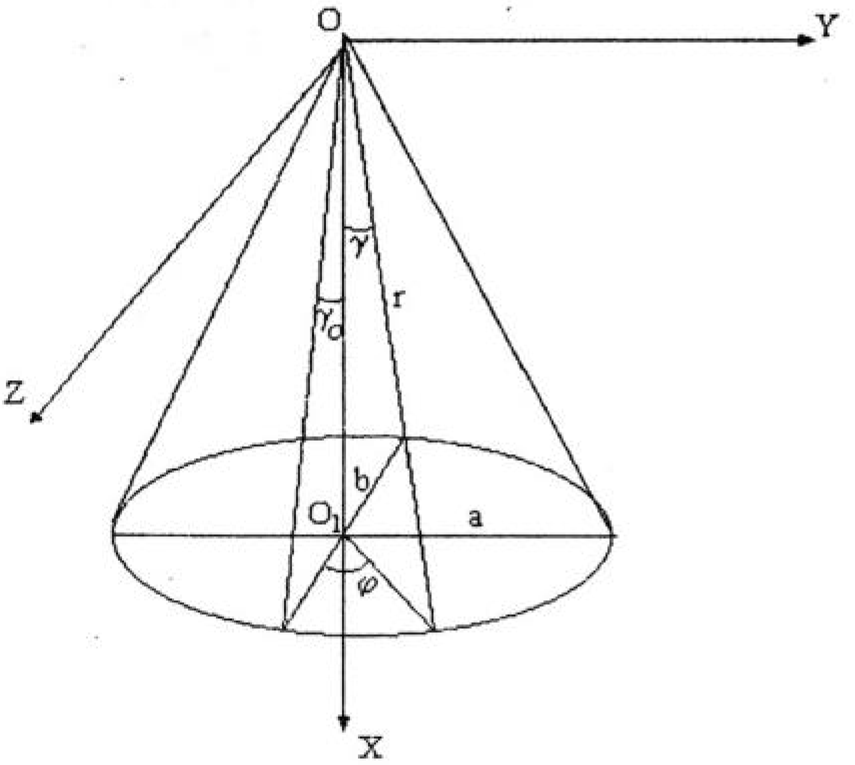

Рис.1.

В параметрическом виде уравнения эллиптического конуса могут быть записаны в виде:

$X = r\cos\gamma_0(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{1/2}(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma_0)^{-1/2},$

$Y = r\sin\gamma_0\cos\varphi\,(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma_0)^{-1/2},$

$Z = r\sin\gamma_0\sin\varphi\,(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma_0)^{-1/2}$, где

$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ — эксцентриситет эллипса.

Обозначив $A = (1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{1/2}$,

$B = (1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma_0)^{-1/2}$, получим:

$X = r\,AB\cos\gamma_0,$

$Y = r\,B\sin\gamma_0\cos\varphi,$

$Z = r\,B\sin\gamma_0\sin\varphi.$

В вышеприведенных формулах функции $f(\varphi)$, $\psi_1(\varphi)$ для эллиптического конуса примут вид:

$$f(\varphi) = \frac{\left[1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\left(1+\cos^2\gamma_0-\varepsilon^2\cos^2\gamma_0\right)\right]^{1/2}}{\left(1-\varepsilon^2\cos^2\gamma_0\cos^2\varphi\right)\left(1-\varepsilon^2\cos^2\right)^{1/2}},$$

$$\psi_1(\varphi)=\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\cos^2\gamma_0\cos^2\varphi\right)^{3/2}}{\left[1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\left(1=\cos^2\gamma_0-\varepsilon^2\cos^2\gamma_0\right)\right]^{3/2}}=$$

$$=\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)B^{-3}}{\left[1-\varepsilon^2\cos^2\varphi\left(B^{-2}+\cos^2\gamma_0\right)\right]^{3/2}}.$$

Рассмотрим расположение геодезических линий на поверхности эллиптического конуса. Уравнение этих линий возьмем в виде $\varphi=f_1(r)$. В случае полугеодезической системы координат выражение для геодезической кривизны имеет вид:

$$K_g=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,\frac{\left|f_1''+G_{11}^2+\left(2G_{12}^2-G_{11}^1\right)f_1'+\left(G_{22}^2-2G_{12}^1\right)f_1'^2-G_{22}^1f_1'^3\right|}{\left(g_{11}+2g_{12}f_1'+g_{22}f_1'^2\right)^{3/2}},$$

где $g_{11}=E=1$, $g_{12}=F=0$, $g_{22}=G$ и G_{ij} — символы Кристоффеля второго рода, которые для случая полугеодезической системы координат будут соответственно равны:

$$G_{11}^1=0,\ G_{11}^2=0,\ G_{12}^1=0,\ G_{12}^2=G_r/2G,\ G_{22}^1=-G/2,\ G_{22}^2=G\varphi/2G.$$

$G=r^2\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2$,

$G\varphi=r^2\sin^2\gamma_0 2f(\varphi)f'(\varphi)$,

$G_r=2r\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2$,

$G_r/G=2/r$,

$G\varphi/2G=f(\varphi)/f(\varphi)$.

Так как в точках геодезических линий геодезическая кривизна равна нулю, то после подстановки g_{ij} и G^k_{ij} будем иметь дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$f_1''+f_1'2/r+f_1'^2f'(\varphi)/f(\varphi)+r\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2f_1'^3=0$$

Введением новой переменной $y(r)=f_1'$ данное уравнение сводится к уравнению 1-го порядка вида:

$$y'+y2/r+y^2f'(\varphi)/f(\varphi)+y^3r\sin^2\gamma_0[f(\varphi)]^2=0\ -$$

это уравнение Абеля 1-го рода [2],[3],общее решение которого в аналитической форме записать не представляется возможным.

Рассмотрим прямой круговой конус. В этом случае $f(\varphi)=\psi_1(\varphi)=1$. Уравнение геодезических линий будем искать как решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2r}{ds^2}-r\sin^2\gamma_0f^2(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left[2rf(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\right]-rf(\varphi)\frac{d^2\varphi}{ds^2}=0.$$

Перепишем систему в виде:

$$r''-r\sin^2\gamma_0\varphi'^2=0$$

$$r\varphi''+2r'\varphi'=0.$$

Из первого уравнения выразим φ':

$$\varphi'=\sqrt{\frac{r''}{r\sin^2\gamma_0}},$$

и продифференцировав, подставим во второе уравнение. После преобразований получим:

$$\frac{r'''r+3r'r''}{2\sin\gamma_0\sqrt{r''r}}=0$$

Выражение, стоящее в числителе дроби, можно представить в виде:

$$\frac{d}{ds}\left(r''r+r'^2\right)=0.$$

Следовательно, $r''r + r'^2 = \text{const} = A$. Преобразовав данную формулу и решив дифференциальное уравнение, получаем:

$$r=\sqrt{As^2+2Bs+C}, \tag{1}$$

где A и B – постоянные интегрирования, а

$$C=\frac{B^2}{A}+r_0^2-\frac{\left(As_0^2+B\right)^2}{A}.$$

Таким образом, φ найдется как решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{\sin\gamma_0\left(As^2+2Bs+C\right)}.$$

Откуда

$$\varphi=\frac{1}{\sin\gamma_0}\operatorname{arctg}\frac{As+B}{\sqrt{AC-B^2}}+D,$$

где $D=-\frac{1}{\sin\gamma_0}\operatorname{arctg}\frac{As_0-B}{\sqrt{AC-B^2}}$.

Полученные соотношения представляют интерес для расчета на прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конических оболочек или панелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии 1972. Наука. 420 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз. 1953. 468 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз. 1965. 703 с.

Владимир Николаевич КУТРУНОВ — заведующий кафедрой математического моделирования факультета математики и компьютерных наук ТГУ, доктор физико-математических наук, профессор, Михаил Владимирович ДМИТРИЕВСКИЙ — аспирант кафедры математического моделирования

УДК 519.6

АНАЛОГ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА КРАЙГИНГА БЕЗ ГЕОСТАТИСТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ

АННОТАЦИЯ. В статье описан интерполяционный метод восстановления геологических полей. Если в качестве базиса брать систему функций, полученную из вариограммы ее сдвигами в точки экспериментальных данных, то результат интерполяции тождественно совпадет с резуль татом, полученным по методу крайгинга.