В. Н. КУТРУНОВ,
Ю. Н. ШАГИСУЛТАНОВА

УДК 517. 958

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрены вопросы тестирования алгоритмов решения интегральных уравнений, основанные на сопоставлении численной и теоретической информации о спектре.

In a paper the problems of testing of algorithms of solution of integral equations based on comparison of the numerical and theoretical information on a spectrum are considered.

При решении задач математической физики применяется метод интегральных уравнений, тесно связанный с теорией потенциала. Учитывая сложность математической модели для областей достаточно сложной конфигурации, расчет проводится численно. Для тестирования программы применяются конкретные простейшие задачи, что не всегда позволяет оценить достоверность решения при переходе к более сложным задачам. В качестве тестов мы предлагаем оценивать ряд спектральных свойств интегральных операторов, которые выполняются для областей произвольной сложности.

Пусть S — контур некоторой плоской области. Интегральные операторы теории упругости [1] содержат, в частности, следующие операторы:

$$A(\overline{U}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \frac{\overline{n_x \bullet \overline{r}}}{r^2}\ \overline{U(x)}\ dS_x\ ,$$

$$B(\overline{U}) = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{\overline{n_x}\bullet\overline{r}}{r^2}\,\frac{\overline{r}\,\overline{r}}{r^2}\bullet\overline{U(x)}\;dS_x\;,$$

где точкой обозначено скалярное произведение; два вектора, поставленные рядом без знака, означают диадное произведение; $\overline{r} = \overline{r_x} - \overline{r_y}$ радиус-векторы точек x, y∈S; $\overline{n_x}$ — нормаль в точке x; $\overline{U}$ — плотность потенциалов.

Известно, что у оператора **A**, потенциала двойного слоя, спектр лежит на интервале [-1; 1] действительной оси, дискретен, может сгущаться к точке ноль; спектр оператора **B** не исследовался. Изучим, теоретически и численно, спектры операторов **A** и **B** в простейшем случае, когда **S** является окружностью диаметра **d**.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1: спектр оператора **A** состоит из двух точек: $\lambda = 1$ единичной кратности и $\lambda = 0$ бесконечной кратности. Других точек спектра нет.

Теорема 2: спектр оператора **B** состоит из трех точек: $\lambda = -0{,}5$ единичной кратности; $\lambda = 0$ бесконечной кратности и $\lambda = 0{,}5$ кратности два.

Докажем теорему 1.

Как известно, собственные числа λ должны удовлетворять равенству:

$$\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\overline{n_x}\bullet\overline{r}}{r^2}\;\overline{U(x)}\;dS_x = \lambda\;\overline{U(y)}$$

Легко показать, что для окружности **S** имеет место соотношение $\overline{n_x}\bullet\overline{r}/r^2 = 1/d$, где **d**-диаметр окружности, следовательно:

$$\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\overline{n_x}\bullet\overline{r}}{r^2}\;\overline{U(x)}\;dS_x = \frac{1}{\pi\,d}\int_S \overline{U(x)}\;dS_x = \lambda\;\overline{U(y)}$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда отсюда следует, что $\overline{U} = \overline{C} = \mathrm{const}$ и подстановка $\overline{U} = \overline{C}$ в равенство приводит к определению λ. Действительно, учитывая, что $\int_S dS = \pi\,d$, из равенства $\frac{1}{\pi\,d}\int_S \overline{C}\;dS_x = \lambda\;\overline{C}$ следует $\lambda = 1$.

Определилось собственное число $\lambda = 1$ кратность которого равна 1. Очевидно, что оно единственно.

Пусть теперь $\lambda = 0$, тогда $\frac{1}{\pi\,d}\int_S \overline{U(x)}\;dS_x = 0$, следовательно, числу $\lambda = 0$ соответствуют собственные функции, удовлетворяющие условию:

$$\int_S \overline{U(x)}\;dS_x = 0 \qquad (1)$$

Очевидно, что таких функций бесконечно много, например, функции периодические на контуре S. Поэтому кратность числа λ бесконечна.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся тождеством $\overline{n_x}\bullet\overline{r}/r^2 = 1/d$. Тогда нахождение спектра оператора **B** сводится к исследованию равенства:

$$\frac{1}{\pi\,d}\int_S \frac{\overline{r}\,\overline{r}}{r^2}\bullet\overline{U(x)}\;d\,S_x = \lambda\;\overline{U(y)} \qquad (2)$$

В данном случае ядро интегрального оператора **B** непрерывно и симметрично, следовательно [2], спектр действителен, дискретен, кратность каждого собственного числа конечна, а число $\lambda = 0$ может быть точкой сгущения, которое должно быть исследовано отдельно.

Исследуем спектральное равенство (2). Заметим, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\bar{r}\,\bar{r}}{r^2}\, dS_y = R\,\hat{E}$, где **R**-радиус окружности, $\hat{E}$ -единичная матрица. Интегрируя выражение (2) по переменной y при условии: $\int\limits_S \overline{U(y)}\, dS_y \neq 0$, и, используя замечание, получим единственное значение $\lambda = 0{,}5$.

В то же время, если выполняется условие (1), то из проинтегрированного равенства (2) следует, что λ не может быть определено.

Пусть выполнено условие (1).

Введем единичный вектор $\bar{k} \perp S$ и запишем два тождества:

$$\left| \bar{k} \times \bar{r} \right|^2 = r^2 \tag{3}$$

$$\frac{\bar{r}\,\bar{r}}{r^2} + \frac{(\bar{k} \times \bar{r})(\bar{k} \times \bar{r})}{\left| \bar{k} \times \bar{r} \right|^2} = \hat{E} \tag{4}$$

Из равенства (2) с учетом (1), (3), (4) следует:

$$\frac{1}{\pi\, d}\int\limits_S \left[\frac{(\bar{k} \times \bar{r})(\bar{k} \times \bar{r})}{\left| \bar{r} \right|^2} \right] \bullet \overline{U(x)}\, dS_x = \lambda\, \overline{U(y)}.$$

Умножая последнее на $\bar{k}$ векторно и выполняя элементарные операции, получим:

$$\frac{1}{\pi\, d}\int\limits_S \frac{\bar{r}\,\bar{r} \bullet (\bar{k} \times \overline{U(x)})}{r^2}\, dS_x = -\lambda\, \bar{k} \times \overline{U(y)}. \tag{5}$$

Из (2) и (5) можно сделать следующий вывод:

если, при условии (1), λ и $\bar{U}$ собственное число и соответствующий собственный вектор оператора **B**, то $(-\lambda)$ и $\bar{k} \times \bar{U}$ собственное число и собственный вектор того же оператора. Следовательно, спектр оператора **B** симметричен.

Пусть $\lambda = -0{,}5$ — собственное число, тогда из предыдущего следует, что для соответствующей собственной функции выполняется условие (1) и тогда $\bar{k} \times \bar{U}$ есть собственная функция для числа $\lambda = 0{,}5$.

Чтобы доказать, что $\lambda = -0{,}5$ действительно собственное число, спроектируем выражение (2) на $\bar{n}_y$, затем выполним замену $\bar{r} = \bar{r}_x - \bar{r}_y$:

$$-\frac{1}{\pi\, d^2}\int\limits_S \bar{r}_x \bullet \overline{U(x)}\, dS_x = \lambda\, \bar{n}_y \bullet \overline{U(y)}. \tag{6}$$

Здесь использованы условие (1) и, легко доказуемые, равенства

$$\overline{n_y} \bullet \bar{r} / r^2 = -1/d, \ \overline{r_x}/R = \overline{n_x}.$$

Т. к. левая часть равенства (6) постоянная величина, то величина $\lambda \ \overline{n_y} \bullet \overline{U(y)}$ константа и ее можно вновь подставить в выражение (6). Из выкладок будет следовать, что $\lambda = -0{,}5$ собственное число, а соответствующий собственный вектор имеет постоянную проекцию на нормаль.

Для нахождения соответствующего собственного вектора изучим проекцию векторного равенства (2) на касательное направление $\overline{\tau_y}$, где $\overline{\tau_y} = \overline{n_y} \times \bar{k}$. Учитывая, что при условии (1) равенства (2) и (5) эквивалентны, последнее умножим скалярно на $\overline{n_y}$. В результате несложных преобразований получим:

$$\frac{1}{4 \pi R} \int_S (\overline{n_x} \times \bar{k}) \bullet \overline{U(x)} \ d\, S_x = \lambda \ \overline{\tau_y} \bullet \overline{U(y)}.$$

Следовательно, $\overline{\tau_y} \bullet \overline{U(y)} = \text{const}$. Подстановка этой константы в предыдущее равенство приводит к определению собственного числа $\lambda = 0{,}5$.

Т. к. проекции $\bar{U} \bullet \bar{n}$ и $\bar{U} \bullet \bar{\tau}$ постоянны, но имеют место при разных λ, то не существует одного вектора $\bar{U}$, имеющего эти две отличные от нуля проекции одновременно. Из сказанного вытекают два утверждения: пусть $\lambda = -0{,}5$, тогда $\bar{U} \bullet \bar{n} \neq 0$ и $\bar{U} \bullet \bar{\tau} = 0$, что равносильно существованию единственного собственного вектора вида: $\overline{U(x)} = C \ \overline{n\ (x)}$; аналогично, пусть $\lambda = 0{,}5$, тогда $\overline{U(x)} = C \ \overline{\tau\ (x)}$. Напомним, что эти утверждения выполняются при условии (1). Можно непосредственно подстановкой в (2) убедиться, что найденные вектора являются собственными. Заметим еще, что для $\lambda = 0{,}5$ существует еще один собственный вектор $\overline{U(x)} = \bar{C}$, когда условие (1) не выполнено.

Таким образом, найдены всего две точки спектра $\lambda \neq 0$: точка $\lambda = 0{,}5$ кратности 2 и точка $\lambda = -0{,}5$ единичной кратности. Осталось исследовать случай $\lambda = 0$ при условии (1).

Для этого спроектируем равенство (2) на нормаль $\overline{n_y}$. После преобразований, подобных предыдущим, получим:

$$\int_S \overline{r_x} \bullet \overline{U(x)} \ d\, S_x - \overline{r_y} \bullet \int_S \overline{U(x)} \ d\, S_x = 0.$$

Следовательно, с учетом равенства (1) вектор $\overline{U(x)}$ должен удовлетворять еще условию $\int_S \overline{r_x} \bullet \overline{U(x)} \ d\, S_x = 0$.

Из тождества (5) аналогичными преобразованиями имеем:

$$-\int_S (\overline{r_x} \times \overline{U})\, dS \bullet \overline{k} - (\overline{r_y} \times \overline{k}) \bullet \int_S \overline{U}\, dS = 0,$$

следовательно, $\int_S (\overline{r_x} \times \overline{U})\, dS \bullet \overline{k} = 0$, а т. к. $\int_S \overline{r}_x \times \overline{U(x)}\, d\, S_x$ — вектор параллельный $\overline{k}$, то равенство возможно, если

$$\int_S \overline{r}_x \times \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0.$$

Итак, для собственной функции $\overline{U}$, соответствующей $\lambda = 0$, получена следующая группа условий:

$$\int_S \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0,\ \int_S \overline{r}_x \bullet \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0,\ \int_S \overline{r}_x \times \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0. \quad (7)$$

Покажем, что этих условий достаточно для выполнения спектрального равенства.

$$\int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \bullet \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0. \quad (8)$$

Действительно, из первых двух условий (7) можно сформировать выражение:

$\int_S \overline{r} \bullet \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0$, а из первого и третьего $\int_S \overline{r} \times \overline{U(x)}\, d\, S_x = 0$.

Оба равенства можно умножить на константу $\overline{n_y} \bullet \overline{r} / r^2$ и вынести $\overline{n}_y$ за знак интеграла

$$\begin{cases} \overline{n}_y \bullet \int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \bullet \overline{U(x)}\, dS_x = 0, \\ \overline{n}_y \bullet \int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \times \overline{U(x)}\, dS_x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Используя тождество (4), преобразуем последнее равенство (9).

$$\overline{n_y} \bullet \int_{S_x} \left[\hat{E} - \frac{(\overline{k} \times \overline{r})\,(\overline{k} \times \overline{r})}{r^2} \right] \times \overline{U(x)}\, d\, S_x =$$

$$= (\overline{n_y} \times \overline{k}) \bullet \int_S \overline{r}\, \frac{\overline{r}\,(\overline{k} \bullet \overline{U(x)}) - \overline{k}\,(\overline{r} \bullet \overline{q(x)})}{r^2}\, dS =$$

$$= \overline{\tau}_y \bullet \int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \bullet \overline{U(x)}\, dS\ \overline{k} = 0.$$

Отсюда следует:

$$\overline{\tau_y} \bullet \int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \bullet \overline{U(x)}\ d\ S_x = 0. \qquad (10)$$

Вектор $\int_S \frac{\overline{r}\ \overline{r}}{r^2} \bullet \overline{U(x)}\ d\ S_x$ спроектирован дважды: на $\overline{\tau_y}$ (равенство (10)) и на $\overline{n_y}$ (первое тождество (9)) и обе проекции равны нулю, следовательно, равен нулю сам вектор, т. е. выполнено спектральное равенство (8). Таким образом, все функции удовлетворяющие условиям (7), являются собственными функциями оператора **B**, соответствующими собственному числу $\lambda = 0$. Очевидно, что условиям (7) удовлетворяет бесконечно много функций, т. е. $\lambda = 0$ точка бесконечной кратности.

Полученные теоретические результаты подтверждены численно. Эти вычисления представляют и самостоятельный интерес, т. к. отражают этапы подборки дискретизации и тестирования, присущие для задач с областями сложной конфигурации.

Изобразим графически точки спектров для окружности радиуса **R=4**. Она разбивается на **n** частей и каждый ее кусок заменяется прямолинейным отрезком. При вычислении интегралов функция $\overline{U(x)}$ на каждом прямолинейном отрезке заменялась на неизвестную константу, таким образом, задача об исследовании спектра интегрального оператора сводилась к исследованию спектра алгебраической матрицы размерности **2n**.

Далее следуют рис. 1 и 2, представляющие численное исследование спектра оператора **A** при разбиении контура на 10 и 60 частей, соответственно. Рис. 3, 4 и 5 иллюстрируют спектр оператора **B** при разбиении на 10, 20 и 60 интервалов, соответственно.

Рис. 1

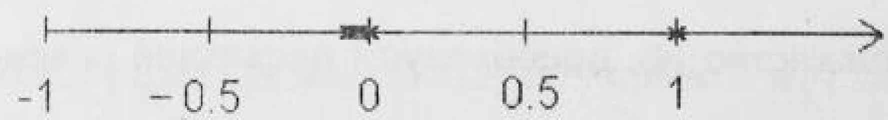

Рис. 2

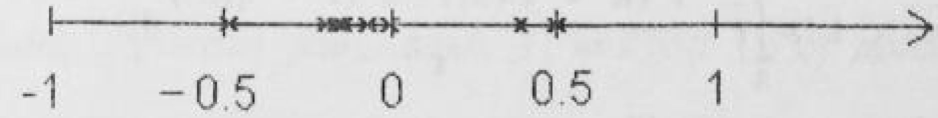

Рис. 3

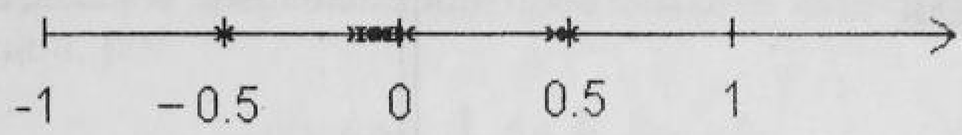

Рис. 4

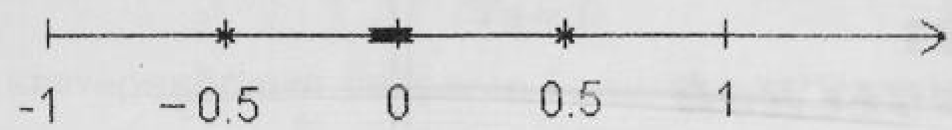

Рис. 5

Из рис. 1 видно, что недостаточное разбиение приводит к грубой ошибке. Точка $\lambda = 0$ (бесконечной кратности) практически не определяется, спектр распределен вдоль действительной оси; вторая точка $\lambda = 1$ определена верно. При достаточно большом разбиении (рис. 2) обе точки видны четко.

Рассмотрим рис. 3, 4 и 5. Из графиков видно, что, как и в предыдущем случае, недостаточность разбиения сильно искажает истинную картину, а именно, точка $\lambda = 0{,}5$ двойной кратности представлена двумя различными точками, точка бесконечной кратности $\lambda = 0$, как бы "размазана" вдоль оси. Точка $\lambda = -0{,}5$ находится на месте практически сразу. Увеличение разбиения приводит к "концентрации" точки бесконечной кратности и слиянию двух точек, соответствующих $\lambda = 0{,}5$.

Заметим, что слишком мелкое разбиение приводит к накапливанию арифметической ошибки, которая также искажает действительный спектр и приводит к появлению малой мнимой составляющей у точек спектра.

ВЫВОД:

И численные и теоретические результаты интересны не только как взаимная проверка, но и как два независимых исследования.

Представляет интерес уход от круговой формы, например, к эллиптической или прямоугольной. Главные особенности спектра, а именно: характерные точки $0, \pm 1$ сохраняются и появляется дополнительное конечное число точек спектра на интервале $[-1, 1]$, они как бы "расползаются из нуля", чем больше отличие области от круга, тем более заполняется интервал $[-1, 1]$. Все последние утверждения проверены численно для областей типа вытянутых эллипсов и прямоугольников.

Установлено также, что как только основная часть спектра стабилизируется (остается неподвижной), дальнейшее измельчение контура не целесообразно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.

2. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1981. 381 с.