В. Н. ОСТАШКОВ

ПРОЕКТИВНОЕ СВОЙСТВО ЦЕНТРОИДА ТОЧЕК

АННОТАЦИЯ. Дается оригинальная интерпретация центроида (центра тяжести) конечного множества точек n-мерного аффинного пространства; при этом используются понятия двойственного проективного пространства и полярной гиперплоскости точки относительно алгебраической гиперповерхности.

This article informs about original interpretation of centroid of finite points system, situated in affinne space with dimension n. The conceptions of duality projective space and polar hyperplane of point relatively to algebraic hypersurfaces are used in this article.

Одно из важнейших понятий аффинной геометрии — центроид системы точек — допускает интересную интерпретацию с точки зрения проективной геометрии. Эта интерпретация получается с помощью теории поляр, являясь простым следствием некоторых ее фактов.

1. Известно, что центроидом системы $S=\{a_1,a_2,...,a_r\}$ точек a_p, $p=1..r$, n — мерного аффинного пространства $\mathbf{A}^n$ является точка $g=(g^i)\in\mathbf{A}^n$, $i=1..n$, с координатами

$$g^i=\tfrac{1}{r}(a_1^i+a_2^i+...+a_r^i),$$

где a_p^i, $p=1..r$, — координаты точки a_p относительно некоторого аффинного репера пространства $\mathbf{A}^n$.

где a_p^i, $p=1..\ r$, — координаты точки a_p относительно некоторого аффинного репера пространства A^n.

Кроме понятия центроида, напомним еще несколько необходимых понятий, прежде всего, для пояснения обозначений.

2. Объединение $\mathbf{P}^n=\mathbf{A}^n\bigcup H^{n-1}$ пространства $\mathbf{A}^n$ и его несобственной гиперплоскости H^{n-1} представляет собой n — мерное проективное пространство. Переход от неоднородных координат x^i точки $x\in\mathbf{A}^n$ к однородным ее координатам α^A, $A=0..n$, как точки из $\mathbf{P}^n$, осуществляется по правилу:

$$\alpha^A=\begin{cases}1 & \text{при } A=0,\\ x^A & \text{при } A\neq 0.\end{cases}$$

Несобственная гиперплоскость H^{n-1} удовлетворяет уравнению $\alpha^0=0$, и переход от однородных координат α^A точки $x\notin H^{n-1}$ к неоднородным координатам x^i происходит по формулам:

$$x^i=\frac{\alpha^i}{\alpha^0}\quad, i = 1\,..\,n.$$

3. Произвольная гиперплоскость π пространства $\mathbf{P}^n$, как множество нулей 1 – формы

$$f=\alpha^A\pi_A=\alpha^0\pi_0+\alpha^1\pi_1+...+\alpha^n\pi_n$$

изображается точкой π^* пространства $\mathbf{P}^{n*}$, двойственного пространству $\mathbf{P}^n$, $\dim\mathbf{P}^{n*}=\dim\mathbf{P}^n=n$, имеющей координаты π_A. В свою очередь, точка $\alpha=(\alpha^A)\in\mathbf{P}^n$ изображается в $\mathbf{P}^{n*}$ гиперплоскостью α^*, являющейся множеством нулей формы f, определенной в $\mathbf{P}^{n*}$. Для удобства формулировок условимся точки $\alpha, \beta, \ldots$ и гиперплоскости $\pi, \delta, \ldots$ пространства $\mathbf{P}^n$ обозначать без звездочки, а их изображения в двойственном пространстве $\mathbf{P}^{n*}$ — со звездочкой: $\alpha^*, \beta^*, \ldots$ — гиперплоскости, $\pi^*, \delta^*, \ldots$ — соответственно точки пространства $\mathbf{P}^{n*}$.

Например, несобственная гиперплоскость $H:=H^{n-1}$ пространства $\mathbf{A}^n$ имеет в P^n уравнение $\alpha^0=0$ и изображается в $\mathbf{P}^{n*}$ точкой $H^*=(1:0:...0)$, а точки $\alpha_p\in\mathbf{A}^n$, $p=1..\,r$, изображаются в $\mathbf{P}^{n*}$ соответственно гиперплоскостями $\overset{*}{a}_p$, которые суть нули форм $f_p=\alpha_p^A\pi_A$

4. Нули формы

$$\psi=f_1\,f_2\ldots f_r=(\alpha_1^{A_1}\pi_{A_1})(\alpha_2^{A_2}\pi_{A_2})\ldots(\alpha_r^{A_r}\pi_{A_r})=$$
$$=\alpha_1^{(A_1}\alpha_1^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r)}\pi_{A_1}\pi_{A_2}\ldots\pi_{A_r},\qquad A_p=0..n,$$

образуют в $\mathbf{P}^{n*}$ гиперповерхность F, $\deg F=r$, имеющую r линейных компонент — гиперплоскостей $\overset{*}{a}_p$. Здесь в записи формы ψ стоящие наверху круглые скобки обозначают симметризацию тензора

$$\psi^{A_1A_2\ldots A_r}=\alpha_1^{A_1}\alpha_2^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r}:$$

$$\psi^{(A_1A_2\ldots A_r)}=\alpha_1^{(A_1}\alpha_1^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r)}=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\alpha_1^{A_{\sigma(1)}}\alpha_2^{A_{\sigma(2)}}\ldots\alpha_r^{A_{\sigma(r)}}$$

где σ — группа перестановок элементов множества $I=\{1, 2, \ldots, r\}$.

5. Первая поляра $\Delta^1=\Delta^1(\delta^*, F)$ точки $\delta^*=(\delta_A)\in\mathbf{P}^{n*}$ относительно гиперповерхности F определяется как гиперповерхность степени $r-1$, являющаяся нулями $(r-1)$ – формы

$$\Delta^1=\alpha_1^{(A_1}\alpha_2^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r)}\delta_{A_1}\pi_{A_2}\ldots\pi_{A_r},$$

полученной с помощью частных производных формы ψ по переменным π_A:

$$\Delta^1=\sum_{A=0}^{n}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\pi_A}\delta_A.$$

Вторая поляра $\Delta^2 = \Delta^2(\delta^*,F)$ точки δ^* относительно F определяется как первая поляра гиперповерхности Δ^1, т. е. $\Delta^2 = \Delta^1(\delta^*, \Delta^1)$. Она представляет собой множество нулей $(r-2)$ – формы

$$\Delta^2 = \alpha_1^{(A_1}\alpha_2^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r)}\delta_{A_1}\delta_{A_2}\pi_{A_3}\ldots\pi_{A_r}.$$

Нули $(r-s)$ – формы

$$\Delta^s = \alpha_1^{(A_1}\ldots\alpha_s^{A_s}\alpha_{s+1}^{A_{s+1}}\ldots\alpha_r^{A_r)}\delta_{A_1}\ldots\delta_{A_s}\pi_{A_{s+1}}\ldots\pi_{A_r}$$

образуют s-ю поляру $\Delta^s = \Delta^s(\delta^*,F)$ точки δ^* относительно F,

$\deg \Delta^s = r-s$. Поляра Δ^{r-1} имеет степень $\deg \Delta^{r-1} = 1$ и является гиперплоскостью с уравнением

$$\alpha_1^{(A_1}\alpha_2^{A_2}\ldots\alpha_r^{A_r)}\delta_{A_1}\ldots\delta_{A_{r-1}}\pi_{A_r} = 0. \qquad (1)$$

6. Теорема. Центроид точек $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r \in \mathbf{A}^n$ есть точка $g \in \mathbf{A}^n$, такая, что g^* — полярная гиперплоскость точки $H \in \mathbf{P}^{n*}$ относительно гиперповерхности $F = a_1^* \cup a_2^* \cup \ldots \cup a_r^* \subset \mathbf{P}^{n*}$, где H — несобственная гиперплоскость пространства $\mathbf{A}^n$.

Доказательство. Положим в (1) $\delta = H = (1:0:\ldots:0)$, т. е. $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 0$. Тогда (1) примет вид:

$$\alpha_1^{(0}\ldots\alpha_{r-1}^{0}\alpha_r^{A)}\pi_A = 0.$$

Если γ^* — гиперплоскость с этим уравнением, то точка $\gamma = (\gamma^A) \in \mathbf{P}^n$ будет иметь координаты:

$$\gamma^A = \alpha_1^{(0}\ldots\alpha_{r-1}^{0}\alpha_r^{A)}.$$

Так как $a_p \in A^n \Leftrightarrow \alpha_p^0 \neq 0$, $p = 1\ ..\ r$, то

$$\gamma^0 = \alpha_1^{(0}\ldots\alpha_r^{0)} = \alpha_1^0\ldots\alpha_r^0 \neq 0.$$

Следовательно, $\gamma \in \mathbf{A}^n$, при этом γ имеет координаты

$$\frac{\gamma^i}{\gamma^0} = \frac{\alpha_1^{(0}\ldots\alpha_{r-1}^{0}\alpha_r^{i)}}{\alpha_1^0\ldots\alpha_{r-1}^0\alpha_r^0} = \frac{(r-1)!}{r!}\left(\frac{\alpha_1^i}{\alpha_1^0}+\ldots+\frac{\alpha_r^i}{\alpha_r^0}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}(a_1^i+\ldots+a_r^i) = g^i$$

и совпадает с центроидом γ точек a_p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. М.: Мир, 1982. 862 с.

2. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: МГУ, 1980. 319 с.