

Л. Г. АГЕНОСОВ,
О. П. ЕРМОЛОВА,
И. В. СЛЕЗКО

УДК 517.91

**О ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ
ОБОЛОЧЕК
ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ
НАГРУЖЕНИИ**

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрен вопрос определения границ первой зоны динамической неустойчивости тонкой конической оболочки под действием комбинированной нагрузки с различной частотой пульсации.

The question of determination of boundaries of the first zone dynamic instability of a thin conic hull under the action of combined loading with different frequency of pulsation was studied in this article.

Рассматривается тонкая усеченная коническая оболочка постоянной толщины, нагруженная равномерно распределенными по торцам осевыми сжимающими усилиями $T = T_0 + T_\tau \text{Cos}\theta_1 \tau$ и $p = p_0 + p_\tau \text{Cos}\theta_2 \tau$.

Исходная система уравнений в линейной постановке задачи имеет вид:

$$L_1(W, f) = D \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{\text{ctg}\gamma}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{r_0}{r} T \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} +$$

$$+ p r \text{ctg}\gamma \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_1^2} \right) + \frac{\gamma_1 h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$L_2(W, f) = \nabla^2 \nabla^2 f - \frac{Eh}{r} \text{ctg}\gamma \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0,$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2}.$$

С помощью подстановки $r = r_1 e^z$ перейдем к новой переменной z , а функцию прогиба W и функцию усилий f возьмем в виде:

$$W = r_1 \text{ctg} \gamma e^z W_1(z) \text{Cos} n_1 \varphi_1 \cdot q(\tau), \quad f = e^z F(z) \text{Cos} n_1 \varphi_1 \cdot q(\tau).$$

Здесь и далее введены обозначения:

$$z = \ln \frac{r}{r_1}, \quad t = \ln \frac{r_1}{r_0}, \quad n_1 = \frac{n}{\text{Sin} \gamma}, \quad \varphi_1 = \varphi \text{Sin} \gamma,$$

где r_1, r_0 — расстояния вдоль образующей конуса от вершины до большего и меньшего оснований соответственно, n — число волн в окружном направлении при деформации оболочки, γ — половина угла при вершине конуса, τ — время.

После замены переменных проинтегрируем исходную систему уравнений по площади срединной поверхности оболочки (σ), следуя процедуре метода Бубнова-Галеркина [1]:

$$\iint_{(\sigma)} L_1(W, f) W d\sigma = \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi \text{Sin} \gamma} L_1(W_1, F) e^{3z} W_1 \text{Cos} n_1 \varphi_1 dz d\varphi_1 = 0,$$

$$\iint_{(\sigma)} L_2(W, f) f d\sigma = \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi \text{Sin} \gamma} L_2(W_1, F) e^{3z} F \text{Cos} n_1 \varphi_1 dz d\varphi_1 = 0.$$

Рассмотрим усеченную коническую оболочку, свободно опертую на обоих торцах. В этом случае при $r = r_0 (z = -t)$ и $r = r_1 (z = 0)$ должны выполняться следующие граничные условия: $\varepsilon_2 = 0$, $N_1 = 0$, $G_1 = 0$, $W = 0$,

где ε_1 — деформация в окружном направлении, N_1 — усилие вдоль образующей конуса, G_1 — изгибающий момент. Данным граничным условиям удовлетворяют функции прогиба и усилий вида:

$$W_1 = A \text{Sin} m_1 z, \quad F = B \text{Sin} m_1 z, \quad m_1 = \frac{m\pi}{t},$$

m — число полуволн вдоль образующей.

После выполнения процедуры интегрирования приходим к характеристическому уравнению:

$$\alpha_1 \frac{d^2 q}{d\tau^2} + [\psi - \beta(T_0 + T_t \text{Cos} \theta_1 \tau) - \delta(p_0 + p_t \text{Cos} \theta_2 \tau)] q = 0,$$

при этом используются обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1 h r_1^4 m_1^2 (1 - e^{-4t})}{8g(m_1^2 + 4)},$$

$$\psi = \frac{Dt}{2} (m_1^2 + n_1^2)^2 + \frac{2Ehr_1^2 \text{ctg}^2 \gamma \cdot m_1^4 (2m_1^2 + 1)^2 (1 - e^{-1})^2}{t(4m_1^2 + 1)^2 (m_1^2 + n_1^2)^2},$$

$$\beta = r_0 r_1 \frac{m_1^2 (2m_1^2 + 1) (1 - e^{-1})}{(4m_1^2 + 1)},$$

$$\delta = r_1^3 \operatorname{tg} \gamma \frac{m_1^2 (2m_1^2 + 4n_1^2 + 9)(1 - e^{-3t})}{6(4m_1^2 + 9)}$$

Выражения для критических значений параметров нагрузки в ряде частных случаев приведены в работе [2].

Рассмотрим вариант совместного действия нагрузок с разной частотой пульсации и положим $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$, где α — малый параметр. С учетом этого, а также того, что основное значение имеет первая зона динамической неустойчивости, можно принять, следуя [3]:

$$\operatorname{Cos} \theta_2 \tau = \operatorname{Cos} \theta_1 \tau - \alpha \operatorname{Sin} \theta_1 \tau, \quad q = A_1 \operatorname{Cos} \frac{\theta_1}{2} \tau + B_1 \operatorname{Sin} \frac{\theta_1}{2} \tau.$$

В этом случае характеристическое уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{4} \alpha_1 A_1 \theta_1^2 + \gamma_2 A_1 \right) \operatorname{Cos} \frac{\theta_1}{2} \tau - \\ & - \left(\frac{1}{4} \alpha_1 B_1 \theta_1^2 - \gamma_2 B_1 + \alpha \delta p_\tau A_1 \right) \operatorname{Sin} \frac{\theta_1}{2} \tau - \\ & - \varepsilon A_1 \operatorname{Cos} \theta_1 \tau \operatorname{Cos} \frac{\theta_1}{2} \tau - \alpha \delta p_\tau B_1 \operatorname{Sin} \theta_1 \tau \operatorname{Sin} \frac{\theta_1}{2} \tau - \\ & - (\varepsilon B_1 + \alpha \delta p_\tau A_1) \operatorname{Cos} \theta_1 \tau \operatorname{Sin} \frac{\theta_1}{2} \tau = 0, \end{aligned}$$

где дополнительно введены обозначения

$$\gamma_2 = \psi - \beta T_0 - \delta p_0, \quad \varepsilon = \beta T_\tau + \delta p_\tau.$$

Проведем, следуя [4], операцию усреднения по времени:

$$\operatorname{Lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{*\} \operatorname{Sin} \frac{\theta_1}{2} \tau d\tau = 0, \quad \operatorname{Lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{*\} \operatorname{Cos} \frac{\theta_1}{2} \tau d\tau = 0,$$

где через $\{*\}$ обозначена левая часть вышеприведенного уравнения.

Условие наличия ненулевого решения получающейся при этом системы двух линейных относительно A_1, B_1 уравнений приводит нас к окончательному результату, который после некоторых преобразований может быть представим в форме

$$\left(\frac{\theta_1}{2\Omega} \right)^4 - 2 \left(\frac{\theta_1}{2\Omega} \right)^2 + 1 - \mu^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha \delta p_\tau}{\beta T_\tau + \delta p_\tau} \right)^2 \right] = 0,$$

$$\text{где } \mu = \frac{\beta T_\tau + \delta p_\tau}{2(\psi - \beta T_0 - \delta p_0)}, \quad \Omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\beta T_0 + \delta p_0}{\psi} \right), \quad \omega^2 = \frac{\psi}{\alpha^2}.$$

Корни полученного уравнения определяют границы первой зоны неустойчивости

$$\frac{\theta_1}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \mu \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\left(1 + \frac{\beta T_\tau}{\delta p_\tau} \right)^2} \right]}.$$

При изменении параметров в пределах $0.5 \leq \frac{T_c}{p_c} \leq 1.5$ и $0 \leq \alpha \leq 0.1\omega$ были определены границы зоны неустойчивости. Как следует из представленного графика, где по оси абсцисс отложены значения коэффициента возбуждения μ , а по оси ординат — значения отношения частот $\frac{\theta_1}{2\Omega}$, ширина зоны неустойчивости довольно значительно увеличивается при возрастании параметра α и почти не зависит от отношения $\frac{T_c}{p_c}$.

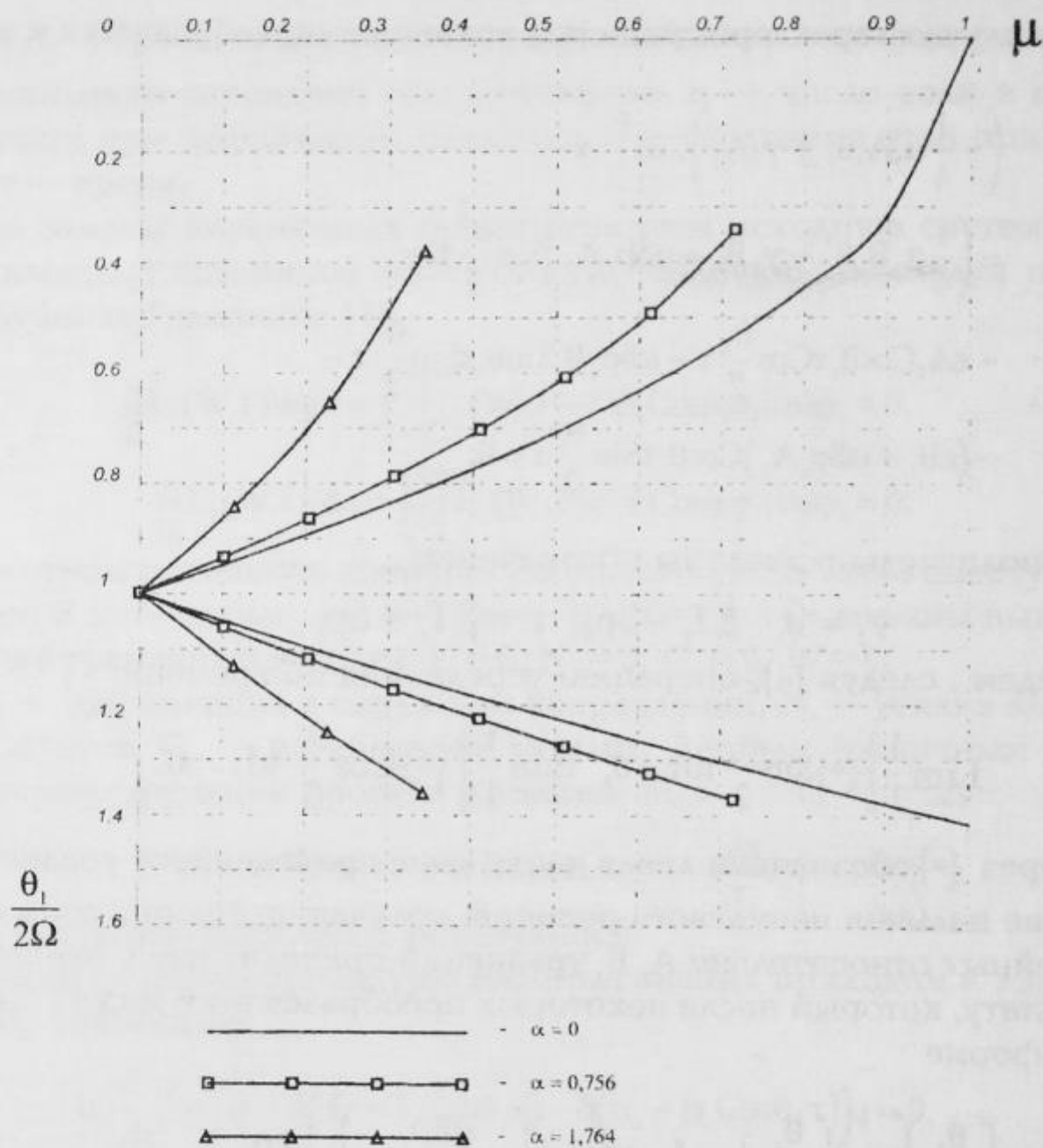


Рис. Границы первой зоны динамической устойчивости при $T/p=1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Агеносов Л. Г. Динамическая устойчивость тонких конических оболочек // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 1980. С. 3–7.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.