М. В. СЕМУХИН

УДК 519.61

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЧЕТКИХ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АННОТАЦИЯ. Многие расчетные задачи в условиях неопределенности приводят к необходимости решения уравнений с нечеткими и интервальными коэффициентами. В настоящей статье исследуется вопрос о разрешимости подобных уравнений и рассматриваются конструктивные методы их решения.

Many calculating problems conditioned by indeterminacy make equations necessary to be solved with fuzzy and interval coefficients. The present article deals with the problem of solvability of similar equations and considers the constructive methods of their solution.

Проблемам принятия решений в сложных условиях уделяется в настоящее время большое внимание. Математические методы стали широко применяться для описания и анализа сложных экономических, социальных и других систем. Теория оптимизации создала совокупность методов, помогающих при использовании ЭВМ эффективно принимать решения при известных и фиксированных параметрах. Определенные успехи имеются и в том случае, когда параметры — случайные величины с известными законами распределения.

Однако основные трудности возникают тогда, когда параметры обстановки оказываются неопределенными (хотя, может быть, и не случайными) и когда они в то же время сильно влияют на результаты решения. Такого рода ситуации могут возникать как вследствие недостаточной изученности объектов, так и из-за участия в управлении человека или группы лиц. Неопределенность в этих случаях можно адекватно представлять с помощью теории нечетких множеств [1].

Нечеткое подмножество **A** множества **X** характеризуется функцией принадлежности $\mu_A : X \to [0,1]$, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ число $\mu_A(x)$ из интервала [0, 1], характеризующее степень принадлежности элемента **x** подмножеству **A**. Причем 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента к определенному подмножеству.

Многие расчетные и оптимизационные задачи в нечетких условиях приводят к необходимости решения уравнений с нечеткими коэффициентами и переменными. Трудности решения подобных уравнений обуславливаются тем, что для нечетких величин, например,

$$\tilde{A}-\tilde{A}\neq 0,\ \tilde{A}/\tilde{A}\neq 1,\ \tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})\subseteq \tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}.$$

Это не позволяет упрощать нечеткие уравнения путем их эквивалентных преобразований. Одним из возможных путей решения этой проблемы является следующий.

Если $r\in[0,1]$, то ***r-уровневым множеством*** нечеткого множества **A** называется множество $\sigma_r(A)=\{x\in X|\mu_A(x)>r\}$. В силу известного соотношения [3]

$$\sigma_r(\tilde{A}\circ\tilde{B})=\sigma_r(\tilde{A})\circ\sigma_r(\tilde{B}),$$

где $\circ\in\{+,-,\cdot,/\}$, все определения вводятся для интервалов вещественной оси, т.е. для пространства **I(R)** с интервальными операциями.

Если интервал $\bar{a}=(a_1,a_2)\in I(R)$, то ***сопряженным интервалом*** по отношению к $\bar{a}$ называют ***мнимый интервал*** $\bar{a}^*=(a_1^*,a_2^*)=(a_2,a_1)$.

Множество мнимых интервалов обозначим через $I^*(R)$. Для перехода $\bar{a}\to\bar{a}^*$ к сопряженному интервалу справедливы следующие соотношения:

$$(\bar{a}^*)^*=\bar{a};\ (\bar{a}+\bar{b})^*=\bar{a}^*+\bar{b}^*;\ (\lambda\bar{a})^*=\lambda\bar{a}^*,\ \lambda\in R;$$

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})^*=\bar{a}^*\cdot\bar{b}^*=\bar{b}^*\cdot\bar{a}^*,\ 0\notin\bar{a},\ 0\notin\bar{b}.$$

Алгебраические операции над сопряженными интервалами вводятся следующим образом.

Если $\bar{a},\bar{b}\in I(R)$, $\bar{a}=(a_1,a_2)$, $\bar{b}=(b_1,b_2)$ то, как известно[2]:

$$\bar{a}\circ\bar{b}=(a_i\circ b_j,a_k\circ b_l)=(\min\{U\},\max\{U\}),$$

$$U=(a_1\circ b_1,a_1\circ b_2,a_2\circ b_1,a_2\circ b_2),\ i,j,k,l=1,2.$$

Тогда для сопряженных интервалов $\bar{a}^*=(a_1^*,a_2^*)=(a_2,a_1)$, $\bar{b}^*=(b_1^*,b_2^*)=(b_2,b_1)$ вводятся следующие соотношения:

$$\bar{a}^*\circ\bar{b}^*=(a_i^*\circ b_j^*,a_k^*\circ b_l^*),$$

$$\bar{a}^*\circ\bar{b}=(a_i^*\circ b_j,a_k^*\circ b_l),$$

$$\bar{a}\circ\bar{b}^*=(a_i\circ b_j^*,a_k\circ b_l^*)$$

Например, если $\bar{a}\circ\bar{b}=(a_1\circ b_1,a_1\circ b_2)$, то $\bar{a}^*\circ\bar{b}^*=(a_1^*\circ b_1^*,a_1^*\circ b_2^*)=$ $=(a_2\circ b_2,a_2\circ b_1)$.

Следовательно, $\bar{a}-\bar{a}^*=\bar{a}^*-\bar{a}=(0,0)=0$, и

$$\bar{a}/\bar{a}^*=\bar{a}^*/\bar{a}=(1,1)=1,\ 0\notin\bar{a}.$$

С использованием введенных понятий решение уравнения

$$\bar{x} + \bar{a} = \bar{b}$$

записывается в виде

$$\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}^{*}.$$

Для уравнения

$$\bar{x} \cdot \bar{a} = \bar{b}$$

получаем $\bar{x} = \bar{b} / \bar{a}^{*}, 0 \notin \bar{a}$.

Решениями таких уравнений могут быть и мнимые интервальные величины. В общем случае решение линейного уравнения

$$\bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{b} = \bar{c}$$

имеет вид $\bar{x} = (\bar{c} - \bar{b}^{*}) / \bar{a}^{*}$.

Можно также показать, что если

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$

то при замене нескольких или всех $\bar{x}_i$ н а $\bar{x}_i^{*}$ полученный результат $\bar{z} \subseteq \bar{y}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений с интервальными коэффициентами:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \bar{x}_j = \bar{b}_i, \; i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Для решения данной системы уравнений можно использовать, например, следующий итерационный алгоритм.

1. Выбирается расширенный вектор $\bar{x}^s \supseteq \bar{x}$, который можно представить в виде

$$\bar{x}_j^s = (x_{j1} - \delta x_{j1}^s, x_{j2} + \delta x_{j2}^s), \; i = \overline{1,n} \tag{2}$$

2. Вычисляется расширенный вектор свободных членов

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \bar{x}_j^s = (b_{i1} - \delta b_{i1}^s, b_{i2} + \delta b_{i2}^s), \; i = \overline{1,n} \tag{3}$$

3. Исключая $\bar{x}_j, \bar{b}_i$ из (3), получаем систему обыкновенных линейных уравнений относительно приращений $\delta x_{j1}^s, \delta x_{j2}^s$, которая решается одним из известных способов (например, методом исключения).

4. Определяется уточненный вектор $\bar{x}^{(s+1)}$

$$\bar{x}_j^{(s+1)} = (x_{j1}^s + \delta x_{j1}^s, x_{j2}^s - \delta x_{j2}^s), \; i = \overline{1,n} \quad 4)$$

5. Снова вычисляется расширенный вектор свободных членов

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \bar{x}_j^{(s+1)} = (b_{i1} - \delta b_{i1}^{(s+1)}, b_{i2} + \delta b_{i2}^{(s+1)}), \; i = \overline{1,n} \tag{5}$$

6. Проверяется критерий окончания счета

$$\max \left| \delta b_{ik}^{(s+1)} \right| \le \xi, \; k = 1,2 \tag{6}$$

где ξ - заданная точность.

7. Если условие (6) выполняется, то расчет заканчивается, иначе переходят к этапу 3.

Для решения системы нелинейных уравнений может использоваться также итерационный метод с линеаризацией уравнений на каждом шаге итерации по одному из известных способов (например, методом Ньютона).

1. Вначале систему нелинейных уравнений с помощью введенных операций над сопряженными интервалами приводят к виду

$$\begin{cases} f_1^*(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)=0 \\ f_2^*(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n^*(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)=0 \end{cases} \tag{7}$$

2. Затем на каждом шаге итерации s решается система линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1^s}{\partial x_1}(\bar{x}_1^{(s+1)}-\bar{x}_1^{*s})+\ldots+\dfrac{\partial f_1^s}{\partial x_n}(\bar{x}_n^{(s+1)}-\bar{x}_n^{*s})=-f_1^{*s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n^s}{\partial x_1}(\bar{x}_1^{(s+1)}-\bar{x}_1^{*s})+\ldots+\dfrac{\partial f_n^s}{\partial x_n}(\bar{x}_n^{(s+1)}-\bar{x}_n^{*s})=-f_n^{*s} \end{cases} \tag{8}$$

3. Проверяется критерий окончаниния счета

$$\max\left|\delta x_{ik}^{(s+1)}\right| \le \xi,\ k=1,2 \tag{9}$$

где ξ - заданная точность.

4. Если условие (9) выполняется, то расчет заканчивается, иначе переходят к этапу 2.

Для систем уравнений с нечеткими коэффициентами производится дискретизации исходных функций принадлежности по r-уровням и решаются соответствующие системы уравнений с интервальными коэффициентами.

Различие между нечеткостью и случайностью приводит к тому, что математические методы нечетких множеств совершенно не похожи на методы теории вероятностей. Они во многих отношениях проще вследствие того, что понятию вероятностной меры в теории вероятностей соответствует более простое понятие функции принадлежности в теории нечетких множеств. По этой причине даже в тех случаях, когда неопределенность в процессе принятия решений может быть представлена вероятностной моделью, обычно удобнее оперировать с ней методами теории нечетких множеств без привлечения аппарата теории вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.

2. Калмыков С. А., Шокин Ю.И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.

3. Кучин Б. Л., Алтунин А. Е. Управление системой газоснабжения в осложненных условиях эксплуатации. М.: Недра, 1984. 209 с.