Теорема 3. Пусть $f: G \to D$ — K-квазигиперболическое отображение. Предположим, что u — решение уравнения

$\nabla \cdot A = 0$ в D. Тогда $v = u^{\circ}f$ является решением уравнения

$\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ в G.

Доказательство. Пусть $y \in G$, тогда ограничение f на шар B = B (y,δ(y)/2) является квазиизометрическим отображением. По теореме 3.17 [1] ограничение функции $v = u^{\circ}f$ на B есть решение уравнения $\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ в шаре B. Так как точка y была взята произвольно в B, функция $v = u^{\circ}f$ является решением уравнения $\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ во всей области G.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что условие квазигиперболичности f избыточно, достаточно потребовать существования покрытия области G шарами, на каждом из которых f K- квазиизометрично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Vдisдlд J. Elliptic Equations and Maps of Bounded Length Distortion// Mathematishe Annalen. 1988. V. 282. P. 423-443.

2. Решетняк Ю.Г. Об экстремальных свойствах отображений с ограниченным искажением// Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 6. С. 1308-1318.

3. Glanlund S., Linqvist P., Martio O. Conformally invariant variational integrals// Trans. Am. Math. Soc. 1983. V.277. P.43-73.

4. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 460 с.

5. Vдisдlд J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin, Heidelberg, New York. Springer, 1971. 248 p.

6. Латфуллин Т. Г. Критерий квазигиперболичности отображений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 3. С. 610-615.

М. Я. ФЛЯГИН

УДК 007:681.518.2

ГРУППОВЫЕ СРАВНЕНИЯ В МЕТОДЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

АННОТАЦИЯ. Предложен метод обработки иерархической системы, когда сравнение проводится между подмножествами (группами) элементов, а не между отдельными элементами. Получены соответствующие формулы. Проведена апробация на стандартном примере. Предложенный метод позволяет повысить надежность экспертных оценок.

The method of processing of hierarchical system is offered when the comparison will be carried out between sets (groups) instead of between elements. The *appropriate formulas are received. The approbation on a standard example is carried out. The offered method can increase stability of expert estimations.*

Анализ сложных систем важен в тех случаях, когда необходимо принимать решение, последствия которого могут оказаться очень важными для данной системы. В таких ситуациях опираются либо на опыт и решение принимается по аналогии, либо используют какой-нибудь из имеющихся методов поддержки принятия решений. Одним из таких методов и является метод иерархического анализа (МИА).

Метод иерархического анализа сложных систем был предложен и развит Т. Саати [1]. Преимущество МИА заключается в том ,что его можно использовать для сравнения элементов, которые не могут быть представлены в численной форме. В этих случаях вся ответственность за достоверность информации ложится либо на экспертов, либо на лицо, принимающее решение. По этой причине необходимо использовать любую возможность для контроля истинности и согласованности суждений экспертов. Данная работа посвящена дополнительной возможности контроля суждений экспертов.

Метод иерархического анализа системы можно условно разбить на два этапа:

1. Составление иерархии
2. Обработка иерархии.

В итоге получаются относительные веса элементов уровней для всей иерархии.

В МИА обработка иерархии проводится методом парных сравнений, когда сравниваются между собой два произвольно выбранных элемента одного уровня[1]. Естественно, что при таких сравнениях на оценку всегда будет оказывать влияние субъективный фактор. Этого не избежать, особенно когда речь идет о величинах, не поддающихся количественной оценке. В этих случаях очень важно использовать любую возможность контроля оценки. Такая возможность представится, если сравнивать между собой не отдельные элементы уровня, а группы (множества) элементов, составленные из элементов одного уровня. Несмотря на то, что сравнения проводят одни и те же эксперты, иногда сравнения множеств провести проще, чем отдельных элементов. Кроме того, сравнение двух подходов в обработке иерархии позволяет судить о том, насколько глубоко эксперты понимают задачу. В любом случае, результаты, полученные методом парных сравнений, когда сравниваются отдельные элементы, и методом групповых сравнений, когда сравниваются множества, должны совпадать.

Рассмотрим отдельный уровень иерархии. Конечное множество элементов уровня для облегчения работы экспертов предварительно упорядочим и пронумеруем, хотя это не имеет принципиального значения.

$$e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n, \tag{1}$$

где n — мощность множества (число элементов на уровне).

Введем частичную сумму:

$$S_k = \bigcup_{i=k}^{n} e_i \tag{2}$$

Сравним элемент e_1 с суммой всех остальных: S_2. Обозначим оценку сравнения через b_{12} и представим её как отношение:

$$b_{12} = \frac{e_1}{S_2} \tag{3}$$

Поскольку нас интересуют веса отдельных элементов, то необходимо выразить оценку парного сравнения двух отдельных элементов через оценку сравнения двух множеств. Рассмотрим отношение:

$$\frac{b_{n-2,n-1}}{b_{n-1,n}} = \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} \frac{S_n}{S_{n-1}} = a_{n-2,n-1} \frac{S_n}{S_{n-1}}, \tag{4}$$

где $a_{n-2,n-1}$ оценка парного сравнения элементов e_{n-2} и e_{n-1}.

Расписывая отношение

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{1}{b_{n-1,n}+1}, \tag{5}$$

находим связь:

$$a_{n-2,n-1} = b_{n-2,n-1} \frac{1+b_{k,k+1}}{b_{n-1,n}} \tag{6}$$

Теперь по индукции можно получить формулу:

$$a_{k-1,k} = b_{k-1,k} \frac{1+b_{k,k+1}}{b_{k,k+1}}, \tag{7}$$

где $2 \le k \le n\text{-}1$, когда $k = n$, множитель

$$\frac{1+b_{k,k+1}}{b_{k,k+1}} = 1 \tag{8}$$

Введем обозначение для суммы двух соседних элементов:

$$U_k^2 = e_k \cup e_{k+1} \tag{9}$$

Оценка сравнения суммы двух элементов e_{i-2} и e_{i-1} с суммой элементов, стоящих справа от выбранных, определяется как

$$b_{i-2,i} = \frac{U_{i-2}^2}{S_i} \tag{10}$$

Проведя преобразования, аналогичные приведенным выше, при условии (8) и $3 \le k \le n$ получаем:

$$a_{k-2,k} = b_{k-2,k} \frac{1+b_{k,k+1}}{b_{k,k+1}} - a_{k-1,k} \tag{11}$$

Формула (11) определяет совокупность (n-2) оценок сравнений двух групп, когда в качестве первой группы, а это два соседних элемента, выступают все пары из множества (1)

$$e_1, \underbrace{e_2, e_3}_{U}, \underbrace{e_4, \dots, e_n}_{S} \tag{12}$$

На приведенной схеме указатель выбранной пары (черта) последовательно движется слева направо и на каждом этапе проводится сравнение двух подмножеств U и S. Следующий шаг заключается в выборе множества из трех соседних элементов и последующим сравнении данного множества с суммой элементов, расположенных справа от него. В итоге получается формула, аналогичная (11). По индукции можно получить общую формулу

$$a_{k-\alpha,k} = b_{k-\alpha,k} \frac{1+b_{k,k+1}}{b_{k,k+1}} - \left[a_{k-(\alpha-1),k} + a_{k-(\alpha-2),k} + \dots + a_{k-1,k}\right] \tag{13}$$

где $\alpha+1 \le k \le n$, $1 \le \alpha \le (n-1)$ и при $k = n$

$$\frac{1+b_{k,k+1}}{b_{k,k+1}} = 1 \tag{14}$$

α — мощность одного из подмножеств. Формула (13) решает поставленную задачу: элементы матрицы парных сравнений выражаются через групповые сравнения.

Резюмировать изложенное выше можно с помощью следующей схемы:
Первый шаг: упорядочение элементов уровня

$$e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n \ ,$$

определение двух подмножеств:

$$S_i = \bigcup_{k=i}^{n} e_k \qquad U_i^n = \bigcup_{k=i}^{i+\alpha-1} e_k$$

Второй шаг: сравниваем элемент e_i с суммой элементов (s_{i+1}), стоящих справа от него. В результате получаем (n-1) оценок $b_{i,i+1}$. Данный шаг соответствует $\alpha = 1$.

Третий шаг: сравниваем сумму двух рядом стоящих элементов с частичной суммой элементов, стоящих справа от выбранной пары. Это дает (n-2) оценок $b_{i,i-2}$ и т.д. до сравнения суммы (n-1) элементов с одним последним элементом e_n. В итоге получаем: $\frac{n(n-1)}{2}$ оценок b_{ij}, через которые определяем матрицу парных сравнений согласно (13).

В качестве примера рассмотрим определение площади стран, используя "Атлас мира" [2]. Данный пример примечателен тем, что известны истинные значения площадей. Были выбраны четыре страны: Югославия, Румыния, Болгария, Венгрия. При сравнении использовалась линейная шкала оценок ответов с максимальным баллом : 9. Всего имелось пять ответов с возможностью использования промежуточных значений [1]. Результаты представлены в таблице в виде относительных долей от общей площади всех стран.

Страна	Парные сравнения	Групповые сравнения	Истинные значения
Югославия	0.48	0.44	0.37
Румыния	0.31	0.29	0.34
Болгария	0.13	0.16	0.16
Венгрия	0.08	0.1	0.13

Полученные результаты показывают, что использование групповых сравнений действительно помогает оценить качество экспертных оценок, что повышает достоверность результатов. Различие в величинах экспертных оценок и истинных значений обусловлено качеством экспертизы, которое в данном случае зависит от того, насколько точно сравниваются по площади между собой плоские геометрические фигуры сложной формы. Добиваясь соответствия в оценке парных и групповых сравнений, можно существенно улучшить результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т. Принятие решений. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.
2. Атлас мира. М., 1979.