В. Н. КУТРУНОВ,
З. С. КУРЯТА

УДК 517. 944

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

АННОТАЦИЯ. На основе тождеств Грина построены три группы интегральных соотношений, верных для функций, заданных на границе области. Тождества пригодны для исследования интегральных операторов, возникающих при построении интегральных уравнений, аналогичных полученным на основе теории потенциала для уравнения Лапласа.

Taking as a basis identities type of Green were consnructed three groups of integral formulas. They are right for arbitrrary functions given on the border final domain. Formulas are suitable for investigation of integral operators arisen according to the creation of the theories analogical with the theory of integral equations of the potential theory.

Для получения тождеств используются: интегральное представление произвольной гармонической функции [1], интегральное представление произвольной кватернионной аналитической функции [2], интегральное представление произвольного решения дифференциальных уравнений Ляме в теории упругости [3]. С помощью этих тождеств в статье исследуются спектральные свойства соответствующих операторов. Методика построения тождеств может быть применена к другим дифференциальным операторам и этим расширяется область ее применимости.

Выпишем все исходные интегральные тождества.

а). *Интегральное представление гармонической функции* $\mathbf{q}(\mathbf{y})$, [1]. Введем обозначения $x \in S$, $q(y) \in C^2(\overline{D^+})$, $|r| = |x-y|$, $y \in R^3$, n_x, n_y – внешние нормали к поверхности S в точках $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, D^+ — конечная область с кусочно-гладкой границей S, $\delta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin D^+ \\ 1, & y \in D+ \end{cases}$

$$\delta(y)q(y) = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(-q(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|} + \frac{1}{|r|}\frac{\partial q}{\partial n_x} \right) d_x S, \quad y \in R^3/S \tag{1}$$

б). *Интегральное представление произвольной кватернионной аналитической функции*, [2].

$$\delta(y)q(y) = \frac{1}{4\pi}\int_S \nabla \frac{1}{|r|} n_x q(x) d_x S \tag{2}$$

Это представление записано для функций, удовлетворяющих в области D^+ кватернионному равенству

$$\nabla q = 0 \tag{3}$$

где ∇ — кватернионный оператор Гамильтона, $\nabla = e_i \partial / \partial x_i$, e_1, e_2, e_3 — мнимые единицы кватерниона, q — кватернион, $q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 = q_0 + q'$, q_0 — действительная, а $q' = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ – мнимая части кватерниона.

В равенствах (2) и (3) умножение выполняется в соответствии с правилами умножения кватернионов. Если интерпретировать мнимые единицы e_1, e_2, e_3, как орты декартового базиса, то произведение кватернионов может быть представлено через скалярное и векторное умножение векторов. Пусть $q = q_0 + q'$, $p = p_0 + p'$, тогда

$$qp = q_0 p_0 + q_0 p' + p_0 q' + q' \times p' - q' \bullet p' \tag{4}$$

где $(\bullet), (\times)$ – скалярное и векторное умножения векторов.

в). Интегральное представление решений уравнений теории упругости, [3].

$$\delta(y)q(y) = \int_S f(x) \bullet U(x,y) d_x S - \int_S q(x) \bullet \Phi(x,y) d_x S \tag{5}$$

где $f(x)$ — граничные значения вектора напряжения, а $q(x)$ —граничные значения вектора перемещения точек упругого тела, занимающего область D^+, $U(x, y)$ — тензор Кельвина-Сомильяна, а $\Phi(x, y)$ — силовой тензор влияния, причем

$$U(x,y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|r|}\left[(3-4\nu)I + \frac{rr}{|r|^2}\right];$$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)|r|^3}\left[(1-2\nu)(nr - rn - n \bullet rI) - 3\frac{n \bullet r}{|r|^2} rr\right],$$

где x, y — радиус-векторы точек пространства, $r = x - y, nr, rn, rr$ диадные произведения векторов, I — единичный тензор, ν – коэффициент Пуассона, μ – постоянная Ламе. Вектор напряжения f — вычисляется по вектору перемещения q с помощью дифференциального оператора напряжений T_n, [4]:

$$T_n q(x) = 2\mu\frac{\partial q}{\partial n} + \lambda n(\nabla \bullet q) + \mu(n \times (\nabla \times q)) = f(x), \tag{6}$$

здесь $\lambda = 2\mu\nu / (1 - 2\nu)$, n – нормаль в точке площадки, на которой вычисляется вектор напряжения.

Для равноправия вхождения производных в левые и правые части в равенстве (1) следует вычислить нормальную производную, получится система двух равенств, выражающая саму функцию и ее нормальную производную в области через их граничные значения. Равенство (2) не дополняется, а к равенству (5) следует добавить это же равенство после применения к нему дифференциального оператора напряжения. Дополнительные уравнения имеют вид:

$$\delta(y)\frac{\partial q(y)}{\partial n_y} = \frac{\partial}{\partial n_y}\left[-\frac{1}{4\pi}\int_S q(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}d_xS\right] + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|r|}\right)\frac{\partial q}{\partial n_x}d_xS \tag{7}$$

$$\delta(y)T_{n_y}q = \int_S T_{n_y}U(x,y)\bullet f(x)d_xS - T_{n_y}\int_S q(x)\bullet\Phi(x,y)d_xS \tag{8}$$

В исходных представлениях (1), (2), (5) и дополнительных равенствах (7) и (8) следует перейти к пределу на границу области. Существенную роль в таких предельных переходах играют интегралы типа Гаусса. В теории потенциала такой интеграл имеет вид

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}d_xS = \begin{cases} -4\pi, & y \in D^+ \\ -2\pi, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases} \tag{9}$$

Причем в случае Y∈S это равенство имеет место для ляпуновской поверхности. Для кватернионных аналитических функций применяется аналог интеграла Гаусса:

$$\int_S \nabla\frac{1}{|r|}n_xd_xS = \begin{cases} 4\pi, & y \in D^+ \\ 2\pi, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases} \tag{10}$$

Здесь n_x —мнимый кватернион, ∇ — кватернионный оператор Гамильтона и умножение под интегралом выполняется по правилу (4). В теории упругости также имеет место аналог интеграла Гаусса

$$\int_S \Phi(x,y)d_xS = \begin{cases} -I, & y \in D^+ \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S \\ 0, & y \in D^- \end{cases} \tag{11}$$

Интегралы (10) и (11) в случае Y∈S сингулярны, понимаются в смысле главного значения по Коши и верны для ляпуновских поверхностей. Классические выкладки, связанные с предельным переходом известны, запишем конечный результат во всех трех случаях.

а). Для гармонической функции имеем два предельных равенства, [1]:

$$q^+(z) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{1}{|r|}\frac{\partial q}{\partial n_x}d_xS - \frac{1}{2\pi}\int_S q\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}d_xS \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial n_z}\right)^+ = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n_z}\frac{1}{|r|}\frac{\partial q}{\partial n_x}d_xS - \lim_{y\in D^+, y\to z\in S}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{2\pi}\int_S q\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}d_xS\right) \tag{13}$$

Здесь выполнен предельный переход к точке $z \in S$ из области D^+. В последнем равенстве производная d/dn_y не занесена под интеграл, так как в противном случае потребовалось бы определить смысл интеграла, содержащего высокую особенность подынтегральной функции.

б). Для кватернионной аналитической функции предельное равенство имеет вид, [2].

$$q^+(z) = \frac{1}{2\pi}\int_S \left(\nabla \frac{1}{|r|}\right) n_x q(x) d_x S, \quad z \in S, \quad |r| = |x - z| \tag{14}$$

в). Аналогично для теории упругости, [3]:

$$q^+(z) = 2\int_S f(x) \bullet U(x,z) d_x S - \lim_{y \in D^+, y \to z \in S} \left(2\int_S q(x) \bullet \Phi(x,y) d_x S\right) \tag{15}$$

$$\left[T_{n_z} q(z)\right]^+ = 2\int_S \Phi(z,x) \bullet f(x) d_x S - \lim_{y \in D^+, y \to z \in S} T_{n_z}\left(2\int_S q(x) \bullet \Phi(x,y) d_x S\right) \tag{16}$$

Если функции $q(x)$ и их производные являются граничными значениями решений соответствующих краевых задач, то равенства (12) – (16) являются тождествами. Используем их для получения тождеств, содержащих произвол.

Если в представлении (1) заменить $q(x)$ и dq/dn_x произвольными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, то функция

$$p(y) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|r|}\psi d_x S - \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|} d_x S, \quad y \in D^+$$

будет гармонической. Используя интеграл Гаусса (9), можно получить предельные граничные значения этой гармонической функции и ее производной по направлению n_y. Подстановка этих функций в левые и правые части тождеств (12)-(13) приводит к равенствам, содержащим две произвольные функции φ и ψ. Введем граничные интегральные операторы :

$$V\psi = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{1}{|r|}\psi d_x S, \quad |r| = |x - z|, \quad z \in S; \quad B\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|} d_x S$$

$$G\psi = \frac{1}{2\pi}\int_S \psi \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|r|} d_x S; \quad M\psi = \lim_{y \in D^+, y \to z \in S} \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|} d_x S\right) \tag{17}$$

Подстановка приводит к равенствам

$$\varphi + V\psi - B\varphi = V(\psi + G\psi - M\varphi) - B(\varphi + V\psi - B\varphi);$$

$$\psi + G\psi - M\varphi = G(\psi + G\psi - M\varphi) - M(\varphi + V\psi - B\varphi);$$

Произвол в выборе функций φ и ψ позволяет положить их последовательно равными нулю. Окончательно получим:

$$VG\psi = BV\psi; \quad \psi = G^2\psi - MV\psi; \tag{18}$$

$$\varphi = B^2\varphi - VM\varphi; \quad MB\varphi = GM\varphi; \tag{19}$$

верные для произвольных функций φ и ψ.

б). Имеют место аналогичные рассуждения для интегрального представления кватернионной аналитической функции [2].

В равенстве (2) функцию $\mathbf{q(x)}$ под интегралом можно заменить на произвольную кватернионную функцию $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(x)}$:

$$p(y)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}n_x\varphi(x)d_xS, \quad y\in D^+ \tag{20}$$

Непосредственно проверяется, что $\nabla p(y)=0$. Используя (10), можно вычислить предельное граничное значение функции $\mathbf{p(y)}$ и подставить его в тождество (14). Введем оператор

$$Aq=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}n_x q(x)d_xS, \quad |r|=|x-y|, \quad y\in S \tag{21}$$

Тогда предельные равенства (14) и (20) имеют вид соответственно, [2]: $q=Aq;\ p^+=2\pi\varphi+2\pi A\varphi$. Подставляя $\mathbf{p^+}$ вместо $\mathbf{q}$, получим:

$$A^2\varphi=\varphi \tag{22}$$

Это равенство является тождеством для произвольной кватернионной функции φ. Оно может быть преобразовано в четыре тождества. Пусть дан произвольный кватернион $\varphi=\varphi_0+\psi$, где φ_0 – его скалярная, а ψ — векторная части . Используя вид оператора $\mathbf{A}$, векторную интерпретацию кватернионного умножения (4) и произвол в выборе φ_0,ψ тождества (22) представляются в форме

$$\varphi_0=B^2\varphi_0-FC\varphi_0;\ CB\varphi_0=DC\varphi_0; \tag{23}$$

$$BF\psi=FD\psi;\ \psi=-CF\psi+D^2\psi; \tag{24}$$

где буквами $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$ обозначены интегральные операторы:

$$\begin{gathered}
B\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}\bullet n_x\varphi_0 d_xS;\ C\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}\times n_x\varphi_0 d_xS;\\
F\psi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left(\nabla\frac{1}{|r|}\times n_x\right)\bullet\psi d_xS;\\
D\psi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left[-\nabla\frac{1}{|r|}\bullet n_x\psi+\left(\nabla\frac{1}{|r|}\times n_x\right)\times\psi\right]d_xS\$
\end{gathered} \tag{25}$$

в). Пользуясь представлением решения теории упругости в форме (5) и предельными равенствами (15) и (16), можно получить тождества типа (18)-(19), (23)-(24) для интегральных операторов теории упругости. Введем операторы

$$\begin{gathered}
H\varphi=2\int\limits_S \varphi(x)\bullet U(x,z)d_xS;\ K^*\varphi=2\int\limits_S \varphi(x)\bullet\Phi(x,z)d_xS;\\
K\varphi=2\int\limits_S \Phi(z,x)\bullet\varphi(x)d_xS;\ L\varphi=\lim_{y\in D^+,y\to z\in S}T_{n_y}\left(2\int\limits_S \varphi(x)\bullet\Phi(x,y)d_xS\right)
\end{gathered} \tag{26}$$

Первый из этих операторов известен как прямое значение обобщенного потенциала простого слоя, второй — прямое значение обобщенного потенциала двойного слоя.

Техника получения тождеств громоздка, но аналогична предыдущему. Впервые они получены Д. Г. Натрошвили, [4] и имеют следующий вид:

$$\mathbf{HK}\varphi = \mathbf{K}^*\mathbf{H}\varphi;\ \ \mathbf{LH}\varphi = \mathbf{K}^2\varphi - \varphi; \tag{27}$$

$$\mathbf{HL}\psi = -\psi + \left(\mathbf{K}^*\right)^2\psi;\ \ \mathbf{KL}\psi = \mathbf{LK}^*\psi \tag{28}$$

Применим полученные тождества для получения ряда известных и новых фактов.

а). Рассмотрим тождества (18)-(19).

Теорема 1. Спектры операторов **B** и **G** действительны, совпадают, собственные числа имеют равные конечные кратности, могут сгущаться только к нулю и расположены на полуинтервале **[-1; 1)**.

Доказательство. Действительно, известно что оператор **B** — оператор потенциала двойного слоя, его спектр дискретен, расположен на полуинтервале **[-1; 1)**, собственные числа имеют конечную кратность и могут сгущаться лишь к нулю.

Пусть $\mathbf{B}\varphi = \lambda\varphi$, тогда из последнего равенства (19) следует $\mathbf{GM}\varphi = \lambda\mathbf{M}\varphi$, то есть собственные числа λ принадлежат спектру оператора **G**, а $\mathbf{M}\varphi$ являются соответствующими собственными функциями. Аналогично доказывается обратное утверждение. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между спектрами операторов **B** и **G**.

Далее легко устанавливаются спектральные свойства операторов **VM** и **MV**. Действительно, из первого равенства (19) следует $\mathbf{VM}\varphi = \left(\lambda^2 - 1\right)\varphi$, а из последнего равенства (18) — $\mathbf{MV}\psi = \left(\lambda^2 - 1\right)\psi$, причем $\psi = \mathbf{M}\varphi$.

б). Из тождеств (23) и (24) следуют две теоремы.

Теорема 2. За исключением точек $\lambda = \pm 1$ спектры операторов **B** и **D** совпадают, собственные числа имеют одинаковую кратность, а собственные функции взаимно выражаются с помощью квадратур.

Доказательство. Известно, что спектр оператора потенциала двойного слоя **B** дискретен, собственные числа $\{\lambda\}$ имеют конечную кратность, могут сгущаться к точке $\lambda = 0$, $\{\lambda\} \in [-1,1)$. Покажем, что если исключить $\lambda = \pm 1$, то спектры операторов **B** и **D** тождественно совпадут.

Пусть $\mathbf{B}\varphi = \lambda\varphi$. Обозначим $\mathbf{C}\varphi = \psi$. Подставляя в тождества (23) вместо $\mathbf{j}_0$ величину **j** и учитывая введенные значения, найдем:

$$\mathbf{D}\psi = \lambda\psi,\ \ \mathbf{F}\psi = \left(\lambda^2 - 1\right)\varphi.$$

Следовательно, всякой собственной функции φ оператора **B** соответствует собственная функция ψ оператора **D**, и они взаимно пересчитываются с помощью операторов **C** и **F**. Аналогично доказывается, что всякой собственной функции оператора **D** соответствует собственная функция оператора **B**. Из взаимно однозначного соответствия собственных функций операторов **B** и **D** следует равная конечная кратность собственных чисел этих операторов и наличие одной точки сгущения $\lambda = 0$.

Теорема 3. Точки λ±=1 являются точками непрерывного спектра оператора **D** бесконечной кратности.

Доказательство. По определению [6] число λ будет точкой непрерывного спектра оператора **D**, если найдется некомпактная последовательность φ_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(D-\lambda I)\varphi_n=0$. Пусть такая последовательность уже найдена. Подставляя ее в тождества (24) и переходя к пределу, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(BF\varphi_n-\lambda F\varphi_n\right)=0;\quad \lim_{n\to\infty}\left[CF\varphi_n-\left(1-\lambda^2\right)\varphi_n\right]=0.$$

Из первого предельного равенства следует, что либо $Fq_n=0$, тогда из второго равенства и некомпактности последовательности φ_n вытекает, что $\lambda=\pm1$,

либо $\lim\limits_{n\to\infty}F\varphi_n=\psi$, $\quad B\psi=\lambda\psi$ тогда из некомпактности последовательности

φ_n и второго равенства следует, что $C\psi\equiv0$ и $\lambda=\pm1$.

Точки $\lambda=\pm1$ оказываются собственными числами оператора **D** бесконечной кратности. Действительно, введем в рассмотрение кватернион $\varphi=\varphi_0+\psi$, где $\varphi_0=0$, $\psi=\nabla w$ и w — произвольная гармоническая функция в области D^+и D^-. Легко видеть, что кватернион φ — K-аналитическая функция в области гармоничности функции w. Для граничных значений K-аналитической функции φ верно равенство $A\varphi=\pm\varphi$.

Если использовать соотношения (22) и (25), то для граничных значений кватерниона φ из этого равенства получится $D\psi=\pm\psi$. Следовательно, $\lambda=\pm1$ являются собственными числами оператора **D** и из произвольности гармонической функции следует их бесконечная кратность.

в). Обратимся теперь к граничным сингулярным интегральным уравнениям теории упругости, которые могут быть записаны через операторы (26). $\varphi-K^*\varphi=-2v$; $\varphi+K\varphi=2f$, где v — граничное значение вектора перемещения, а f — граничное значение вектора напряжения. Первое интегральное уравнение решает первую, а второе — вторую краевые задачи. (аналоги задач Дирихле и Неймана в теории упругости). Аналогично пункту а тождества (27)-(28) позволяют доказать совпадение спектров операторов **K** и **K***, что является аналогом второй теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов. В отличие от вполне непрерывных операторов содержание четвертой теоремы Фредгольма изменяется.

Теорема 4. Спектры интегральных операторов теории упругости имеют не одну, а три точки непрерывного спектра.

Доказательство опирается на обобщение теоремы Вейля о вполне непрерывных возмущениях: прибавление к замкнутому линейному оператору произвольного вполне непрерывного оператора не изменяет непрерывной части спектра [6].

Доказательство. Действительно, интегральные операторы теории упругости **K** и **K*** (26) с учетом ядра $\Phi(x,y)$ и оператора **D** (25) представляются в виде сумм $K=-\beta D+T_1$; $K^*=-\beta D+T_2$, где β — число, зависящее от коэффициента Пуассона, **D** — сингулярный интегральный оператор, имеющий три точки непрерывного спектра, а T_1 и T_2 — интегральные операторы со слабой особенностью, которые можно считать вполне непрерывными возмущениями оператора βD. Следовательно, операторы **K** и **K*** имеют такое же количество точек непрерывного спектра, что и оператор **D**.

Другое применение тождеств (27) и (28) в теории упругости было указано Д. Г. Натрошвили. В теории упругости тождества (27) – (28) позволяют преобразовать интегральные уравнения первого рода к интегральным уравнениям второго рода, что обеспечивает корректность задачи и возможность использования теорем существования и единственности.

Таким образом, предложена схема построения интегральных тождеств определенного типа и на различных примерах показана эффективность их применения для исследования свойств интегральных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
2. Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 864-868.
3. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
4. Натрошвили Д. Г. Об одном интегральном уравнении первого рода // Сообщения академии наук Грузинской ССР. 1981. 102, № 3. С. 501-504.
5. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.
7. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.

А. Г. КУТУШЕВ,
А. В. ТАТОСОВ

УДК 532. 529

КОСЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ В ГАЗОВЗВЕСЯХ

АННОТАЦИЯ. Приводятся результаты теоретического анализа равновесного состояния смеси газа с твердыми несжимаемыми инертными частицами за косыми скачками уплотнения с учетом конечности объема, занимаемого дисперсной фазой.

The analysis result of balance gas-particle condition over oblique shock wave are reduced.