А. Г. ХОХЛОВ

УДК 515. 12

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ РАЗДЕЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются топологические свойства пространств раздельно непрерывных функций — $C_r(X*Y)$, которые наделяются топологией поточечной сходимости. Если Z — топологическое пространство, то через $C_p(Z)$, $B_1(Z)$ и $B(Z)$ будут обозначаться пространства непрерывных, первого бэровского класса и, соответствено, бэровских функций. Все они наделяются топологией поточечной сходимости. Как известно [1], если X и Y — сепарабельные метрические пространства, то $C_r(X*Y) \subset B_1(X*Y)$. Для тихоновских пространств, X и Y, даже для бикомпактов, это включение, в общем случае, не имеет места. Рассматривается вопрос о тесноте пространства $C_r(X*Y)$. В частности, получены некоторые необходимые или достаточные условия счетности тесноты $C_r(X*Y)$. Для бикомпактов решен вопрос о включении $C_r(X*Y) \subset B_1(X*Y)$.

On spaces theory of dividely continious fuctions. This article discusses a question about spaces narrowness, particulary any nesessary or sufficient condition of count countability. A question about including is lolved for bicompacts.

В статье рассматриваются топологические свойства пространств раздельно непрерывных функций — $C_r(X*Y)$, которые наделяются топологией поточечной сходимости. Если Z — топологическое пространство, то через $C_p(Z)$, $B_1(Z)$ и $B(Z)$ будут обозначаться пространства непрерывных, первого бэровского класса и, соответствено, бэровских функций. Все они наделяются топологией поточечной сходимости. Как известно [1], если X и Y — сепарабельные метрические пространства, то $C_r(X*Y) \subset B_1(X*Y)$. Для тихоновских пространств, X и Y, даже для бикомпактов, это включение, в общем случае, не имеет места. Рассматривается вопрос о тесноте пространства $C_r(X.Y)$. В частности, получены некоторые необходимые или достаточные условия счетности тесноты $C_r(X*Y)$. Для бикомпактов решен вопрос о включении $C_r(X*Y) \subset B_1(X*Y)$.

Будут использоваться следущее обозначения:

$w(X)$ — вес X, $nw(X)$ — сетевой вес X, $c(X)$ — число Суслина X, $\psi(X)$ — псевдохарактер X, $t(X)$ — теснота X, $l^*(X) = \sup\{lX^n\}$:

$n\in N\}$, $\Delta(X)=\{(x,x);\ x\in X\}$ — диагональ X, $X\aleph_0$ — $\aleph_0$ — модификация X, $Exp\ (X)=\{A: A\subset X\}$, если $A\subset X$, то $[A]\aleph_0 = U\{[B]: B\subset A,\ |B|\le\aleph_0\}$, $|X|$ — мощность X, X монолитно, если для всякого $A\subset X$, $nw(\overline{A})\le|A|$. По поводу всех этих понятий см. [2], [3].

Теорема.

Пусть X и Y бикомпактны. Тогда следущие условия эквивалентны:

1) $C_r(X*Y)\subset B_1(X*Y)$,

2) $C_r(X*Y)\subset B(X*Y)$,

3) $C_r(X*Y)\subset [C(X*Y)]\ \aleph_0$.

4) $\min\ \{c(X),\ c(Y)\}\le\aleph_0$.

Доказательство.

Импликации 1) –> 2), и 2) –> 3) справедливы, так как для всякого пространства Z, $B_1(Z)(B(Z)([C(Z)]\aleph_0$ –

Покажем, что 3) –> 1). Пусть $f\in C_r(X*Y)$. Тогда найдется счетное семейство $F=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(X*Y)$ и $f\in[F]$. Из спектральной теоремы для бикомпактов [5] нетрудно вывести, что найдутся непрерывные отображения $\varphi: X \overset{на}{>} X_1$ и $g: y \overset{на}{>} Y_1$, где X_1 и Y_1 метризуемые бикомпакты, а также непрерывные функции $f_n^*: X_1*Y_1 -> R$, $n\in N$, такие, что $f_n = f_n^*\circ(\varphi*h)$, $n\in N$. Положим, $h=\varphi*h{:}X*Y \overset{на}{>} X_1*Y_1$. Тогда $\tilde{h}: C_r(X_1*Y_1) -> C_r(X*Y)$, определенное правилом: $\tilde{h}(\psi)=\psi\circ h$, вложение, причем $\tilde{h}(C_r(X_1*Y_1))$ замкнуто в $C_r(X*Y)$. Следовательно, так как $F(\tilde{h}(C_r(X_1*Y_1))$, то и $f\in[F]\subset\tilde{h}(C_r(X_1*Y_1))$. Так как X_1*Y_1 — ментризуемый бикомпакт, то [2] X_1*Y_1 — пространство со счетной базой. Кроме того $f=f^*\circ h$, где $f^*\in C_r(X_1*Y_1)\subset(B_1(X_1*Y_1)$ [1], так как X_1*Y_1 — со счетной базой. Но тогда и $f=f^*\circ h\in B_1(X*Y)$. Покажем, что 4) –> 1). Пусть для определенности $c(Y)\le\aleph_0$ и $f\in C_r(X*Y)=C_p(X,\ C_p(Y))$. Тогда $f(X)\subset C_p(Y)$ бикомпакт и так как $c(Y)\le\aleph_0$, то [3] f(X) метризуем. Тогда найдется непрерывное отображение $g: Y \overset{на}{>} Y_1$, где Y_1 — метризуемый бикомпакт и $f(X)\subset\tilde{g}\,C(Y_1)$. Это означает, что найдется $f^*\in C_r(X*Y_1)$ и $f=f^*\circ(id_x*g)$. Рассмотрим $f^*\in C_r(X*Y_1)=C_p(Y_1,\ C_p(X))$. Так как Y_1 — метризуемый бикомпакт, то и $f^*(Y_1)\subset C_p(X)$ метризуем, следовательно, найдется непрерывное отображение $h: X \overset{на}{>} X_1$, где X_1 — метризуемый бикомпакт и $f^*(Y_1)\subset\tilde{h}\,C(X_1)$. Тогда $f^*=\psi\circ(h*id_y)$, где $\psi\in C_r(X_1*Y_1)$, следовательно, $f=\psi\circ(h\circ g)$ и так как X_1*Y_1 — пространство со счетной базой, то $\psi\in C_r(X_1*Y_1)$, а тогда и $f\in B_1(X*Y)$. Докажем, что 2) –> 4). Предположим противное. Тогда $c(X)\ge\aleph_1$, $c(Y)\ge\aleph_1$. Пусть $\{U\alpha:\ \alpha< w_1\}$ — дизъюктное семейство непустых копуль множеств в X, и $\{V\alpha:\ \alpha< w_1\}$ — дизъюктное семейство непустых копуль множеств в Y. Зафиксируем непрерывные функции

h_α: X —> R и g_α: Y —> R такие, что $h_\alpha^{-1}(R\setminus\{o\}) = U\alpha$ и $g_\alpha^{-1}(R\setminus\{o\}) = V\alpha$, $\alpha < w_1$.

Определим функцию f: X*Y —> следующим образом:

$$f(x,y)=\begin{cases}0,\text{если } (x,y) \notin \bigcup\{U_\alpha * V_\alpha : \alpha < w1\},\\ f_\alpha(X)*g(X), \text{ если } (x,y) \notin U_\alpha * V_\alpha\end{cases}$$

Легко видеть, что $f\in C_r(X.Y)$. Но $f^{-1}(R\setminus\{o\}) = \cup\{U_\alpha * V_\alpha : \alpha < w_1\}$ и так как $\{U_\alpha\}\alpha < w_1$, $\{V_\alpha\}\alpha < w_1$ — дизъюнктные семейства открытых множеств, то $f^{-1}(R\setminus\{o\})$ — не финально компактно и [4], следовательно, не бэровское подмножество в X*Y. Противоречие. Этим импликация 2) —> 4), а с ней и теорема, доказана.

Предложние 1.

Пусть X и Y тихоновские пространства. Тогда $\min\{c(X), c(Y)\} \leq tC_r(X*Y)$.

Доказательство.

Пусть $tC_r(X*Y) = \tau$. Предположим противное. Тогда $c(X) \geq \tau^+$, $c(Y) \geq \tau^+$. Зафиксируем дизъюнктные семейства непустых копуль множеств.

$\{U\alpha: \alpha < \tau^+\} \subset Exp(X)$, $\{V\alpha: \alpha < \tau^+\} \subset Exp(Y)$.

Пусть $x_\alpha \in U\alpha$, $y_\alpha \in V\alpha$, $\alpha < \tau^+$, произвольны. Для всякого $\alpha < \tau^+$ выберем непрерывные функции $f\alpha$: X —> R и $g\alpha$: Y —> R такие, что $f\alpha(X\setminus U\alpha) = g\alpha(Y\setminus V\alpha) = 0$ и $f\alpha(x_\alpha) = g\alpha(y_\alpha) = 1$. Для всякого конечного множества $K \subset \tau^+$ рассмотрим функцию f_k: X.Y —> R, определенную следующим образом

$$f_k(x,y)=\begin{cases}0,\text{если}(x,y)\in \cup\{U_\alpha * V_\alpha : \alpha<\tau^+\},\text{или}(x,y)\in U_{\alpha\in k}U_\alpha * V_\alpha\\ f_\alpha(x)*g_\alpha(y),\text{если } (x,y)\in U_\alpha * V_\alpha,\ \alpha\notin K\end{cases}$$

Проверим, что $f_k \in C_r(X.Y)$. Пусть $x_0 \in X$. Тогда $f_k \mid \{x_0\}*Y \equiv 0$, если $x_0 \notin U\{U\alpha: \alpha < \tau^+\}$ или $x_0 \in \bigcup\{U\alpha: \alpha\in K\}$. Пусть $x_0 \in U_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in K$. Если $y \in V_{\alpha_0}$, то $f_k(x_0,y) = f_{\alpha_0}(x_0) * g_{\alpha_0}(y)$. Если $y \notin V_{\alpha_0}$, то $(x_0,y) \notin \bigcup\{U\alpha.\ V\alpha: \alpha < \tau^+\}$ и, следовательно, $f_k(x_0,y) = 0$. Но если $y(V\alpha_0$, то $g_{\alpha_0}(y_) = 0$. Таким образом, $f_k(x_0,y) = f_{\alpha_0}(x_0) * g_{\alpha_0}(y)$ при всех $y \in Y$. Аналогично проверяется, что для всякого $y_0 \in Y$ непрерывно отображение $f_k \mid X*\{y_0\}$. Таким образом $f_k \in C_r(X*Y)$. Пусть $f_0 \in C_r(X*Y)$ и $f_0 \equiv 0$. Легко проверить, что $f_0 \in [\{f_k: k \subset \tau^+\}]_{Cr(X*Y)}$. Покажем, что $f_0 \notin [\{f_k: k\in A\}]_{Cr(X*Y)}$, где $|A| \leq \tau$. Действительно, в этом случае $|\bigcup\{K: K\in A\}| \leq \tau$. Поэтому найдется $\alpha_0 \in \tau^+ \setminus \bigcup\{K: K\in A\}$. Тогда $\alpha_0 \notin K$ для всех $K\in A$ и $f_k(x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0}) = f_{\alpha_0}(x_0) * g_{\alpha_0}(y) = 1$. То есть $f_0 \notin [\{f_k: k\in A\}]_{Cr(X*Y)}$. Приходим к противоречию. Предложение доказано.

Предложение 2.

Пусть X — тихоновское пространство. Тогда $l^*(X_{\aleph_0})(tC_r \leq X*X)$.

Доказательство.

Пусть $n \in N$ произвольно и Υ — открытое покрытие $X^n_{\aleph_0}$. Так как нуль множества образуют базу $X_{\aleph_0}$, то базу $X^n_{\aleph_0}$ образуют весвозможные множества вида $F_1 \cdot \ldots \cdot F_n$, где F_i — нуль множество X, $1 \le i \le n$. Таким образом считаем, что состоит из базисных окрестностей F_x, $x \in X^n$, где $x = (x_i)_{i=1}^n$, $F_x = F(x_1) * \ldots * F(x_n)$, где $F(x_i)$ — нуль множества X, содержащие точку x_i, $1 \le i \le n$. Обозначим через $\tilde{x}$ множество $\tilde{x} = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$, где $x = (x_i)_{i=1}^k \in X^k$, $k \in N$. Пусть $Z = (Z_i)_{i=1}^m \in X^m$, $m \in N$. Зафиксируем семейство нуль множеств $\Phi(Z_i)$, $1 \le i \le m$, точек Z_i, таким образом, что справедливо:

1). Если $\tilde{x} \subset \tilde{Z}$, то есть $x = (Z_{i_k})_{k=1}^n$, то $\Phi(Z_{i_k}) \subset F(Z_{i_k})$, $k = 1, \ldots, n$.

Для всякого нуль множества Φ в X зафиксируем непрерывную функцию $f\phi$: $X \to I$ такую, что $f\phi^{-1}(0) = \phi$. Определим $\varphi_\phi : X*X \to R$ так, что

$$\varphi_\phi(x,y) = \begin{cases} 0, \text{если } f^2\phi(x) + f^2\phi(y) = 0, \\ 2f_\phi(x)*f_\phi(y) / (f^2{}_\phi(x) + f^2{}_\phi(y)), \text{если } f^2{}_\phi(x) + f^2{}_\phi(y) \neq 0, \end{cases}$$

Заметим, что 2). $\varphi\phi(x,x) = 1$, если $(x,x) \in \Phi*\Phi$ и $\varphi\phi(x,x) = 0$, если $(x,x) \in \Phi*\Phi$. Нетрудно проверить, что $\varphi\phi \in C_r(X* X)$. Для $Z = (Z_i)_{i=1}^m \in X^m$, $m \in N$, положим $f_z = \varphi\phi_{(z_1)} \cdot \ldots \cdot \varphi\phi_{(z_m)}$. Тогда $f_z \in C_r(X*X)$ и из 2) следует, что $f_z(x,x) = 0$, если $x \in \bigcup\{\Phi(Z_i): 1 \le i \le m\}$ и $f_z(x,x) = 1$, если $x \in X \setminus \bigcup\{\Phi(Z_i): 1 \le i \le m\}$. Для всякого конечного множества $K \subset X*X$, $K \cap \Delta(X) = \varnothing$ зафиксируем непрерывную функцию g_k: $X*X \to R$ такую, что $g_k(K) = 0$ $g_k(\Delta(X)) = 1$. Как обычно пусть f_0: $X*X \to R$, $f_0 \equiv 0$. Положим $F = \{f_z \bullet g_k$: $z \in \bigcup_{m=1}^{\infty} X^m$, $K \subset X*X$, K — конечно и $K \cap \Delta(X) = \varnothing\}$. Легко проверить, что $f_0 \in [F]_{Cr(X*X)}$. Пусть $tCr(X*X) = \tau$. Тогда $f_0 \in [F']_{Cr(X*X)}$, где $F' \subset F$ и $|F'| \le \tau$. Положим $A = \{Z$: найдется $f_z \bullet g_k(F')\}$. Тогда $|A| \le \tau$. Положим $Y = \{y: y \in X^n, \tilde{y} \subset \tilde{Z}$ и $Z \in A\}$. Ясно, что $|Y| \le \tau$. Покажем,что $\{F_y: y \in Y\}$подпокрытие покрытия Υ. Пусть $x = (x_i)_{i=1}^n \in X^n$ — произвольна. Тогда $V = \{f: f(t,t) < 1, t \in \tilde{X}\}$ — окрестность f_0 и потому найдется $f_z * g_k \in F' \cap V$. Так как $f_z \circ g_k(t,t) = 1$, если $t \in X \setminus \bigcup\{\Phi(Z_i): 1 \le i \le m\}$, то $\tilde{x} \subset \bigcup\{\Phi(Z_i): 1 \le i \le m\}$ то есть $x_k \in \bigcup\{\Phi \in Z_{i_k}\})$, $1 \le k \le n$. Тогда $x \in \Pi\{\Phi(Z_{i_k})\}$: $1 \le k \le n\} \subset \Pi\{F(Z_{i_k})$: $1 \le k \le n\}$ в силу 1). Но $\Pi\{F(Z_{i_k}): 1 \le k \le n\} = F_y$, где $y \in Y$, так как $\tilde{y} \subset \tilde{Z}$. Предложение доказано.

Следствие.

Пусть X бикомпакт, $c(X) \le \aleph_0$. Тогда $tCr(X. X) = l^*(X_{\aleph_0})$.

Предложение 3.

Пусть X и Y тихоновские пространства, такие, что $l^*(Y) \leq \aleph_0$, $l^*(X_{\aleph_0}) \leq \aleph_0$ и Y сепарабельно. Тогда $tCr(X.Y) \leq \aleph_0$.

Доказательство.

Пусть $f \in Cr(X*Y) = Cp(X, Cp(Y))$. Тогда $l^*(f(x))_{\aleph_0} \leq \aleph_0$. Так как Y себерабельно, то [3] $\psi(Cp(Y)) \leq \aleph_0$. Тогда $(f(x) \leq \aleph_0$ — дискретное пространство и так как оно финально компактно, то f(X) счетно. Тогда для всякого $x \in X$, $f^{-1}f(x)$ — $G\delta$ — множество в X. Это означает, что найдется $G\delta$ — множество T(x), такое, что $f \mid T*Y$ не зависит от первой координаты и, следовательно, $f(Cp(X_{\aleph_0} *Y)$. Таким образом $Cr(X*Y)(Cp(X_{\aleph_0} *Y)$. Но $X_{\aleph_0}$ — финально компактное P — пространство, следовательно, $l^*(X_{\aleph_0} *Y) \leq \aleph_0$. Тогда $tCp(X_{\aleph_0} *Y) \leq \aleph_0$ [3] и, следовательно, $tCr(X*Y) \leq \aleph_0$. Предложение доказано.

Пример.

Существуют тихоновские пространства X и Y, такие, что

$$l^*(X_{\aleph_0}) \leq \aleph_0,\ l^*(Y) \leq \aleph_0,\ c(Y) \leq \aleph_0,\ \text{а}\ tCr(X*Y) \geq \aleph_1.$$

Обозначим через X — александровскую компактификацию несчетного дискретного пространства. Так как X разрежен, то [3] $l^*(X_{\aleph_0}) \leq \aleph_0$. Положим $Y = Cp(X)$. Так как X бикомпакт Эберлейна, то $l^*(Y) \leq \aleph_0$, а неравенство $c(Cp(X)) \leq \aleph_0$ спрведливо для всех тихоновских X. Докажем, что $tCr(X* X) \geq \aleph_1$. Так как $Cr(X*Y) = Cr(Cp(X), X) = Cp(Cp(X), Cp(X))$, то неравенство будет следовать из утверждения.

1) Пусть L — локально выпуклое монолитное пространство и $nw(L) \geq \aleph_1$. Тогда $tCp(L, L) \geq \aleph_1$.

Заметим, что $nwCp(X) = nw(X) = |X| \geq \aleph_1$ и так как X бикомпакт, то Cp(X) — монолитно [3]. Пусть f_0: L —> L тождественное отображение. Для всякого конечного множества $K \subset L$, линейная оболочка Lin(K) гомеоморфна пространству R^n для некоторого $n \in N$. Пространство L — тихоновское [3], следовательно, найдется непрерывное отображение f_k: L —> Lin(K) такое, что $f_k(x) = x$ для всех $x \in K$. Положим $F = \{f_k: k \subset L$ и K конечно$\}$. Ясно, что $f \subset \overline{F}$. Пусть $F' \subset F$ — счетное подмножество. Тогда $T = \bigcup\{K: f_k \in F'\} \subset L$ — счетно, а следовательно, Lin(T) — сепарабельна и так как L монолитно, то $nw(\overline{Lin(T)}) \leq \aleph_0$. Открытое множество $V = L \setminus \overline{Lin(T)} \neq \varnothing$. Пусть $x \in V$. Окрестность $V(f_0) = W(f, x, V)$ не пересекается с F', так как $f_k(L) \subset \overline{Lin(T)}$, для всех $f_k \in F'$. Следовательно, $tC_p(L, L) \geq \aleph_1$. Этим все доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология (перевод с английского). М.: Мир, 1986. 580с.
3. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Мир, 1986. 223 с.
4. Rogers, J. E. Jane and others: Analytie sets (Academie Press, 1980). 9 с.
5. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Издательство МГУ, 1988. 251 с.