МАТЕМАТИКА

А. Н. ДЕГТЕВ,

Е. В. КЛАДОВА

УДК 517.11

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

АННОТАЦИЯ. В точности установлено, к какому классу будет принадлежать $X \oplus Y$ и $X \cap Y$, если X и Y взяты из классов рекурсивных, креативных, простых, псевдопростых или псевдокреативных множеств.

In this note we clear up exact what will be a set $X \oplus Y$ and $X \cap Y$, when X and Y are from the classes of recursive, creative, simple, pseudosimple or pseudocreative sets.

В работе [1] Э. Пост выделил из всех рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ) E классы: R — рекурсивных, C — креативных и S — простых множеств. Все остальные РПМ были названы Дж. Деккером [2] мезоичными. Дальнейшая классификация мезоичных множеств была предпринята В. Успенским [3]. Он определил классы PS — псевдопростых и PC — псевдокреативных множеств. Таким образом, семейство всех РПМ было разбито на пять классов: **R, C, S, PS** и **PC**. Напомним их определения. Пусть $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, если $A \subseteq N$, то $\bar{A} = N \setminus A$, W_n — РПМ с постовским номером n. Тогда по определению

$X \in \mathbf{R} \Leftrightarrow X$ и $\bar{X}$ оба РПМ;

$X \in \mathbf{C} \Leftrightarrow$ найдется общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$(\forall n)(W_n \subseteq \bar{X} \Rightarrow f(n) \in \bar{X} \setminus W_n)$$

$X \in \mathbf{S} \Leftrightarrow$ бесконечно и $(\forall n)(Wn$ бесконечное $\Rightarrow$
$W_n \cap X \neq \varnothing)$;

$$X \in \mathbf{PS} \Leftrightarrow X \notin \mathbf{R} \text{ и}$$

$(\exists n)(Wn$ бесконечное $\& \ W_n \cap X = \varnothing \ \& \ W_n \cup X \in \mathbf{S})$;

$$X \in \mathbf{PC} \Leftrightarrow X \notin \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{PS};$$

(везде предполагается, что X — РПМ). Напомним также, что дополнения простых множеств называются иммунными (они бесконечны, но не содержат бесконечных рекурсивно-перечислимых подмножеств).

По определению, если $X, Y \subseteq N$, то

$$X \oplus Y = \{2x : x \in X\} \cup \{2y + 1 : y \in Y\}.$$

В разделах 1 и 2 будет полностью выяснено, к какому классу будет принадлежать $X \cap U$ и $X \oplus Y$ для X и Y из пяти указанных выше классов.

1. Начнем со случая, когда $X \in \mathbf{C}$. Если Y — РПМ, то $X \oplus Y$ тоже РПМ, причем $X \leq_m X \oplus Y$. Но хорошо известно [4], что

$$Z \text{ — РПМ } \& \ X \in \mathbf{C} \ \& \ X \leq_m Z \Rightarrow Z \in \mathbf{C}.$$

Следовательно, $X \oplus Y \in \mathbf{C}$. С другой стороны [5]

$$X \oplus Y \in \mathbf{C} \Rightarrow X \in \mathbf{C} \vee Y \in \mathbf{C}.$$

Итак, полностью рассмотрен случай, каким может быть $X \oplus Y$, если $X \in \mathbf{C}$.

Лемма 1.1. *Если $X \in \mathbf{R}$, то*

(а) $Y \in \mathbf{R} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{R}$;

(б) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PS} \cup \mathbf{S}$;

(в) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PS}$;

(г) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PC}$.

Доказательство. Пункты (а) и (в) очевидны.

(б) Если $\overline{X}$ конечное множество, то ясно, что $X \oplus Y \in \mathbf{S}$. Если же $\overline{X}$ — бесконечно, то $\overline{X} \oplus \varnothing$ бесконечно рекурсивное множество, непересекающееся с $X \oplus Y$, причем $(\overline{X} \oplus \varnothing) \cup (X \oplus Y) = N \oplus Y \in \mathbf{S}$.

(г) Так как $X \oplus Y =_m Y$, то $X \oplus Y \notin \mathbf{P} \cup \mathbf{C}$.

Но $X \oplus Y \notin S$, т. к. $\{2y+1 : y \notin Y\}$ не будет иммунным множеством. Если же $X \oplus Y \in \mathbf{PS}$, то нашлось бы РПМ A такое, что $A \cap (X \oplus Y) = \varnothing$ и $A \cup (X \oplus Y) \in \mathbf{S}$.

Но тогда $B \cap Y = \varnothing$, $B \cup Y \in \mathbf{S}$, если положить $B = \{z : 2z + 1 \in A\}$. Пришли к противоречию с тем, что $Y \notin \mathbf{PS}$.

Лемма 1.2. *Если $X \in \mathbf{S}$, то*

(а) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{S}$;

(б) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PS}$;

(в) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PC}$.

Доказательство. Пункт (а) очевиден.

(б) По предположению для Y найдется бесконечное РПМ Z такое, что $Z \cap Y = \varnothing$ и $Z \cup Y \in \mathbf{S}$. Но тогда

$$(\varnothing \oplus Z) \cap (X \cap Y) = \varnothing \text{ и}$$

$$(\varnothing \oplus Z) \cup (X \oplus Y) = X \oplus (Y \cup Z) \in \mathbf{S}.$$

По пункту (а) получаем, что $X \oplus Y \in \mathbf{PS}$;

(в) Надо скопировать доказательство пункта (г) из леммы 1.1.

Лемма 1.3. *Если $X \in \mathbf{PS}$, то*

(а) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PS}$;

(б) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PC}$.

Доказательство. Пункт (а) очевиден.

(б) Аналогично доказательству пункта (г) из леммы 1.1. Так же доказывается и утверждение X, $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \oplus Y \in \mathbf{PC}$. Итак, все возможные 15 случаев, каким должно быть $X \oplus Y$, рассмотрены.

2. Начнем со следующего факта

Лемма 2.1. *Если* $X \in \mathbf{R}$, *то*

(а) $Y \in \mathbf{R} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R}$;

(б) $Y \in \mathbf{C} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;

(в) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{PS}$;

(г) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{PS}$;

(д) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$.

Доказательство. Пункт (а) очевиден.

(б) Пусть $Z \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$, $\mathbf{PS}$, $\mathbf{PC}$). Тогда $Y \oplus Z \in \mathbf{C}$.

Но $(Y \oplus Z) \cap (\varnothing \oplus N) \in \mathbf{R}$ (соответственно, $\mathbf{C}$, $\mathbf{PS}$, $\mathbf{PC}$).

(в) Так как $\varnothing, N \in \mathbf{R}$ и $Y \cap \varnothing \in \mathbf{R}$, $Y \cap N \in \mathbf{S}$, то возможно, что $X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{S}$. По лемме 1.2 (а) $Y \oplus Y \in \mathbf{S}$ и $(Y \oplus Y) \cap (\varnothing \oplus N) \in \mathbf{PS}$, но $\varnothing \oplus N \in \mathbf{R}$. Наконец, пусть $X \cap Y \notin \mathbf{R} \cup \mathbf{S}$. Тогда $Y \setminus X$ бесконечное РПМ, непересекающееся с $X \cap Y$. Но $(X \cap Y)$ И $(X \setminus Y) = X \in \mathbf{S}$, т. е. $X \cap Y$ опять оказывается псевдопростым.

(г) Если Z — простое множество, то $Z \oplus \varnothing \in \mathbf{PS}$ и $(Z \oplus \varnothing) \cap N \in \mathbf{PS}$, а $(Z \oplus \varnothing) \cap \varnothing \in \mathbf{R}$. Пусть теперь $X \cap Y$ нерекурсивное. Так как $Y \in \mathbf{PS}$, то найдется бесконечное РПМ. A такое, что $Y \cap A = \varnothing$ и $Y \cup A \in \mathbf{S}$.

Положим $Z = (Y \setminus X) \cup A$. Но $Y \setminus X$ — РПМ и поэтому Z бесконечное РПМ, пересекающееся с $X \cap Y$.

Имеем $(X \cap Y) \cup Z = X \cup A \in \mathbf{S}$. Значит $X \cap Y \in \mathbf{PS}$.

(д) Имеем $Y \cap \varnothing \in \mathbf{R}$ и $Y \cap N \in \mathbf{PC}$. По лемме 1.3 (б) $Y \oplus Z \in \mathbf{PC}$ для $Z \in \mathbf{PS}$. Но $(Y \oplus Z) \cap (\varnothing \oplus N) \in \mathbf{PS}$. Ясно , что $X \cap Y \notin S$ из [5] следует, что $X \cap Y \notin \mathbf{C}$.

Лемма 2.2. *Если* $X \in \mathbf{C}$, *то*

(а) $Y \in \mathbf{C} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;

(б) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{C}$;

(в) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;

(г) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$;

Доказательство. (а) Пусть $Z \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$, $\mathbf{PS}$, $\mathbf{PC}$).

Тогда $X \oplus Z \oplus \varnothing \in \mathbf{C}$ и $\varnothing \oplus N \oplus Y \in \mathbf{C}$, но

$(X \oplus Z \oplus \varnothing) \cap (\varnothing \oplus N \oplus Y) = \varnothing \oplus Z \oplus \varnothing \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$, $\mathbf{PS}$, $\mathbf{PC}$).

(б) Пусть f — ОРФ из определения креативного множества, $W_n \subseteq \overline{X \cap Y}$ и h — ОРФ такая, что $W_{h(y)} = W_y \cap Y$. Если $b = h(n)$, то как и в теореме из [6, стр.27] будем строить вычислимую последовательность попарно различных чисел f (b), fq(b), fqq(b),... которые содержаться в $\overline{X \cap Y}$ (здесь ОРФ q такова, что $W_{q(y)} = W_y \cup \{f(y)\}$ для всех $y \in N$). Перечисляя Y и учитывая, что $\bar{Y}$ иммунно, в этой последовательности будет обнаружено число $y = fq^m(b)$, принадлежащее Y. Ясно, что $y \in (\overline{X \cap Y}) \setminus W_n$. Поэтому $X \cap Y$ окажется креативным множеством, т. к. для него нашлась ОРФ $t(n) = y$ такая, что

$(\forall n)\ (W_n \subseteq \overline{X \cap Y} \Rightarrow t(n) \in (\overline{X \cap Y}) \setminus W_n)$.

Пункты (в) и (г) доказываются аналогично пункту (а).

Лемма 2.3. *Если* $X \in S$, *то*

(а) $Y \in \mathbf{S} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{S}$;

(б) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{PS}$;

(в) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{PC}$.

Доказательство. (а) Это известный факт [1].

(б) Пусть A — бесконечное рекурсивное подмножество X. Тогда $X \setminus A \in \mathbf{PS}$ и $(X \setminus A) \cap X = X \setminus A \in \mathbf{PS}$. Далее, для Y найдется бесконечное РПМ Z такое, что $Y \cap Z = \varnothing$ и $Y \cup Z \in \mathbf{S}$. Покажем, что $X \cap Y \in PS$. Для этого проверим, что $B = \overline{Y \cup (X \cap Z)}$ иммунно. Если РПМ D содержится в B, то $D \cap X$ конечно, т. к. $D \cap X \subseteq \overline{Y \cup Z}$. Значит $D \setminus (R З X)$ — РПМ, содержащееся в X, т. е. также конечно. Поэтому B иммунно и $X \cap Y \in \mathbf{PS}$.

(в) Ясно, что $X \cap Y \notin \mathbf{S}$. Если бы $X \cap Y \in R$, то т. к. $Y \setminus (X \cap Y) \subseteq X$, то $Y \setminus (X \cup Y)$ — конечно. Значит $Y \in \mathbf{R}$, что противоречит предположению. Из [5] следует, что одно если пересечение двух РПМ креативно, то одно из них креативное множество. Значит $X \cap Y \notin \mathbf{C}$. Предположим $X \cap Y \in \mathbf{PS}$. Тогда найдется бесконечное РПМ Z такое, что $(X \cap Y) \cap Z = \varnothing$ и $(X \cap Y) \cup Z O \mathbf{S}$. Пусть $A = X \cap Z$. Имеем, $A ЗY = Ж$ и если РПМ B содержится $\overline{A \cup Y}$, то $B \cap X$ — конечно потому, что $B \cap X H \overline{(X \cap Y) \cup Z}$. Но тогда $B \setminus (B \cap X)$ — РПМ, содержащееся в X и поэтому тоже конечно. С другой стороны $\overline{A \cup Y}$ бесконечно, т.к. иначе $Y = A \cup (\overline{A \cup Y})$ — РПМ, откуда $Y \in \mathbf{R}$. Итак $\overline{A \cup Y}$ — иммунное множество, т. е. $Y \in \mathbf{PS}$. Это противоречит предположению.

Лемма 2.4. *Если $X \in PS$, то*

(а) $Y \in \mathbf{PS} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cap \mathbf{PS}$;

(б) $Y \in \mathbf{PC} \Rightarrow X \cap Y \in \mathbf{R} \cup \mathbf{PS} \cup \mathbf{PC}$.

Доказательство. Прежде всего по лемме 2.3(в) $X \cap Y \notin \mathbf{S} \cup \mathbf{C}$. С другой стороны $X \oplus \varnothing, \varnothing \oplus Y \in PS$ и $(X \oplus \varnothing) \cap (\varnothing \oplus Y) = \varnothing \in \mathbf{R}$. Предположим, что $X \cap Y \notin \mathbf{R}$. По предположению найдутся бесконечные РПМ X_0 и Y_0 такие, что $X \cap X_0 = \varnothing$ и $X \cup X_0 \in \mathbf{S}$, $Y \cap Y_0 = \varnothing$ и $Y \cup Y_0 \in \mathbf{S}$. Пусть $Z = (Y \cap X_0) \cup Y_0$. Тогда Z — бесконечное РПМ и $Z \cap (X \cap Y) = \varnothing$. Если РПМ A содержится в $\overline{(X \cap Y) \cup Z}$, то $B = A \cap (X \cup X_0)$ конечно, т. к. B — РПМ и $B H \overline{Y \cup Y_0}$. Но и $A \setminus B$, будучи РПМ, также конечно, т. к. оно содержится в $\overline{X \cup X_0}$. Значит $(X \cap Y) \cup Z$ иммунно и $X \cap Y \in \mathbf{PS}$.

(б) Как и выше, $X \cap Y \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{S}$. В то же время $X \oplus \varnothing$, $X \oplus N \in \mathbf{PS}$, $N \oplus Y$, $\varnothing \oplus Y \in \mathbf{PC}$ и

$$X \oplus \varnothing) \cap (\varnothing \oplus Y) = \varnothing \in \mathbf{R},$$
$$(X \oplus N) \cap (\varnothing \oplus Y) = \varnothing \oplus Y \in \mathbf{PC},$$
$$(X \oplus \varnothing) \cap (N \oplus Y) = X \oplus \varnothing \in \mathbf{PS}.$$

Лемма 2.5. *Если $X, Y \in PC$, то $X \cap Y \in \mathbf{R}$ И $PS \cup PC$.*

Доказательство. Как и выше $X \cap Y \notin \mathbf{C} \cup \mathbf{R}$. С другой стороны $X \oplus Z$, $Z \oplus Y \in \mathbf{PC}$ по лемме 1.1 (г), как только $Z \in \mathbf{R}$. Имеем также $(X \oplus \varnothing) \cap (\varnothing \oplus Y) \in R$ и $(X \oplus \varnothing) \cap (N \oplus Y) = X \oplus \varnothing \in \mathbf{PC}$. Наконец, если $Z \in \mathbf{PS}$, то по лемме 1.3 (б) $(X \oplus \varnothing) \oplus Z \in \mathbf{PC}$ и $((X \oplus \varnothing) \oplus Z) \cap ((\varnothing \oplus X) \oplus N) = (\varnothing \oplus \varnothing) \oplus Z \in \mathbf{PS}$.

Итак, все возможные 15 случаев, каким должно быть $X \cap Y$, рассмотрены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post E. L. Recursively enumerable sets of positive inteqers and their decision problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. N 5. P. 284–316.

2. Decker J.C. Two notes on recursively enumerable sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 495–501.

3. Успенский В. А. Несколько замечаний о перечислимых множествах // Z. Math. Loqik und Grundl. Math. V. 3. P. 157 – 170.

4. Myhill J. Creative sets // Z. Math. Loqik und Grundl. Math. 1995. V. 1. P. 97 – 108.

5. Lachlan A. H. A note on universal sets // J.Symb. Loqic. 1966. V.31. N 4. P. 573 – 574.

6. Дёгтев А. Н. Перечислимые множества и сводимости // Тюмень: Изд-во ТГУ, 1988. 94 с.

Т. Г. ЛАТФУЛЛИН

УДК 517. 51

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КВАЗИ-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. Работа представляет собой модификацию результатов статьи О. Мартио и Ю. Вяйсяля [1] для квазигиперболических отображений. Устанавливаются условия, позволяющие находить решение дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в виде композиции отображения и решения другого уравнения.

The work represents updading results of the article O. Martio and J. Vgislglg [1] for quasihyperbolical mappings. Conditions, allowing to find the proof of the elliptic differential equation of the second order as composition of mapping and the proof of other equation, are established.

Структура нашей статьи и идеи, лежащие в основе доказательств, повторяют, в основном, структуру и идеи статьи [1]. Отсутствующие обоснования некоторых выводов можно найти в [1]. Наши результаты получены пересчетом результатов из [1] для случая квазигиперболических отображений.

Задача о представлении решений эллиптических уравнений в виде композиции с негомеоморфными отображениями была впервые рассмотрена Ю. Г. Решетняком в [2], позже к ней обращались авторы работы [3].

В дальнейшем D и G — области в R^n, $n \geq 2$. Пусть $f\colon D \to R^n$ — отображение, для $x \in D$ положим

$$\lambda(f,x)=\liminf_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\quad,\qquad \Lambda(f,x)=\limsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$