3. Успенский В. А. Несколько замечаний о перечислимых множествах // Z. Math. Loqik und Grundl. Math. V. 3. P. 157 – 170.

4. Myhill J. Creative sets // Z. Math. Loqik und Grundl. Math. 1995. V. 1. P. 97 – 108.

5. Lachlan A. H. A note on universal sets // J.Symb. Loqic. 1966. V.31. N 4. P. 573 – 574.

6. Дёгтев А. Н. Перечислимые множества и сводимости // Тюмень: Изд-во ТГУ, 1988. 94 с.

Т. Г. ЛАТФУЛЛИН

УДК 517. 51

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КВАЗИ-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ. Работа представляет собой модификацию результатов статьи О. Мартио и Ю. Вяйсяля [1] для квазигиперболических отображений. Устанавливаются условия, позволяющие находить решение дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в виде композиции отображения и решения другого уравнения.

The work represents updading results of the article O. Martio and J. Vgislglg [1] for quasihyperbolical mappings. Conditions, allowing to find the proof of the elliptic differential equation of the second order as composition of mapping and the proof of other equation, are established.

Структура нашей статьи и идеи, лежащие в основе доказательств, повторяют, в основном, структуру и идеи статьи [1]. Отсутствующие обоснования некоторых выводов можно найти в [1]. Наши результаты получены пересчетом результатов из [1] для случая квазигиперболических отображений.

Задача о представлении решений эллиптических уравнений в виде композиции с негомеоморфными отображениями была впервые рассмотрена Ю. Г. Решетняком в [2], позже к ней обращались авторы работы [3].

В дальнейшем D и G — области в R^n, $n \geq 2$. Пусть $f\colon D \to R^n$ — отображение, для $x \in D$ положим

$$\lambda(f,x)=\liminf_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\quad,\qquad \Lambda(f,x)=\limsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

Отметим, что если для всех x из D $\Lambda(f, x)$ не превосходит постоянной K, то отображение f непрерывно и согласно теореме Степанова-Радемахера почти всюду дифференцируемо [4].

ACL^p — класс функций абсолютно непрерывных на почти всех прямых, $p \geq 1$ — показатель суммируемости производных функций из этого класса. О классе ACL^p см. [5]. Отображение $f: D \to R^n$ принадлежит классу ACL^p, если все его координатные функции оттуда. Отметим, что класс ACL^p совпадает с классом Соболева $W_{loc}{}^p$. Если отображение $f:D \to R^n$ принадлежит ACL, то для почти всех x из D определена матрица Якоби $f'(x)$ и якобиан $J(f, x)$, производные понимаются в обычном смысле.

Говорят, что отображение f постоянной ориентации, если почти для всех x из D знак якобиана один и тот же.

Замечание. Полагаем, что все рассматриваемые в статье отображения постоянной ориентации.

Определение 1. Отображение $f: G \to R^n$ называется K-квазиизометрическим, если существуют постоянные a и b, $0 < a \leq b$, такие, что для любого x из D выполнено

$$a \leq \lambda(f, x), \quad \Lambda(f, x) \leq b \text{ и } \quad \sqrt{\frac{a}{b}} \leq K.$$

Отметим, что в работе [1] эти отображения называются BLD-отображениями.

Через $\delta(x)$ будем обозначать расстояние от точки x до границы области G.

Определение 2. Отображение $f: G \to R^n$ называется K-квазигиперболическим, если существуют две непрерывные положительные функции a и b, определенные в G, такие, что для любой точки $y \in G$ и $x \in B(y, \delta(y)/2)$ выполнено

$$a\ (y) \leq l\ (f,\ x),\ \Lambda\ (f,\ x) \leq b\ (y), \qquad \sqrt{\frac{b(y)}{a(y)}} \leq K,$$

где B (y, r) шар с центром в y радиуса r.

Другие, эквивалентные определения квазигиперболических отображений, приведены в работе [6].

Определение 3. ACL-отображение $f : G \to R^n$ называется отображением с ограниченным искажением с коэффициентом K (K-квазирегулярным отображением), если для почти всех x из G

$$\Lambda^n(f, x) \leq K\, J(f, x).$$

Приведем необходимые сведения из работы [1]. Пусть $p>1$,

$A: D \times R^n \to R$ дифференциальный эллиптический оператор второго

порядка в дивергентной форме, $p>1$. Это означает, что A удовлетворяет следующим условиям:

(a) Для каждого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $F \subset D$ такое, что $m(D \setminus F) < \varepsilon$ и ограничение A на $F \times R^n$ непрерывно, m(U) — мера Лебега множества U.

(b) Существуют положительные числа γ_1, γ_2 такие, что для почти всех $x \in D$ и всех $h \in R^n$ выполнено

$$|A\ (x,\ h)| \leq \gamma_1 |h|^{p-1} \tag{1}$$

(ограниченность)

$$A\ (x,\ h) \cdot h \geq \gamma_2 |h|^p \tag{2}$$

(равномерная эллиптичность).

Непрерывная ACL^p-функция $u: D \to R$ является решением уравнения

$$\nabla\cdot A(x,\nabla u(x)) = 0, \qquad (3)$$

если для всех $\phi \in C_0\beta^\infty(D)$ выполнено

$$\int_D A(x,\nabla u(x))\cdot\nabla\phi(x)dm(x) = 0$$

Пусть теперь f — ACL — отображение области G в область D. Оператор $f^{\#}A$ определяется формулой

$$f^{\#}A(x, h) = J(f, x)f'(x)^{-1}A(f(x), f'(x)^{-1*}h),$$

если $J(f,x)$ № 0, если же $J(f,x) = 0$ или не существует, то положим $f^{\#}A(x,h) = A(f(x),h)$. Напомним, что $f'(x)$ — матрица Якоби, если T —матрица, то T^{-1} — обратная, T^* — транспонированная матрицы.

Вид оператора $f^{\#}$ объясняется теоремой 3.11 [1], в которой показано, что решение уравнения $\nabla\cdot A=0$ определяет решение уравнения $\nabla\cdot f^{\#}=0$ (в нашей статье это теорема 3).

В [1] операторы A и $f^{\#}A$ удовлетворяют условиям (1) и (2). Наши результаты обусловлены ослаблением этих условий.

Мы предполагаем, что оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условию (а) и условию (с), то есть существуют две положительные функции γ'_1 и γ'_2, определенные на G, такие, что существует положительное число M, с которым для каждой точки $y\in G$ выполнено

$$\gamma'_1(y)/\gamma'_2(y)+\gamma'_2(y)/\gamma'_1(y) \le M,$$

и для каждой точки $x\in B(y,d(y)/2)$ имеет место оценка

$$|f^{\#}A(x,h)| \le \gamma'_1(y)|h|^{p-1} \qquad (4)$$

(локальная ограниченность)

и $$f^{\#}A(x,h)\cdot h \ge \gamma'_2(y)|h|^p \qquad (5)$$

(локальная равномерная эллиптичность)

Теореме 3.9 [1] у нас будет соответствовать.

Теорема 1. Пусть $f: G\to D$ ACL — отображение такое, что $J(f, x) > 0$ почти всюду, оператор A удовлетворяет условиям (а) и (в), оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условиям (а) и (с). Тогда

(1) f — квазигиперболическое отображение, если $p\neq n$,

(2) f — отображение с ограниченным искажением, если $p=n$ и функция $J(f,x)$ локально интегрируемая.

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из G. Ограничение f на $B(y,\delta(y)/2)$удовлетворяет условиям теоремы 3.9 из [1]. Повторяя рассуждения из этой теоремы, заключаем, что для почти всех x из $B(y,\delta(y)/2)$ выполнены следующие условия. При $p=n$

$$\Lambda^n(f,x) \le (\gamma_1\gamma'_1(y)/\gamma'_2(y)\gamma_2)\lambda^n(f, x) \qquad (6)$$

Так как множитель перед λ^n в (6) ограничен сверху числом $(\gamma_1/\gamma_2)M$, с учетом локальной интегрируемости якобиана $J(f,x)$, заключаем, что f является отображением с ограниченным искажением.

При $p>n$

$$\Lambda(f, x) \le (\gamma_1/\gamma'_2(y))^{1/(p-n)} = b(y) \qquad (7)$$

$$\lambda(f,x) \ge (\gamma_2/\gamma'_1(y))^{1/(p-n)} = a(y) \qquad (8)$$

При $p < n$

$$\Lambda(f,x) \le (\gamma_1^{1/p}\gamma'_1(y)^{n/p(n-p)} / \gamma'_2(y)^{1/p}\gamma_2^{n/p(n-p)}) = Q(y) \qquad (9)$$

$$\lambda(f,x) \le (\gamma_2^{1/p}\gamma'_2(y)^{n/p(n-p)} / \gamma'_1(y)^{1/p}\gamma_1^{n/p(n-p)}) = q(y) \qquad (10)$$

Пары неравенств (7), (8) и (9), (10) означают, что при $p \neq n$ f является M_n— квазиизометрическим в шаре $B(y,\delta(y)/2)$.

Если $p>n$, $M_n \leq (b(y)/a(y))^{1/2} = (\gamma_1\gamma'_1(y)/\gamma_2\gamma\ _2(y))^{1/2(p-n)} \leq (M\gamma_{1/}\gamma_2)^{1/2(p}$

если $p<n$, $M_n \leq (Q(y)/q(y)) = (\gamma_1\gamma'_1(y)/\gamma_2\gamma'_2(y))a \leq (M\gamma_{1/}\gamma_2)^{\alpha}$,

где $\alpha = (n-p+1)/(2p(n-p))$.

Таким образом, отображение f является M_n— квазигиперболическим на G.

Теореме 3.15 [1] соответствует.

Теорема 2. Предположим $p \neq n$, уравнение (3) удовлетворяет условиям (а) и (в) и отображение $f\colon G \to D$ является K-квазигиперболическим.

Тогда оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условиям (а) и (с) в G, где функции γ'_1 и γ'_2 зависят только от A, K, p и n.

Доказательство. Пусть $y \in G$. Рассмотрим ограничение f на шар $B=B(y,\delta(y)/2)$. Отображению $f|B$ соответствует оператор $f^{\#}{}_yA$ — ограничение $f^{\#}A$ на $B \times R^n$. $f|B$ — K-квазиизометрическое отображение, тогда по теореме 3.15 [1] $f^{\#}{}_yA$ удовлетворяет условиям (а) и (в) с постоянными $\gamma'_1(y)$ и $\gamma'_2(y)$.

Теперь покроем область G счетным набором шаров $\{B_k\}$ вида $B(y,\delta(y)/2)$, где $y \in G$. Так как $f^{\#}A|(B_k \times R^n)$ удовлетворяет условию (а), для любого $\varepsilon>0$ найдется замкнутое множество $F_k \subset B_k$, $m(B_k \setminus F_k) < \varepsilon/2^k$ такое, что отображение $f^{\#}A|(B_k \times R^n)$ непрерывно. Пусть $U_k = B_k \setminus F_k$, $U = \bigcup_k U_k$.

Тогда $m(U) \leq \Sigma U_k < \Sigma\, \varepsilon/2^k = \varepsilon$. Положим, $F = G \setminus U$. При помощи соотношений двойственности для объединений и пересечений можно проверить, что $F = \bigcup F_k$.

По построению отображение $f^{\#}A$ непрерывно на всех множествах $F_k \times R^n$, $k \in N$, следовательно, непрерывно и на F, кроме того,

$$m(G \setminus F) < \varepsilon .$$

Таким образом, свойство (а) выполнено.

Проверим свойство (с). Так как f K-квазигиперболическое отображение, найдутся непрерывные положительные функции a и b наG такие, что для любой точки $y \in G$ и $x \in B(y,\delta(y)/2)$ выполнено

$$a(y) \leq \lambda(f,x), \quad \Lambda(f,x) \leq b(y) \ .$$

Положим, как и в теореме 3.15 [1] $h^* = f\ (x)^{-1*}h$, тогда

$$|f^{\#}A(x,h)| = |J(f,x)f\ (x)^{-1}A(f,x),h^{*)}| \leq \Lambda^n(f,x)\lambda^{-1}(f,x)\,|A(f(x),h^*)| \leq$$

$$\leq (g_1b^n(y)/a(y))\,|h^*|^{p-1} \leq (b^n(y)g_1/a(y)\lambda^{p-1}(y))\,|h|^{p-1} \leq (g_1b^n(y)/a^p(y))\,|h|^{p-1} .$$

Итак, $$|f^{\#}A(x,h)| \leq (g_1b^n(y)/a^p(y))\,|h|^{p-1} . \qquad (11)$$

Так же, как в [1], доказывается оценка

$$f^{\#}A(x,h)\cdot h = J(f,x)A(f(x),h^*)\cdot h^* \geq J(f,x)\gamma_2\,|h^*|^p \geq (\lambda^n(f,x)\gamma_2/\Lambda^p(f,x))\,|h|^p \geq$$

$$\geq (\gamma_2a^n(y)/b^p(y))\,|h|^p. \qquad (12)$$

Положим $\gamma'_1(y) = (b^n(y)/a^p(y))\gamma_1$, $\gamma'_2(y) = (a^n(y)/b^p(y))\gamma_2$, тогда

$$\gamma'_1(y)/\gamma'_2(y) + \gamma'_2(y)/\gamma'_1(y) \leq K^{p+n}\gamma_1/\gamma_2 + \gamma_2/\gamma_1 = C .$$

Таким образом, $f^{\#}A$ удовлетворяет свойству (с).

Теореме 3.17 [1] соответствует.

Теорема 3. Пусть $f: G \to D$ — K-квазигиперболическое отображение. Предположим, что u — решение уравнения

$\nabla \cdot A = 0$ в D. Тогда $v = u^\circ f$ является решением уравнения

$\nabla \cdot f^{\#} A = 0$ в G.

Доказательство. Пусть $y \in G$, тогда ограничение f на шар B = B (y,δ(y)/2) является квазиизометрическим отображением. По теореме 3.17 [1] ограничение функции $v = u^\circ f$ на B есть решение уравнения $\nabla \cdot f^{\#} A = 0$ в шаре B. Так как точка y была взята произвольно в B, функция $v = u^\circ f$ является решением уравнения $\nabla \cdot f^{\#} A = 0$ во всей области G.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что условие квазигиперболичности f избыточно, достаточно потребовать существования покрытия области G шарами, на каждом из которых f K- квазиизометрично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Vдisдlд J. Elliptic Equations and Maps of Bounded Length Distortion// Mathematishe Annalen. 1988. V. 282. P. 423-443.
2. Решетняк Ю.Г. Об экстремальных свойствах отображений с ограниченным искажением// Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 6. С. 1308-1318.
3. Glanlund S., Linqvist P., Martio O. Conformally invariant variational integrals// Trans. Am. Math. Soc. 1983. V.277. P.43-73.
4. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 460 с.
5. Vдisдlд J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin, Heidelberg, New York. Springer, 1971. 248 p.
6. Латфуллин Т. Г. Критерий квазигиперболичности отображений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 3. С. 610-615.

М. Я. ФЛЯГИН

УДК 007:681.518.2

ГРУППОВЫЕ СРАВНЕНИЯ В МЕТОДЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

АННОТАЦИЯ. Предложен метод обработки иерархической системы, когда сравнение проводится между подмножествами (группами) элементов, а не между отдельными элементами. Получены соответствующие формулы. Проведена апробация на стандартном примере. Предложенный метод позволяет повысить надежность экспертных оценок.

The method of processing of hierarchical system is offered when the comparison will be carried out between sets (groups) instead of between elements. The