Другое применение тождеств (27) и (28) в теории упругости было указано Д. Г. Натрошвили. В теории упругости тождества (27) – (28) позволяют преобразовать интегральные уравнения первого рода к интегральным уравнениям второго рода, что обеспечивает корректность задачи и возможность использования теорем существования и единственности.

Таким образом, предложена схема построения интегральных тождеств определенного типа и на различных примерах показана эффективность их применения для исследования свойств интегральных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.

2. Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 864-868.

3. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 663 с.

4. Натрошвили Д. Г. Об одном интегральном уравнении первого рода // Сообщения академии наук Грузинской ССР. 1981. 102, № 3. С. 501-504.

5. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

6. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.

7. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.

А. Г. КУТУШЕВ,
А. В. ТАТОСОВ

УДК 532. 529

КОСЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ В ГАЗОВЗВЕСЯХ

АННОТАЦИЯ. Приводятся результаты теоретического анализа равновесного состояния смеси газа с твердыми несжимаемыми инертными частицами за косыми скачками уплотнения с учетом конечности объема, занимаемого дисперсной фазой.

The analysis result of balance gas-particle condition over obligue shock wave are reduced.

В большинстве известных теоретических исследований, посвященных анализу структуры УВ в газовзвесях, пренебрегается влиянием объемного содержания дисперсных частиц на замороженные и равновесные параметры фаз и смеси (см., например, обзор [1]). Впервые учет конечности объема, занимаемого твердыми частицами, на отмеченные выше параметры смеси за плоскими УВ осуществлен в работе [2]. Детальное изучение влияния объемной доли твердых инертных частиц на давление газа в области замороженного течения фаз приведено в работе [3]. В статье [4] осуществляется теоретический анализ замороженной ударной адиабаты инертной газовзвеси и отмечается невозможность скачков давления бесконечной интенсивности вследствие конечности объема, занимаемого твердыми несжимаемыми частицами. Анализ замороженных, равновесных и детонационных ударных адиабат реагирующих смесей газа с твердыми частицами топлива с учетом объемной доли дисперсной фазы приводится в работе [5]. Влияние конечности объема, занимаемого твердыми сжимаемыми частицами, на сжатие инертной газовзвеси за фронтами УВ обсуждается в работе [6]. Предельные состояния разреженных дисперсных смесей "газ-частицы" и двухкомпонентных сжимаемых твердых сред за отраженными от жесткой стенки УВ анализируются в работе [7].

В настоящей работе проводится аналитическое исследование влияния объемного содержания твердых несжимаемых частиц на равновесные параметры инертной газовзвеси за косыми УВ.

1. Основные уравнения и соотношения на ударных скачках. При известных допущениях механики многофазных дисперсных сред двумерные плоские ударноволновые течения разреженных бесстолкновительных монодисперсных инертных газовзвесей описываются следующей системой основных дифференциальных уравнений движения фаз:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{iy}\right)}{\partial y}=0 \qquad (i=1;2),$$

$$\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix}^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix} v_{iy}\right)}{\partial y}+\alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}=(-1)^i F_x,$$

$$\frac{\partial\left(\rho_i v_{iy}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix} v_{iy}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{iy}^2\right)}{\partial y}+\alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}=(-1)^i F_y,$$

$$\frac{\partial\left(\rho_2 e_2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_2 e_2 v_{2x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_2 e_2 v_{2y}\right)}{\partial y}=Q, \qquad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial\left(\rho_i E_i\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{ix} E_i\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho_i v_{iy} E_i\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\alpha_i p v_{ix}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\alpha_i p v_{iy}\right)}{\partial y}\right]=0,$$

$$\rho_i=\overset{\circ}{\rho}_i \alpha_i, \quad \alpha_1+\alpha_2=1, \quad E_i=e_i+\frac{\left(v_{ix}^2+v_{iy}^2\right)}{2}, \quad e_i=c_i T_i \quad (i=1;2),$$

$$p=(\gamma-1)\rho_1^{\circ}e_1,\quad F_x=\rho_2\frac{(\upsilon_{1x}-\upsilon_{2x})}{\tau_V},\quad F_y=\rho_2\frac{(\upsilon_{1y}-\upsilon_{2y})}{\tau_V},\quad Q=\frac{\rho_2c_2\,(T_1-T_2)}{\tau_T}$$

$$\left(\gamma,c_1,c_2\equiv const,\quad \tau_V=\frac{\rho_2^{\circ}d^2}{18\mu_1},\quad \tau_T=\frac{\rho_2^{\circ}d^2c_2}{12\lambda_1}\right).$$

Здесь через $\rho_i;\rho_i^{\circ};\upsilon_{ix};\upsilon_{iy};\alpha_i;e_i;E_i$ обозначены соответственно средняя и истинная плотности, составляющие скорости относительно осей 0x и 0y лабораторной системы координат, объемное содержание, удельные внутренняя и полная энергии i-й фазы; p — давление газа; F_x и F_y — составляющие силового взаимодействия фаз; Q — интенсивность контактного теплообмена газа с частицами; T_i и c_i — соответственно температура и удельная теплоемкость при постоянном объеме i-й составляющей гетерогенной смеси; γ,μ_1,λ_1 — показатель адиабаты, динамическая вязкость и коэффициент теплопроводности газовой фазы; τ_V и τ_T характерные времена выравнивания скоростей и температур газовой и дисперсной фаз в смеси.

Уравнения (1. 1) описывают течения инертных газовзвесей с учетом неравновесных эффектов силового и теплового взаимодействия фаз. Указанные эффекты следует учитывать тогда, когда характерные релаксационные времена τ_V и τ_T сравнимы с характерным газодинамическим временем задачи (τ_G), т. е. $\tau_G/\tau_V\sim 1$ и $\tau_G/\tau_T\sim 1$. В предельных случаях $\tau_G/\tau_V<<1$, $\tau_G/\tau_T<<1$ и $\tau_G/\tau_V>>1$, $\tau_G/\tau_T>>1$ эффекты неравновесности несущественны и анализ целесообразно проводить в рамках соответственно "замороженной" и термодинамически-равновесной моделей газовзвеси.

Согласно равновесной модели газовзвеси система уравнений (1. 1) при $\upsilon_{1x}=\upsilon_{2x}=\upsilon_x$, $\upsilon_{1y}=\upsilon_{2y}=\upsilon_y$, $T_1=T_2=T$ сводится к уравнениям газовой динамики для "эффективного" газа с усложненным уравнением состояния [6]

$$\mathrm{p}=\rho RT=(\Gamma-1)\rho e,\quad e=cT,\quad R=R_1\frac{x_1}{(1-\alpha_2)},\quad c=x_1c_1+x_2c_2,$$

$$\rho=\rho_1+\rho_2,\quad x_1=\frac{\rho_1}{\rho},\quad x_2=\frac{\rho_2}{\rho},\quad x_1+x_2=1,\quad \alpha_2=x_2\frac{\rho}{\rho_2^{\circ}},$$

$$\Gamma=\frac{(\gamma-\alpha_2)x_1c_1+\alpha_1x_2c_2}{\alpha_1(x_1c_1+x_2c_2)},\qquad a=\sqrt{\Gamma\frac{\mathrm{p}}{\alpha_1\rho}}=\frac{a_1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}x_1},\quad \left(a_1=\sqrt{\gamma\frac{\mathrm{p}}{\rho_1^{0}}}\right).\quad(1.2)$$

Здесь ρ,e,p,R,Γ,c,a — плотность, удельная внутренняя энергия, давление, газовая постоянная, показатель адиабаты, удельная теплоемкость, скорость звука равновесной смеси газа и твердых частиц; R_1 — газовая постоянная несущей составляющей смеси; a_1 — скорость звука газовой фазы; x_1 и x_2 — массовые концентрации газа и частиц.

Следует отметить, что при $\alpha_2 << 1$ в выражениях (1. 2) для Г и а можно полагать $\alpha_1 \approx 1$ и $R \approx R_1 x_1 \equiv const$ и $c \equiv const$, т. е. при весьма малых объемных концентрациях взвеси равновесная смесь моделируется идеальным калорически-совершенным "эффективным" газом.

Интегральные уравнения движения равновесной газовзвеси приводятся к следующим соотношениям на ударных скачках, связывающим параметры "эффективного" газа перед и за фронтом УВ в системе координат x\`0y\`, связанной с поверхностью разрыва.

$$\begin{gathered}[\rho v'_x] = \rho_0 v'_{x0} - \rho v'_x = 0 \quad (v'_x = v'_n = v_n - D_x; \quad v'_{x0} = v'_{n0} = v_{n0} - D_x), \\ [v'_y] = v'_{y0} - v'_y = 0 \quad (v'_y = v'_\tau = v_\tau - D_y; \quad v'_{y0} = v'_{\tau 0} = v_{\tau 0} - D_y), \\ [p + \rho v'^2_x] = (p_0 + \rho_0 v'^2_{x0}) - (p + \rho v'^2_x) = 0, \quad \left[i + \frac{v'^2_x}{2}\right] = \left(i_0 + \frac{v'^2_{x0}}{2}\right) - \left(i + \frac{v'^2_x}{2}\right) = 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь индексом "0" внизу отмечены параметры смеси перед скачком уплотнения. Через v'_n, v_n и v'_τ, v_τ обозначены нормальные и касательные к поверхности скачка скорости "эффективного" газа в системе координат, связанной с поверхностью разрыва (x′0y′), и в лабораторной системе координат (x0y); D — скорость УВ.

2. Влияние объемного содержания частиц на параметры газовзвеси в равновесной области двухфазного течения за косой УВ.

В скачках уплотнения соотношения между параметрами равновесных смесей в областях движения (0) и (e) определяются только законами сохранения массы, импульса и энергии, а также уравнениями состояния "эффективного" газа. Поэтому для определения этих соотношений можно вынести из рассмотрения релаксационный слой (r) и ввести одну эффективную поверхность сильного разрыва, разделяющую области невозмущенного (0) и возмущенного (e) равновесного течения газовзвеси. На введенной таким образом эффективной поверхности разрыва будут справедливыми соотношения на скачках для "эффективного" газа (1.3). Обозначим через φ и θ соответственно углы падения и отклонения потока равновесной газовзвеси в косом скачке уплотнения.

Из интегралов массы и импульса на ударном скачке найдем выражение для квадрата плотности потока равновесной смеси

$$(\rho_0 v'_{x0})^2 = \frac{(p_e - p_0)}{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_e}\right)} \quad (v'_{x0} = v'_{n0} = v'_0 \sin\varphi). \tag{2.1}$$

Дополнительно из системы уравнений (1.2) и (1.3) можно получить уравнение ударной адиабаты равновесной смеси

$$\frac{\rho_0}{\rho_e} = \frac{(\Gamma - 1 + 2\alpha_{20})p_e + (\Gamma + 1 - 2\alpha_{20})p_0}{(\Gamma + 1)p_e + (\Gamma - 1)p_0}. \tag{2.2}$$

Из уравнений (1.3), (2. 1) и (2.2) следует соотношение

$$\frac{\rho_0}{\rho_e}=\frac{\upsilon'_{xe}}{\upsilon'_{x0}}=\frac{(\Gamma-1+2\alpha_{20})\rho_0\upsilon'^2_{x0}+2\Gamma p_0}{(\Gamma+1)\rho_0\upsilon'^2_{x0}}. \tag{2.3}$$

Выберем прямоугольную систему координат x"0y", связанную с поверхностью разрыва, ось x" которой направлена вдоль скорости натекающего потока $\upsilon''_0=\upsilon'_0$. Обозначим через υ''_{xe} и υ''_{ye} составляющие скорости равновесного потока υ_e в новой системе координат. В соответствии с законом ортогонального преобразования компонент вектора следует, что

$$\upsilon'_{xe}=\upsilon''_{xe}\sin\varphi-\upsilon''_{ye}\cos\varphi,\quad \upsilon'_{x0}=\upsilon''_{x0}\sin\varphi=\upsilon'_0\sin\varphi,\quad \upsilon'_{ye}=\upsilon''_{xe}\cos\varphi+\upsilon''_{ye}\sin\varphi,$$

$$\upsilon'_{y0}=\upsilon''_{x0}\cos\varphi=\upsilon'_0\cos\varphi\quad \left(\upsilon'_{y0}=\upsilon'_{\tau 0},\upsilon'_{ye}=\upsilon'_{\tau e}\right) \tag{2.4}$$

С использованием условия непрерывности касательной составляющей скорости равновесной смеси при переходе через ударный скачок $\upsilon'_{y0}=\upsilon'_{ye}$ (см. второе соотношение в (1.3)) система уравнений (2.4) преобразуется к виду

$$tg\varphi=\frac{(\upsilon'_0-\upsilon''_{xe})}{\upsilon''_{ye}}=\frac{(\upsilon''_{x0}-\upsilon''_{xe})}{\upsilon''_{ye}}. \tag{2.5}$$

Подставляя в (2.3) выражение для υ'_{xe} из (2.4) получим следующее уравнение

$$\upsilon''_{xe}-\frac{\upsilon''_{ye}}{tg\varphi}=\frac{(\Gamma-1+2\alpha_{20})\rho_0\upsilon''^2_{x0}\sin^2\varphi+2\Gamma p_0}{(\Gamma+1)\rho_0\upsilon''_{x0}\sin^2\varphi}. \tag{2.6}$$

С помощью последних двух уравнений найдем зависимость, выражающую угол отклонения потока равновесной газовзвеси θ через угол падения φ.

$$ctg\theta=tg\varphi\left[\frac{(\Gamma+1)\rho_0\upsilon''^2_{x0}}{2\left[(1-\alpha_{20})\rho_0\upsilon''^2_{x0}\sin^2\varphi-\Gamma p_0\right]}-1\right]. \tag{2.7}$$

Далее, преобразуя выражение (2. 6) с помощью соотношений (2.4) – (2.5), находим искомое уравнение

$$\upsilon''^2_{ye}=(\upsilon''_{x0}-\upsilon''_{xe})^2\left\{\frac{\dfrac{2}{(\Gamma+1)}\left[(1-\alpha_{20})\upsilon''_{x0}-\dfrac{\Gamma p_0}{\rho_0\upsilon''_{x0}}\right]-(\upsilon''_{x0}-\upsilon''_{xe})}{(\upsilon''_{x0}-\upsilon''_{xe})+\dfrac{2\Gamma}{(\Gamma+1)}\dfrac{p_0}{\rho_0\upsilon''_{x0}}}\right\}. \tag{2.8}$$

С использованием определения критической скорости равновесной смеси (a_*) и на основе уравнения Бернулли

$$a_*^2=\frac{2\alpha_{10}}{\Gamma+1}a_0^2+\frac{(\Gamma-1)}{(\Gamma+1)}\upsilon''^2_{x0}\qquad\left(a_0^2=\frac{\Gamma p_0}{\alpha_{10}\rho_0}\right)$$

уравнение (2. 8) можно представить в виде

$$v''^2_{ye} = \left(v''_{x0} - v''_{xe}\right)^2 \frac{v''_{x0}v''_{xe} - a_*^2 - \dfrac{2\alpha_{20}}{\Gamma+1}v''^2_{x0}}{\dfrac{2}{\Gamma+1}v''^2_{x0} - v''_{x0}v''_{xe} + a_*^2}. \tag{2.9}$$

При $\alpha_{20} \to 0$ и соответственно $\Gamma \to \gamma$ уравнение (2.9) переходит в известное в газовой динамике уравнение ударной поляры.

Если скорость смеси перед скачком v''_{x0} близка к равновесной скорости звука (a_0), то разложив дробь в формуле (2.8) по степеням $(v''_{x0} - a_0)$ и $(v''_{xe} - a_0)$, получим приближенное выражение для угла отклонения потока

$$tg^2\theta \approx \theta^2 = \frac{\left(v''_{x0} - v''_{xe}\right)}{2(1-\alpha_{20})a_0^3}\left[4(1-\alpha_{20})(v''_{x0} - a_0) - (\Gamma+1)(v''_{x0} - v''_{xe})\right] \tag{2.13}$$

В соответствии с (2.13) экстремум функции θ по аргументу v''_{xe} дает максимальное значение угла отклонения потока взвеси в слабой УВ

$$\theta^{(0)}_{\max} = \frac{2^{7/2}(1-\alpha_{20})(v''_{x0} - a_0)^{3/2}}{3^{3/2}(\Gamma+1)a_0^{3/2}}. \tag{2.14}$$

Таким образом, в результате выполненного исследования получено уравнение ударной поляры для равновесных смесей газа с твердыми несжимаемыми инертными частицами с учетом объемного содержания дисперсной фазы.

Выведены зависимости для предельных углов отклонения потока равновесной смеси за слабыми косыми скачками уплотнения. Установлено, что при прочих одинаковых параметрах (v''_{x0}, a_0, Γ) максимальное значения угла отклонения потока $(\theta^{(0)}_{\max})$ за слабыми скачками уплотнения линейно зависит от объемного содержания частиц (α_{20}).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа / ВИНИТИ. 1981. Т. 16. С. 209-293.

2. Rudinger G. Some effects of finite particle volume on the dynamics of gas-particle mixtures // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. №. 7. P. 1217 — 1222.

3. Schmitt von Schubert B. J. Existence and uniqueness of normal shock waves in gas-particle mixtures // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38. N. 3. P. 633-655.

4. Бондаренко О. Н. Об ударной адиабате в смеси газа с частицами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 165-167.

5. Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б., Нигматулин Р. И. Структура детонационных волн в газовзвесях унитарного топлива // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 47-53.

6. Медведев А. Е., Федоров А. В., Фомин В. М. Исследование адиабат гетерогенной детонации // ФГВ. 1987. Т. 23 № 2. С. 115-121.

7. Арутюнян Г. М. Термогидродинамика гетерогенных смесей. М.: Наука, 1991. 271с.

8. Miura H., Saito T., Glass I. I. Shock wave reflection from rigid wall in a dusty gas || Proc. R. Soc. London. 1986. A. 404. P. 55-67.